

2 Spojité náhodné vektory

Príklad 2.1. Spojitý náhodný vektor $(X, Y)^T$ má hustotu definovanú predpisom: $f(x, y) = (1 + xy)/4$ ak $(x, y)^T \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ a $f(x, y) = 0$ inak. Nájdite hustoty náhodných premenných X a Y . Nájdite podmienenú hustotu náhodnej premennej Y za podmienky $X = x$, kde $x \in (-1, 1)$. Ukážte, že X a Y sú závislé.

Príklad 2.2. Najprv zvolíme bod X rovnomerne na $(0, 1)$ a potom zvolíme bod Y rovnomerne na úsečke $(X, 1)$ (čiže platí $0 < X < Y < 1$). Aká je pravdepodobnosť, že zo vzniknutých troch častí úsečky je možné zostaviť trojuholník?

Príklad 2.3. Dvaja kolegovia A, B prichádzajú do kancelárie autami a majú podobnú trasu cesty. Označme čas (v hodinách) od otvorenia kancelárie po príchod kolegu A (resp. B) ako X (resp. Y). Vieme, že $(X, Y)^T$ má rovnomerné rozdelenie na lichobežníku s vrcholmi $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(3/4, 1)$ a $(0, 1/4)$. **a)** Nájdite hustotu náhodnej premennej X . **b)** Nájdite podmienenú hustotu náhodnej premennej X za podmienky $Y = y$, kde $y \in (0, 1)$. **c)** Určte a zdôvodnite, či sú X a Y nezávislé.

Príklady na precvičenie

Príklad 2.4. Ukážte, že v Príklade 2.1 sú X^2 a Y^2 nezávislé náhodné premenné. (Návod: Ukážte, že $P[X^2 < a, Y^2 < b] = P[X^2 < a]P[Y^2 < b]$ pre všetky $a, b \in \mathbb{R}$.)

Príklad 2.5. Spojitý náhodný vektor $(X, Y)^T$ má hustotu: $f(x, y) = c(1 - |x| - |y|)$ pre tie $x, y \in \mathbb{R}$, pre ktoré je $|x| + |y| < 1$, a $f(x, y) = 0$ inak. Nájdite hodnotu konštanty c , rozdelenie náhodnej premennej X a pravdepodobnosť, že vektor $(X, Y)^T$ padne do štvorca $(-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)$. Nájdite podmienenú hustotu náhodnej premennej Y za podmienky $X = x$, kde $x \in (-1, 1)$. Sú náhodné premenné X a Y nezávislé?

Príklad 2.6. Spojitý náhodný vektor $(X, Y)^T$ má hustotu f danú predpisom $f(x, y) = c(x - y)$ ak $x \in (0, 1)$ a $y \in (0, x)$; a $f(x, y) = 0$ inak. Nájdite hodnotu konštanty c a marginálne hustoty náhodných premenných X a Y . Nájdite podmienenú hustotu náhodnej premennej X za podmienky $Y = y$, kde $y \in (0, 1)$. Určte $P[X + Y < 1/2]$.

Príklad 2.7. Spojitý náhodný vektor $(X, Y)^T$ má hustotu f danú predpisom $f(x, y) = c \sin(x) \sin(y)$ ak $(x, y)^T \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ a $f(x, y) = 0$ inak. Vypočítajte normalizačnú konštantu c . Popíšte distribučnú funkciu náhodného vektora $(X, Y)^T$. Nájdite distribučné funkcie a hustoty náhodných premenných X a Y . Sú náhodné premenné X a Y nezávislé?

Príklad 2.8. Nech náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)^T$ má rovnomerné rozdelenie vo vnútri m -rozmernej jednotkovej gule, t.j. hustota vektora $\mathbf{X}$ je konštantná na množine $G_m(1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i^2 < 1\}$. Nech náhodná premenná R reprezentuje euklidovu vzdialenosť $\mathbf{X}$ od bodu $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$, t.j. $R = \|\mathbf{X}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m X_i^2}$. Nájdite hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej R . (Pomôcka: Objem m -rozmernej gule s polomerom $r > 0$ je $\text{vol}(G_m(r)) = c_m r^m$, kde $c_m = 2\pi^{m/2}/(m\Gamma(m/2))$.)

Príklad 2.9. Doba činnosti systému A má rozdelenie $Exp(\lambda)$ a doba činnosti systému B má rozdelenie $Exp(\gamma)$, pričom jednotlivé systémy pracujú nezávisle. Pomocou konštánt λ, γ vyjadrite pravdepodobnosť, že systém A bude pracovať kratšie ako systém B.