Príklady na precvičenie

Riešenia príkladov sú zapísané veľmi skratkovito: slúžia na kontrolu, nie na "vzorovú odpoveď".

Príklad 1. Podávame 5 ľuďom 5 druhov liekov a meriame ich tlak y_i. Máme teda model $y_i = \tau_i + \mu + \varepsilon_i$ $(i = 1, \dots, 5)$, kde τ_i je vplyv $i$teho lieku a μ je intercept.

a) Zapíšte model ako $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$.

b) Je $\tau_1 - \tau_2$ odhadnuteľné? Ak áno, vypočítajte $\widehat{\tau_1 - \tau_2}$.

c) Aké $\mathbf{q}^T\tau$ (pre $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^5$) sú odhadnuteľné? Vyjadrite $\widehat{\mathbf{q}^T\tau}$ pre odhadnuteľné $\mathbf{q}^T\tau$.

d) Zodpovedajte a)-c) pre situáciu, keď každý liek podáme 2 ľuďom, teda keď máme celkovo 10 meraní.

Riešenie: a) $\mathbf{X} = (\mathbf{I}_5, \mathbf{1}_5)$, b) áno, $\widehat{\tau_1 - \tau_2} = y_1 - y_2$, c) také, že $\sum_i q_i = 0$, d)

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_5 & \mathbf{1}_5 \\ \mathbf{I}_5 & \mathbf{1}_5 \end{pmatrix},$$

$\widehat{\tau_1 - \tau_2} = \bar{y_1} - \bar{y_2}$, kde $\bar{y_i}$ je priemer ypsilonov zodpovedajúcim meraniam, v ktorých sme podali $i$ty liek; $\widehat{\mathbf{q}^T\tau}$ je odhadnuteľné ak $\sum_i q_i = 0$.

Príklad 2. Nech $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ a $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2\mathbf{W}$, kde

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a x_i, y_i sú dané tabuľkou:

x_i	-2	-1	1	2
y_i	-2	-1	3	2

Vypočítajte $\hat{\beta}$. Môžete využiť fakt, že $\mathbf{W}$ vieme blokovo invertovať:

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: $\hat{\beta} = (24/27, 31/27)^T$.

Príklad 3. Vyjadrite gama rozdelenie v exponenciálnej triede a na základe toho určte jeho strednú hodnotu a disperziu. Pri vhodnej parametrizácii platí, že $y \sim Gama(\mu, \nu)$ ak

$$f(y|\mu, \nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\nu} y^{\nu-1} \mathrm{e}^{-\frac{y\nu}{\mu}},$$

pričom μ je parameter záujmu a ν je rušivý parameter.
Riešenie: $\varphi = \nu^{-1}$ (dá sa aj priamo $\varphi = \nu$ a upraviť a, c), $\theta = -1/\mu$, $a(\varphi) = \varphi$, $b(\theta) = -\ln(-\theta)$, $c(y, \varphi) = -\ln(\Gamma(\varphi^{-1})) - \varphi^{-1}\ln(\varphi) + (\varphi^{-1} - 1)\ln(y)$. $E(y) = \mu$, $D(y) = \mu^2/\nu$.

Príklad 4. Vyjadrite inverzné gaussovské rozdelenie v exponenciálnej triede a na základe toho určte jeho strednú hodnotu a disperziu. Platí, že $y \sim IG(\mu, \lambda)$ ak

$$f(y|\mu,\nu) = \left(\frac{\lambda}{2\pi y^3}\right)^{1/2} \exp(\frac{-\lambda(y-\mu)^2}{2\mu^2 y})$$

pričom μ je parameter záujmu a λ je rušivý parameter.
Riešenie: $\theta = 1/\mu^2$, $\varphi = \lambda$ (dá sa zobrať aj $\varphi = \lambda^{-1}$ a upraviť a, c), $a(\varphi) = -2\varphi^{-1}$, $b(\theta) = 2\sqrt{\theta}$,

$$c(y,\varphi) = -\frac{\varphi}{2y} + \frac{\ln(\varphi)}{2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi y^3).$$

$E(y) = \mu$, $D(y) = \mu^3/\lambda$.

Príklad 5. Nájdite kanonický link pre GLM, kde $y_i \sim IG(\mu_i, \lambda)$. Vyjadrenie inverzného gaussovského rozdelenia v exponenciálnej triede získate z Príkladu 4.
Riešenie: $g(\mu) = 1/\mu^2$, teda link: $\mu_i = 1/\sqrt{\mathbf{x}_i^T\beta}$.

Príklad 6. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická a nech $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ a $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ pre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Vypočítajte

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T}, \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{x}^T}.$$

Riešenie:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{A}, \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{x}^T} = 2\mathbf{A}.$$

Príklad 7. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3z_1^2 \\ \vdots \\ 3z_m^2 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Vypočítajte

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T}.$$

Riešenie: $6\text{diag}(\mathbf{A}\mathbf{x})\mathbf{A}$.

Príklad 8. Uvažujte model

$$y_i = \ln(\theta x_i) + \varepsilon_i$$

pre $\theta \in [1, \infty)$, pričom merania sú dané tabuľkou:

x_i	1	3
y_i	2	4

a) Vypočítajte $\hat{\theta}$.

b) Situáciu vykreslite. Teda vykreslite $\mathcal{S}$, $\mathbf{y}$, $\eta(\hat{\theta})$, $\mathbf{y} - \eta(\hat{\theta})$, $\mathcal{L}(\hat{\theta})$ a $\mathcal{R}(\hat{\theta})$.

c) Určte, či sa z modelu dá vhodnou reparametrizáciou (substitúciou v parametroch, a prípadne aj v x alebo y) spraviť lineárny model. Ak áno, nájdite $\hat{\theta}$ pomocou lineárneho modelu. Ako súvisí odpoveď na túto otázku s obrázkom (b)?

Riešenie: a) $\hat{\theta} = \exp((6 - \ln 3)/2)$, c) Áno, príslušný model je $y_i^* = \beta + \varepsilon_i$, kde $\beta = \ln(\theta)$ a $y_i^* = y_i - \ln(x_i)$. $\hat{\beta} = (6 - \ln 3)/2$ a teda $\hat{\theta}$ je (pochopiteľne) rovnaká ako v (a).

Príklad 9. Máme model

$$y_i = \frac{\theta_1}{\theta_2 + x_i} + \varepsilon_i$$

a namerali sme:

x_i	1	1	5	10	10
y_i	7	6	4	1	3

Vypočítajte $\mathbf{M}(\theta)$ a vyjadrite ju aj pomocou $\sum_{x\in\mathfrak{X}}$.
Riešenie: $\mathbf{M}(\theta) = \mathbf{A}(1,\theta) + \mathbf{A}(5,\theta) + \mathbf{A}(5,\theta) + \mathbf{A}(10,\theta) + \mathbf{A}(10,\theta)$, kde

$$\mathbf{A}(x,\theta) = \begin{bmatrix} (\theta_2 + x)^{-2} & -\theta_1(\theta_2 + x)^{-3} \\ -\theta_1(\theta_2 + x)^{-3} & \theta_1^2(\theta_2 + x)^{-4}. \end{bmatrix}$$

Pomocou $\sum_{x\in\mathfrak{X}}$: $\mathbf{M}(\theta) = \mathbf{A}(1,\theta) + 2\mathbf{A}(5,\theta) + 2\mathbf{A}(10,\theta) = \sum_{x\in\mathfrak{X}} n(x)\mathbf{A}(x,\theta)$, teda $\mathfrak{X} = \{1, 5, 10\}$, $n(1) = 1$, $n(5) = 2$ a $n(10) = 2$.