

11 Metóda maximálnej vierohodnosti

Príklad 11.1. Nech $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výber z rozdelenia $\text{Bin}(m, p)$, kde m je známe a $p \in (0, 1)$ je neznámy parameter. a) Ukážte, že $\hat{p}_n = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n X_i$ je odhad parametra p pomocou metódy maximálnej vierohodnosti.

b) Slovenské národné divadlo predáva na jedno predstavenie 100 lístkov. Počas poslednej divadelnej sezóny sa mu podarilo vypredať všetky predstavenia. Divák, ktorý si kúpil lístok, príde na predstavenie s pravdepodobnosťou $p \in (0, 1)$ bez ohľadu na predstavenie a diváci sa rozhodujú nezávisle. Šatniari spočítali na ôsmich predstaveniach, koľko divákov naozaj prišlo. Výsledky sú dané tabuľkou

predstavenie	1	2	3	4	5	6	7	8
# divákov	93	94	89	91	90	91	95	90

Odhadnite pravdepodobnosť p , že divák s lístkom príde na predstavenie SND, pomocou metódy maximálnej vierohodnosti.

Príklad 11.2. Pre odhad maximálnej vierohodnosti $\hat{p}_n = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n X_i$ z Príkladu 1(a) ukážte, že a) $E(\hat{p}_n) = p$, t.j. $\hat{p}_n$ je nevychýlený odhad parametra p ; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{p}_n) = 0$, t.j. $\{\hat{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konzistentná postupnosť odhadov parametra p .

Príklady na precvičenie

Príklad 11.3. Nech $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výber z rozdelenia $\text{Geo}(p)$, kde $p \in (0, 1)$ je neznámy parameter. Ukážte, že odhad p pomocou metódy maximálnej vierohodnosti je $\hat{p} = \frac{n}{n + \sum_{i=1}^n X_i}$.

Príklad 11.4. Nech $X_1, \dots, X_n$ sú nezávislé náhodné premenné, pričom $X_i \sim \text{Pois}(c_i \lambda)$, kde $c_i > 0$ sú známe konštanty a $\lambda > 0$ je neznámy parameter. Nájdite odhad $\hat{\lambda}_n$ parametra λ pomocou metódy maximálnej vierohodnosti. Ukážte, že $\hat{\lambda}_n$ je nevychýlený odhad λ pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 11.5. Nech $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výber z rozdelenia $N(0, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$ je neznámy parameter. Nájdite odhad $\hat{\sigma}_n^2$ parametra σ^2 pomocou metódy maximálnej vierohodnosti. Ukážte, že $\{\hat{\sigma}_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ je konzistentná postupnosť nevychýlených odhadov parametra σ^2 . Pomôcka: Pre spojité náhodné premenné nemaximalizujeme súčin pravdepodobností $\prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) \rightarrow \max_{\sigma^2}$, ale súčin hustôt $\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \rightarrow \max_{\sigma^2}$. **Riešenie:** $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$