

Príklad 1 (12 bodov). Máme model $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, 3$) a namerali sme hodnoty:

y_i	-2	0	1
x_i	1	2	3
z_i	2	3	4

- Určte, či je β_1 odhadnuteľné a či je $\beta_2 + \beta_3$ odhadnuteľné.
 - Ak je niektoré z (b) odhadnuteľné, vypočítajte jeho odhad.
 - Určte pre aké vektory $\mathbf{h}$ je $\mathbf{h}^T \beta$ odhadnuteľné.
- (Časti (a), (b), (c) môžete riešiť aj v inom poradí.)

Príklad 2 (10 bodov). Jednu formu geometrického rozdelenia (počet pokusov do prvého neúspechu, vrátane) vieme zapísať ako $X \sim Geo(p)$ ak

$$P(X = k|p) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

- Vyjadrite toto rozdelenie v exponenciálnej triede.
- Na základe (a) vypočítajte $E(y)$ a $D(y)$ pre $y \sim Geo(p)$.
- Máme GLM s $y_i \sim Geo(p_i)$. Nájdite kanonický link pre tento GLM.

Ak ste výsledky v (b) a (c) vyjadrili cez iné parametre, vyjadrite ich aj pomocou p (resp. p_i).

Príklad 3 (8 bodov). Máme model $y_i = e^{\theta x_i} + \varepsilon_i$, kde $\theta \in [1/10; 100]$. Vykonalí sme dve merania dané tabuľkou:

x_i	1	2
y_i	16	1/2

- Vyjadrite v čo najjednoduchšom tvare rovnicu, z ktorej vieme vypočítať MNŠ odhad parametru θ .
- Vypočítajte $\hat{\theta}$ (teda nájdite presný výraz, napr. $\hat{\theta} = \sqrt{5}$).

Vybrané vzorce:

Matice: Ak matica $\mathbf{A}$ má hodnotu r a je v tvare

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{A}_{11}$ má rozmery $r \times r$ a tiež hodnotu r , potom jedna zovšeobecnená inverzia je v tvare

$$\mathbf{A}^- = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Generalized least squares:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Y}.$$

Exp. trieda:

$$f(y|\theta, \varphi) = e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y, \varphi)}$$

$$E(y) = b'(\theta), \quad D(y) = a(\varphi)b''(\theta).$$

$\mathbf{X} \sim N(\mu, \Sigma)$ (pre n -rozmerné $\mathbf{X}$) ak

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(\Sigma)^{1/2}} e^{-\frac{(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)}{2}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$