

5 Diskrétne rozdelenia

Príklad 5.1. V predpredaji sa na koncert predalo 23 lístkov. Divák s lístkom príde na koncert s pravdepodobnosťou 0,8 a diváci sa správajú nezávisle. Nech X je náhodná premenná popisujúca počet divákov, ktorí prídu na koncert. Nájdite rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X a jej strednú hodnotu $E(X)$.

Príklad 5.2. Basketbalisti A a B hádzu na kôš v kolách. V každom kole vystrelia obaja hráči jednu strelu. Hrajú, pokiaľ sa nestane to, že jeden z nich v danom kole trafi a druhý netrafi. Basketbalista A zasiahne kôš s pravdepodobnosťou $p_A \in (0, 1)$ a basketbalista B zasiahne kôš s pravdepodobnosťou $p_B \in (0, 1)$. Náhodná premenná Z bude predstavovať počet “nerozhodných” kôl, teda všetkých kôl okrem posledného, v ktorom sa jeden trafi a druhý netrafi. Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie a strednú hodnotu náhodnej premennej Z .

Príklad 5.3. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej $Z = X + Y$, t.j. pravdepodobnosti $P[Z = k]$, ak $X, Y \sim \text{Bin}(n, p)$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0, 1)$ (môžete použiť identitu $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{2n}{k}$ pre všetky celé čísla $0 \leq k \leq 2n$).

Príklady na precvičenie

Príklad 5.4. Na začiatku hry SCRABBLE si náhodne vyberáme 7 rôznych písmeniek spomedzi 100. Z týchto 100 písmeniek je 44 samohlások. Nech X znamená počet samohlások, ktoré si vyberieme. Nájdite rozdelenie (t.j. pravdepodobnosti $P[X = k]$ pre $k = 0, \dots, 7$) a strednú hodnotu náhodnej premennej X . Výsledok stačí nechať neupravený na konkrétne číslo.

Príklad 5.5. V lotérii sa losujú 3 rôzne čísla z 13. Ak uhádneme všetky tri čísla, tak vyhráme 1000 (jednotiek bližšie nešpecifikovanej meny), ak uhádneme dve čísla, vyhráme 100 a ak uhádneme jedno číslo, vyhráme 10. Aká je stredná hodnota výhry?

Príklad 5.6. Pre potreby genetického algoritmu modelujeme “chromozóm dĺžky n ” postupnosťou n binárnych hodnôt 0 alebo 1. Nech x je chromozóm pozostávajúci z k jednotiek a $n - k$ núl. Chromozóm y vytvoríme z chromozómu x náhodnou “mutáciou”, t.j. tak, že každý bit preklopíme na opačný s pravdepodobnosťou p . **a)** Nájdite strednú hodnotu počtu bitov, v ktorých sa bude líšiť x od y ; **b)** Nájdite strednú hodnotu počtu jednotiek, ktoré bude obsahovať chromozóm y .

Príklad 5.7. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej $Z = X + Y$, t.j. pravdepodobnosti $P[Z = k]$, ak $X, Y \sim \text{Geo}(p)$, kde $p \in (0, 1)$.

Príklad 5.8. Hodíme n -krát mincou. Sériou nazveme postupnosť za sebou idúcich rovnakých výsledkov, pred a za ktorými je výsledok opačný, alebo žiadny (t.j. začiatok, alebo koniec). Napr. pri $n = 7$ obsahuje výsledok "HZZZHHH" tri série, výsledok "HZHZZHZ" 6 sérií. Nech X znamená výsledný počet sérií. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej X , t.j. hodnoty $P[X = k]$ pre $k = 1, \dots, n$. Nájdite $E(X)$ a $D(X)$.