

## 4 Náhodné premenné

**Príklad 4.1.** Hodíme hracou kockou, o ktorej predpokladáme, že nie je falošná.

**a)** Nájdite množinu  $\Omega$  vhodnú na modelovanie tejto situácie. **b)** Uvažujme pravdepodobnostný priestor  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ , kde  $\mathcal{S} = 2^\Omega$  a  $P(A) = |A|/|\Omega|$  pre  $A \subseteq \Omega$ . Nech  $X$  označuje výhru v hre, kde vyhrávame 3 zlatky ak padne 6, 2 zlatky ak padne 4 alebo 5, a prehrávame 1 zlatku ak padne 1 až 3. Formálne popíšte náhodnú premennú  $X$  a nájdite jej distribučnú funkciu. **c)** Nájdite distribučnú funkciu náhodnej premennej definovanej ako  $X(\omega) = \omega \pmod{4}$  pre všetky  $\omega \in \Omega$ .

**Príklad 4.2.** Nech  $(\Omega, \mathcal{S})$  je priestor udalostí ( $\sigma$ -algebra) a nech  $A \subseteq \Omega$ . Definujme zobrazenie  $I_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nasledovne:  $I_A(\omega) = 1$  pre všetky  $\omega \in A$  a  $I_A(\omega) = 0$  pre všetky  $\omega \in \Omega \setminus A$ . (Zobrazenie  $I_A$  nazývame indikátorom množiny  $A$ .) Potom  $I_A$  je náhodná premenná na tomto priestore vtedy a len vtedy, keď  $A \in \mathcal{S}$ . Dokážte!

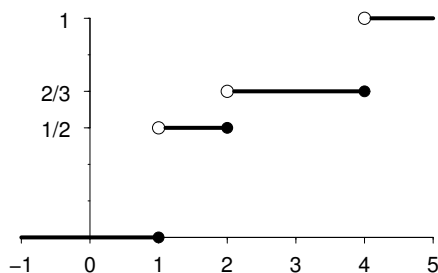
**Príklad 4.3.** Drevenú kocku natrieme zo všetkých strán modrou farbou a potom ju rozpílime na 27 kociek identickej veľkosti. Z týchto kociek náhodne vyberieme jednu (každú s pravdepodobnosťou  $1/27$ ). Nech  $X$  znamená, koľko stien vybratej kocky je zafarbených na modro. Pre náhodnú premennú  $X$  načrtnite distribučnú funkciu a nájdite  $E(X)$ .

**Príklad 4.4.** Na začiatku je v urne jedna biela loptička a jedna čierna loptička. Opakovane z urny vyberáme loptičku, pričom dodržiavame tento postup: Ak je vybratá loptička čierna, tak do urny túto čiernu loptičku vrátíme, spolu s ňou do urny pridáme jednu bielu loptičku a opäť ťaháme. Ak je vybratá loptička biela tak skončíme. Nech  $X$  znamená počet výberov loptičky (vrátane vytiahnutia prvej bielej). Nájdite strednú hodnotu premennej  $X$  (Môžete využiť  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ ).

### Príklady na precvičenie

**Príklad 4.5.** Hodíme trikrát vyváženou mincou. Uvažujme pravdepodobnostný priestor  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ , kde  $\mathcal{S} = 2^\Omega$  a  $P(A) = |A|/|\Omega|$  pre  $A \subseteq \Omega$ . Nájdite množinu  $\Omega$  vhodnú na modelovanie tejto situácie, definujte náhodnú premennú  $X$ , ktorá vyjadruje rozdiel medzi počtom hláv a počtom znakov (absolútnu hodnotu) a nájdite distribučnú funkciu tejto náhodnej premennej.

**Príklad 4.6.** Presveďte sa, že na priestore  $(\Omega, 2^\Omega)$  je každé zobrazenie  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  náhodnou premennou a na priestore  $(\Omega, \{\Omega, \emptyset\})$  sú náhodnými premennými len konštantné zobrazenia. Popíšte množinu všetkých náhodných premenných na  $\sigma$ -algre  $(\Omega, \{\Omega, \{0, 1\}, \{2\}, \emptyset\})$ , kde  $\Omega = \{0, 1, 2\}$ .



Obr. 1: Distribučná funkcia z príkladu 4.7.

**Príklad 4.7.** Na Obr. 1 je zobrazená distribučná funkcia náhodnej premennej  $X$ . Nájdite rozdelenie tejto náhodnej premennej (t.j. nájdite  $P(X = k)$  pre zmysuplné  $k$ ).

**Príklad 4.8.** V nepriehľadnom vreci je 14 kusov ponožiek, z ktorých je 12 bielych a 2 sú čierne. Z vreca náhodne vyťahujeme ponožky (po jednej), až pokým nevyberieme obe čierne ponožky. Nájdite strednú hodnotu počtu ponožiek, ktoré takto z vreca vyberieme. Vieme, že  $\sum_{k=2}^{14} k(k-1) = 910$ .

**Príklad 4.9.** V urne sú loptičky s číslami  $1, 2, \dots, n$ . Náhodne vyberieme  $m$  z týchto loptičiek (systémom bez návratu). Nech  $X$  označuje minimum z čísiel na týchto  $m$  vybratých loptičkách. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej  $X$ . Ukážte, že  $E(X) = \sum_{k=1}^{n-m+1} P[X \geq k] = \frac{n+1}{m+1}$ . (Môžete použiť rovnosť:  $\sum_{j=0}^{n-m} \binom{m+j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ .)

**Príklad 4.10.** Uvažujte príklad 4.4, ale predpokladajte, že by sme do urny po každom výbere čiernej loptičky pridávali nie bielu, ale jednu čiernu loptičku. Ukážte, že v tomto prípade by stredná hodnota čakania do výberu bielej loptičky bola nekonečná.