

7 Nezávislosť náhodných premenných a korelačný koeficient

Príklad 7.1. V urne sú loptičky s číslami 1, 2, 3. Z tejto urny vyberieme (naraz, t.j. systémom bez návratu) dve loptičky s číslami X (loptička v ľavej ruke) a Y (loptička v pravej ruke). Nájdite korelačný koeficient náhodných premenných X , Y .

Príklad 7.2. Vo vrečku sú 4 kartičky, pričom na dvoch z nich je napísané číslo 1 a na zvyšných dvoch je napísané číslo 2. Z vrečka náhodne vyberieme prvú kartičku a po chvíli náhodne vyberieme druhú kartičku (pred výberom druhej kartičky prvú vybrať kartičku do vrečka nevraciamy.) Nech X znamená súčet čísel na vytiahnutých kartičkách a Y znamená rozdiel čísel na vytiahnutých kartičkách (t.j. Y je číslo na prvej kartičke mínus číslo na druhej kartičke). Zdôvodnite, prečo sú premenné X a Y závislé. Vypočítajte kovarianciu náhodných premenných X a Y .

Príklad 7.3. Na intervale $(0, 1)$ zvolíme n bodov rovnomerne náhodne a navzájom nezávisle. Uvažujme pevné $p \in (0, 1/2)$. Nech X znamená počet bodov, ktoré padnú do intervalu $(0, p)$ a nech Y znamená počet bodov, ktoré padnú do intervalu $(1 - p, 1)$. Nájdite $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $cov(X, Y)$ a korelačný koeficient náhodných premenných X a Y .

Príklady na precvičenie

Príklad 7.4. Máme dve urny, pričom v oboch sú 3 loptičky s číslami 1, 2, 3. Z urien vyberieme po jednej očíslovanej loptičke. Nech X znamená minimum z dvojice vylosovaných čísel a Y znamená maximum z vylosovanej dvojice čísel. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej X a náhodnej premennej Y . Vypočítajte korelačný koeficient premenných X a Y . (Návod na zjednodušenie riešenia: Ak U je číslo na prvej vybratej loptičke a V je číslo na druhej vybratej loptičke, tak U a V sú nezávislé a platí $XY = UV$.)

Príklad 7.5. Na intervale $(0, 1)$ zvolíme n bodov rovnomerne náhodne a navzájom nezávisle. Uvažujme pevné $p \in (1/2, 1)$ (TU nastala zmena od predošlého príkladu). Nech X znamená počet bodov, ktoré padnú do intervalu $(0, p)$ a nech Y znamená počet bodov, ktoré padnú do intervalu $(1 - p, 1)$. Nájdite $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $cov(X, Y)$ a korelačný koeficient náhodných premenných X a Y .

Príklad 7.6. Nech náhodné veličiny X, Y majú rovnakú disperziu $\sigma^2 < \infty$. **a)** Ukážte, že potom náhodné veličiny $U = X + Y$ a $V = X - Y$ majú nulovú kovarianciu; **b)** Ukážte, že náhodné veličiny $U = aX + bY$ a $V = cX + dY$ majú nulovú kovarianciu ak $ad + bc = ac + bd = 0$.