

6 Diskrétne náhodné premenné

Príklad 6.1. Pri prenášaní binárnych dát komunikačnou linkou dochádza k zámene bitu (0 na 1 alebo 1 na 0) s pravdepodobnosťou 4×10^{-9} . Pomocou aproximácie binomického rozdelenia Poissonovym určte pravdepodobnosť, že v súbore veľkosti 10^9 bitov sa **a)** všetky bity prenesú správne; **b)** zle prenesú 2 až 4 bity.

Príklad 6.2. Do m krabíc hádzeme n loptičiek, pričom pri každom hode je pravdepodobnosť zasiahnutia každej krabice $1/m$. Nech N je náhodná veličina, ktorá znamená počet prázdnych krabíc na konci hádzania. Určte $E(N)$.

Príklad 6.3. Postupnosť čísel $(1, 2, \dots, n)$ náhodne premiešame (t.j. každá spomedzi $n!$ permutácií má rovnakú pravdepodobnosť). Nech náhodná premenná N reprezentuje počet tých čísel spomedzi $1, 2, \dots, n$, ktoré budú po premiešaní na svojom pôvodnom mieste. Nájdite $E(N)$ a $D(N)$.

Príklad 6.4. Vo vrecku máme 10 jednokorunových, 5 dvojkorunových a 2 päťkorunové mince. Z vrecka vyberieme 5 mincí (pravdepodobnosť výberu mince nezávisí na jej hodnote). Nech M znamená súčet hodnôt vybraných mincí. Nájdite $E(M)$.

Príklady na precvičenie

Príklad 6.5. Z dlhodobých štatistík je známe, že od 9:00 do 10:00 počas bežného pracovného dňa zaznamenaná náš internetový server priemerne dve požiadavky na prístup. Budeme teda predpokladať, že počet požiadaviek o prístup má počas danej hodiny Poissonove rozdelenie so strednou hodnotou 2. (Počas stabilnej prevádzky má server s veľkým počtom potenciálnych, navzájom sa nezávisle správajúcich užívateľov rozdelenie, ktoré je možné dobre aproximovať Poissonovým rozdelením.) Odhadnite pravdepodobnosť, že počas tejto hodiny sa o prístup pokúsi aspoň k užívateľov, $k = 1, 2, 3$.

Príklad 6.6. V lotérii sa losujú 4 (rôzne) čísla zo 40. Vyhráme cenu, ak uhádeme aspoň tri čísla z nami tipovaných štyroch. Pomocou aproximácie binomického rozdelenia Poissonovym napíšte odhad pravdepodobnosti, že ak sa 500 krát zúčastníme tejto lotérie, tak vyhráme cenu k -krát, pre $k = 0, 1, 2$.

Príklad 6.7. V rovine sú zakreslené rovnobežky s rozstupmi L . Na túto rovinu hodíme náhodne útvar M vytvorený z n ihlíc dĺžky $l < L$ zvarení k sebe na koncoch. a) Aká je stredná hodnota počtu priesečníkov tohoto útvaru s priamkami? b) Predpokladajme, že M je pravidelný n -uholník, $n \geq 3$, ktorého priemer je menší ako L . Aká je pravdepodobnosť, že tento útvar pretne niektorú priamku? Pomôcka: pravdepodobnosť, že jedna náhodne hodená ihla pretne niektorú priamku je $\frac{2l}{L\pi}$.

Príklad 6.8. V urne sú loptičky s číslami $1, 2, \dots, n$. Náhodne vyberieme m týchto loptičiek (bez priebežného návratu guľičiek do urny). Nech S označuje súčet čísel na týchto m vybraných loptičkách. Nájdite strednú hodnotu a disperziu náhodnej veličiny S . (Môžete použiť vzorec $\sum_{i=1}^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.)