Domáca úloha 3

1. Naprogramujte (viacrozmernú) gradientnú metódu, teda naprogramujte funkciu, ktorej vstupmi budú:

   - f (funkcia, ktorú minimalizujeme)
   - x_0 (štartovací bod)
   - λ (fixná dĺžka kroku)

   a výstupmi:

   - x^* (lokálne minimum)
   - $f(x^*)$ (funkčná hodnota v x^*).

   Poznámky:

   - Samozrejme, môžete vychádzať z "manuálnej" verzie gradientnej metódy z hodiny (a ľubovoľne z nej môžete kopírovať).
   - Gradient počítajte numericky vnútri funkcie, neberte ho ako jeden zo vstupov.
   - Funkcie v Rku môžu mať priamočiaro ako vstup inú funkciu; funguje to rovnako ako s "normálnymi" vstupmi.

2. Aplikujte vašu funkciu z bodu 1 ako aj niektorú optimalizačnú funkciu z Rka na:

   (a) nájdenie **maxima** funkcie $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 62x + 48$ pre $x \in \mathbb{R}$,

   (b) nájdenie minima funkcie $g(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ pre $x \in \mathbb{R}^2$,

   (c) nájdenie minima funkcie

   $$h(x) = (x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 5)^2 + (x_3 + 2x_4 - 7)^2 + (2x_3 + x_4 - 5)^2$$

   pre $x \in \mathbb{R}^4$.

   V rozumnej miere analyzujte správanie vašej a Rkovskej funkcie: porovnajte získané optimálne riešenia; optimálne hodnoty účelovej funkcie; rýchlosť; konvergovanie do iných lokálnych optím. Pre vašu funkciu sa pozrite na jej správanie (rýchlosť, stabilnosť) pri rôznych hodnotách parametra λ.

Bonus (2 body): Naprogramujte funkciu ako v časti 1, akurát v každom kroku bude λ_k počítaná ako optimálna dĺžka kroku (teda λ tentokrát nebude vstupom funkcie). Teda λ_k minimalizuje funkciu

$$a(\lambda) = f(x^{(k)} - \lambda \nabla f(x^{(k)}))$$

cez všetky λ v nejakom intervale, napr. $[0, 4]$. Porovnajte správanie tejto funkcie s funkciami z bodov vyššie. (Na minimalizáciu funkcie $a(\lambda)$ môžete použiť zabudované Rkovské funkcie.)