

Minuťka: KKT

1.) Iba normosti (lin.): $\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ Ax = b \end{array} \right\}$ f -konv. $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$

$\Rightarrow$ Newton: $\dots \left\{ \begin{array}{l} \min_{s \in \mathbb{R}^n} f(x^0) + \nabla f(x^0)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f(x^0) s \\ \underline{As = 0_p} \end{array} \right\} \leftarrow v$

$\rightarrow$ KKT sú nutné a postačujúce pre (x)

$$\mathcal{L}(s, v) = f(x^0) + \underbrace{\nabla f(x^0)^T s}_{L^T} + \frac{1}{2} s^T \underbrace{\nabla^2 f(x^0)}_A s + \underbrace{v_1 \cdot a_1^T s + \dots + v_p \cdot a_p^T s}_v$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_x \mathcal{L}^T x = L \\ \nabla_x \mathcal{L}^T A x = 2Ax \end{array} \right.$$

$$(v_1 \dots v_p) \begin{pmatrix} a_1^T s \\ \vdots \\ a_p^T s \end{pmatrix} = v^T A s = \underbrace{(A^T v)^T}_{L^T} s$$

$$\begin{array}{l} A s = 0 \\ \updownarrow \\ a_1^T s = 0 \leftarrow v_1 \\ \vdots \\ a_p^T s = 0 \leftarrow v_p \end{array}$$

Počítanie: $\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ \lambda \in \mathbb{R}^m \rightarrow F(x) \leq 0_m \\ v \in \mathbb{R}^p \rightarrow G(x) = 0_p \end{array} \right\}$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \quad G(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_p(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x, \lambda, v) = f(x) + \lambda^T F(x) + v^T G(x)$$

KKT: (1) $\nabla_x \mathcal{L} = 0$: $0 + \nabla f(x^0) + \frac{1}{2} \cdot 2 \nabla^2 f(x^0) s + A^T v = 0_n$ } $\rightarrow$ lin. rovnice
(2) $As = 0_p$
(3) $\emptyset$
(4) $\emptyset$
 $n(s, v)$

$\Rightarrow$ celko vyriešime

$$\begin{array}{l} n \text{ rovníc} \rightarrow \\ p \text{ rovníc} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} \nabla^2 f(x^0) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x^0) \\ 0_p \end{bmatrix} \quad (LR)$$

$$\begin{array}{l} (1) \nabla^2 f(x^0) s + A^T v = -\nabla f(x^0) \\ (2) A s = 0_p \end{array}$$

$n+p$ premenných

$\Rightarrow n+p$ rovníc o $n+p$ premenných

$\Rightarrow$ stačí vyriešiť a máme (s^*, v^*)

$\Rightarrow$ x^0 sa pohybuje o " s ", t.j. je riešením z (LR)

$\Rightarrow$ Newton: $x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda_1 s^{(0)}$, $s^{(0)}$ riešenie z (LR)
 $\vdots$
 $\uparrow$ ďalšie kroky

$$\underline{\underline{x^{(q+1)} = x^{(q)} + \lambda_q s^{(q)}}}, \quad s^{(q)} \text{ riešenie z } \begin{bmatrix} \nabla^2 f(x^{(q)}) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{(q)} \\ v^{(q)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x^{(q)}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

• Keby $A=0$ (resp.: " $A=\emptyset$ ") : ostane len: $\nabla^2 f(x^{(q)}) \cdot s^{(q)} = -\nabla f(x^{(q)})$

- Keby $\lambda=0$ (resp.: " $\lambda=\infty$ ") : ostane len: $\nabla^2 f(x^{(q)}) \cdot s^{(q)} = -\nabla f(x^{(q)})$
 $\Rightarrow$ presne klasická N.H.
- λ_q : opt. kôef: $\lambda_q \in \arg\min_{\lambda} f(x^{(q)} + \lambda s^{(q)})$

2, Všeobecná dynamická

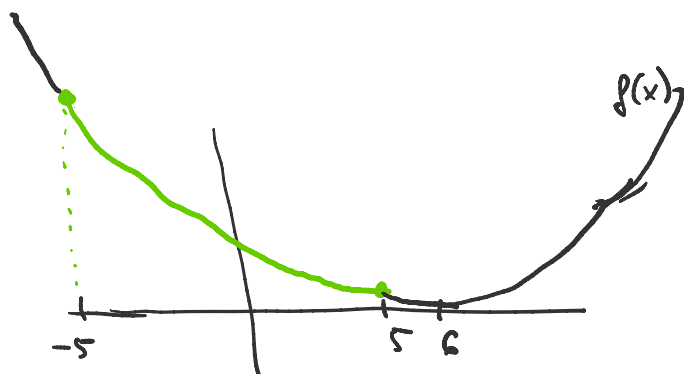
$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ f_i(x) \leq 0 \quad \forall i=1:n \\ Ax=b \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} f - \text{konv.} \\ f_i - \text{konv. } \forall i \\ A \in \mathbb{R}^{p \times n}, b \in \mathbb{R}^p \end{array}$$

Barierová met.:

$$\text{Pr.: } \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \\ x^2 - 25 \leq 0 \end{array} \right\} \quad (1) \quad f(x) = (x-6)^2$$

$\hookrightarrow x \in [-5, 5]$

$$\Rightarrow x^* = 5, \quad f(x^*) = 1$$



Idea 1: previesť na neobmedzenú opt. $\left\{ \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) + a(x) \right\} \quad (2a)$

$$a(x) = \begin{cases} 0, & x^2 - 25 \leq 0 \\ \infty & \text{inak} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ dokázať, aby x^* splnila dynamická

$$\text{iný zápis: } \left\{ \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) + \varphi(x^2 - 25) \right\} \quad (2b)$$

$$\varphi(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ \infty, & u > 0 \end{cases}$$

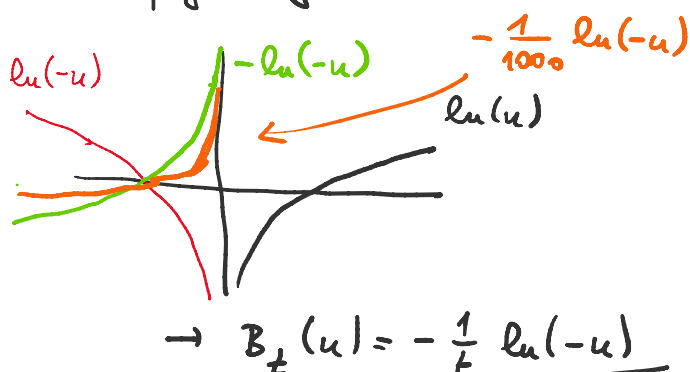
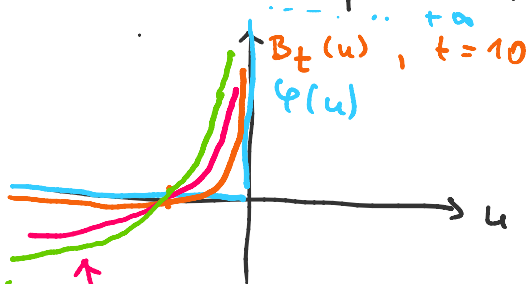
$\uparrow$
penalta

$$(2a) \Leftrightarrow (1)$$

$$(2b) \Leftrightarrow (1) \quad : \text{evidentne rovnaké } x^*$$

- (2b): prakticky neriešiteľné $\rightarrow$ nepojita' fcia...

Idea 2: φ iba aproximovať



$$\rightarrow B_t(u) = -\frac{1}{t} \ln(-u)$$



$$\rightarrow B_t(u) = -\frac{1}{t} \ln(-u)$$

$$B_t(u) \rightarrow +\infty \text{ pre } u \rightarrow 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ barierová funkcia : nepustí $u \geq 0$

$$B_t(x^2 - 25) : \text{nepustí } x^2 - 25 \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{zabezpečiť } x^2 - 25 < 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) + B_t(x^2 - 25) \right\} \quad (3)$$

B_t : rastúca, konvexná, diferencovateľná

: čím väčšie $t \rightarrow$ tým lepšia aproximácia φ

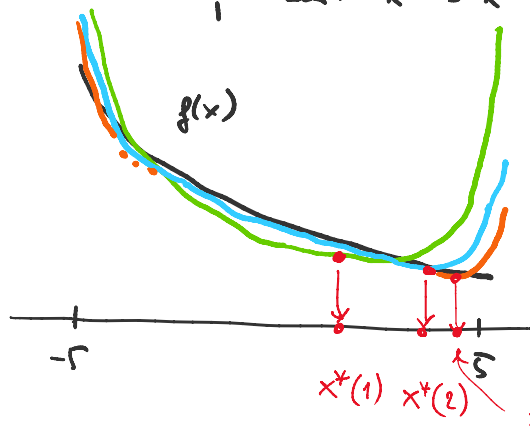
$\rightarrow$ tým väčšie sa s B_t numericky pracuje : nestabilita,
výsledok sa mení v^o pri
hranici

$\Rightarrow$ (3) je aproximácia (1)

Idea 3 : riešiť sériu úloh (3)

- začať s malým "t" $\rightarrow$ vyriešiť (3) $\Rightarrow x^*$

- zväčšiť t, tedať $x^{(0)} = x^* \leftarrow \Rightarrow$ vyriešiť (3) $\Rightarrow x^* \leftarrow$ opakovat'



$$f(x) + B_t(x), \quad t=1$$

$$t=2$$

$$t=3$$

$$x^* \text{ pre (3) pre dané } t : x^*(t)$$

$x^{(0)} = x^*(t)$ pre predch. t $\Rightarrow$ začneme bližšie optima

$\Rightarrow$ N.M. funguje lepšie $\Rightarrow$ "zolačnu" aj
väčšiu barieru

$$t=0,1 \rightarrow x^*(0,1)$$

$$t=0,2 \rightarrow x^*(0,2)$$

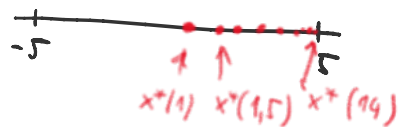
$\vdots$

$$t=4 \rightarrow x^*(4) : \text{bližšie } x^* \text{ pre pŕv. úlohu}$$

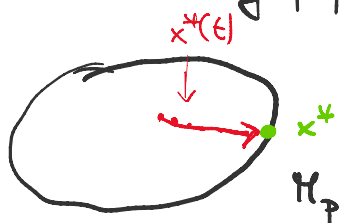
- barierová met. - jedna z metód unitorného bodu

→ konverguje k x^* "úť mŕtra"

- vŕŕky ŕiastŕne $x^*(t)$ sŕ mŕtri
mnoŕiny prŕ. rieŕeni



$n=2$



vŕŕbecne: ŕaŕda' $f_i(x) \leq 0$: vlastnŕ bariera

: ŕaŕŕne $Ax=b \rightarrow$ na rieŕenie pomocnŕjŕ vŕŕok

poŕiŕŕame N.H. na ŕezanie na rovnostŕ

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ f_i(x) \leq 0 \quad \forall i \\ Ax=b \end{array} \right\} (P) \Rightarrow f(x) + \sum_{i=1}^m B_t(f_i(x)) =$$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^m -\frac{1}{t} \ln(-f_i(x)) =$$

$$= f(x) - \underbrace{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^m \ln(-f_i(x))}_{\frac{1}{t} \Phi(x)}, \quad \Phi(x) = - \sum_{i=1}^m \ln(-f_i(x))$$

Φ - logaritmicke bariera

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \frac{1}{t} \Phi(x) \\ Ax=b \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} t f(x) + \Phi(x) \\ Ax=b \end{array} \right\} (U_t)$$

• $x^*(t)$: opt. rieŕ. $(U_t) \rightarrow f_i(x^*(t)) < 0 \quad \forall i \rightarrow$ "unifŕme" Lody" H_p
 $\Rightarrow Ax^*(t)=b$

: pre $t \rightarrow \infty$ konverguje k $x^*(t)$ k x^* : rieŕenie (P)

Barierova met.:

0.) $x^{(0)}, t_0$, zvolŕm $\mu > 1$; nastav: $\tilde{x} \leftarrow x^{(0)}$

1.) vyrieŕ $\left\{ \begin{array}{l} \min_x t f(x) + \Phi(x) \\ Ax=b \end{array} \right\} \stackrel{\text{opt.}}{=} \text{rieŕ.} : x^*(t_0)$

s poŕ. rieŕ. $\tilde{x}$

2.) $\tilde{x} \leftarrow x^*(t_0)$

$t \leftarrow \mu t$

opakuje
aŕ do
zastavenia

konverguje
ŕie
iteracie

unifŕme iteracie (unifŕme optimalitaŕia pomocou N.H.)

↳ vnútorné iterácie (vnútorná optimalizácia pomocou N.M.)

- veľmi dobre správanie - spoľahlivo nájsť (?)
 - vieme zabezčiť kvalitu
 - ($x^*(t)$ je "dostatočne dobré")
 - zastavenie po určení požadovanej kvality



QSO - CVX

$$\left\{ \begin{array}{l} \min x_1^2 + x_2^2 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{f(x)} x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 \\ x_2 - 5 + x_1^2 \leq 0 \\ -3 + (x_1 - 1)^2 - x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 1 \\ x_1 \leq 2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f(x) &= x^T A x \\ &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

DCP pravidla: $f(g(x))$ konv. ak: 1.) f - konv. , g - konv.

2.) f - konv. , g - konv.

3.) f - konv. , g - afinná ("lineárna")

+ známym známym funkciám