

8 Spojité náhodné premenné

Príklad 8.1. Pre distribučnú funkciu F náhodnej premennej X platí: $F(x) = x^2/2 + x + 1/2$ ak $x \in (-1, 0]$, $F(x) = -x^2/2 + x + 1/2$ ak $x \in (0, 1)$, $F(x) = 1$ ak $x \geq 1$ a $F(x) = 0$ inak. Nájdite hustotu náhodnej premennej X , $E(X)$ a $D(X)$.

Príklad 8.2. Nech náhodná premenná X má hustotu $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, kde c je konštanta. Nájdite hodnotu c . Určte distribučnú funkciu náhodnej premennej X . Nájdite hustotu náhodnej premennej $Y = 1/X$. (Predpokladáme, že $\{\omega | X(\omega) = 0\} = \emptyset$, t.j. že X nikdy nie je rovné 0.)

Príklad 8.3. Nech $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, kde $\lambda > 0$. Ukážte, že náhodná premenná $\lfloor X \rfloor$ (dolná celá časť X) má geometrické rozdelenie.

Príklady na precvičenie

Príklad 8.4. Nech X je náhodná premenná a nech pre akékoľvek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, platí $P[X = a] = 0$ a $P[X \in (a, b)] > 0$. Potom distribučná funkcia F náhodnej premennej X je bijektívne zobrazenie z $\mathbb{R}$ na interval $(0, 1)$. Dokážte!

Príklad 8.5. Nech $a, b \in \mathbb{R}$, pričom $a > 1, b > 0$. Náhodná premenná X má distribučnú funkciu $F(x) = 0$ pre $x \leq b$ a $F(x) = 1 - (b/x)^a$ pre $x > b$. Nájdite hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej X .

Príklad 8.6. Nech $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, kde $\lambda > 0$. Nájdite distribučnú funkciu, hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej $Y = e^{-X}$.

Príklad 8.7. Nech $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, kde $\lambda > 0$. Presvedčte sa, že pre každé $0 < a < b$ platí $P(X > b | X > a) = P(X > b - a)$.

Príklad 8.8. Nech X je spojitá náhodná premenná s hustotou $f(x) = e^{-|x|}/2$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Vypočítajte distribučnú funkciu a disperziu náhodnej premennej X . Nájdite hustotu náhodnej premennej $Y = X^2$.

Príklad 8.9. Bod B volíme rovnomerne náhodne na štvrtkružnici, ktorú získame ako prienik jednotkovej kružnice s prvým kvadrantom. (Presnejšie: B má súradnice $\cos(\phi)$ a $\sin(\phi)$, kde ϕ má rovnomerné rozdelenie na $(0, \pi/2)$). Nech S je obsah trojuholníka s vrcholmi $(-1, 0)$, $(1, 0)$, B . Určte distribučnú funkciu F_S , hustotu f_S a $E(S)$.

Príklad 8.10. Delo na rovine vystrelilo projektíl pod uhlom 45° voči zemi. Nevieme presnú počiatočnú rýchlosť projektílu V , iba vieme, že V má rovnomerné rozdelenie na intervale $(24, 26)m \cdot s^{-1}$. Zanedbáme odpor vzduchu a uvažujeme gravitačné zrýchlenie $10m \cdot s^{-2}$. Dá sa ukázať, že v takom prípade je dolet strely $X = V^2/10$. a) Aký je očakávaný dolet strely (t.j. určte $E(X)$)? b) Vypočítajte hustotu f_X náhodnej premennej X .