

1 Kombinatorická a geometrická pravdepodobnosť

Príklad 1.1. Hodíme súčasne dvomi kockami. Vypočítajte pravdepodobnosť, že **a)** Na prvej kocke padne aspoň o dve bodky viac ako na druhej; **b)** Absolútna hodnota rozdielu bodov na kockách bude 0,1,2, alebo 3; **c)** Počet bodiek na druhej kocke bude celočíselným násobkom počtu bodiek na prvej kocke (t.j. výsledky budú napríklad (1, 5), (2, 2), (2, 4) a podobne).

Príklad 1.2. Hodíme súčasne desiatimi mincami. Vypočítajte pravdepodobnosť, že **a)** na piatich minciach padne znak; **b)** znak padne najviac na troch minciach.

Príklad 1.3. Máme balíček 32 sedmových kariet, ktorý náhodne premiešame. Určte pravdepodobnosť, že **a)** Na vrchu balíčka bude postupne srdcové, žaluďové, guľové a listové eso; **b)** Vrchné 4 karty balíčka budú všetky menšie ako desiatka.

Príklad 1.4. Na 10 bielych a 20 červených tanierikov sme umiestnili náhodne 10 bielych a 20 červených šálok. Aká je pravdepodobnosť, že 5 bielych šálok bude na bielom tanieriku?

Príklad 1.5. V nepriehľadnom vrecku máme 12 lístkov očíslovaných 1, ..., 12. Z týchto lístkov náhodne vyberieme tri. Vypočítajte pravdepodobnosť, že najväčšie z vybratých čísel bude rovné 9.

Príklad 1.6. V urne máme a bielych a b čiernych guľôčok. Ťaháme dvakrát za sebou jednu guľôčku. Aká je pravdepodobnosť, že **a)** obidve guľôčky sú biele; **b)** aspoň jedna z vytiahnutých guľôčok je biela. Príklad vyriešte za predpokladu, že prvú vytiahnutú guľôčku už do urny nevraciam aj za predpokladu, že po prvom ťahu vrátime guľôčku naspäť do urny.

Príklad 1.7. V nepriehľadnom vrecku máme 10 lístkov, z ktorých sú 3 čierne a 7 je bielych. Z vrečka postupne vyberieme všetky lístky, pričom ich budeme ukladať vedľa seba v takom poradí, v akom sme ich vyberali. Určte pravdepodobnosť toho, že všetky tri čierne lístky budú vedľa seba.

Príklad 1.8. Dvaja kolegovia A a B prídu do spoločnej kancelárie medzi ôsmou a štrnástou hodinou. (Predpokladáme, že A a B prichádzajú nezávisle na sebe a príchod každého z nich je rovnako pravdepodobný počas celého šesťhodinového intervalu.) Vieme, že A sa zdrží v kancelárii 1 hodinu a B sa zdrží 2 hodiny. Určte pravdepodobnosť, že B príde neskôr ako A, a zároveň sa A a B stretnú.

Príklad 1.9. V intervale $(0, 2)$ zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne dve čísla x, y . Nájdite pravdepodobnosť, že **a)** $x + y < 2$; **b)** $x + y > 1$; **c)** $xy < 1$.

Príklad 1.10. Na jednotkovej kružnici v rovine zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri body, pomocou ktorých zostrojíme trojuholník. Vypočítajte pravdepodobnosť, že vzniknutý trojuholník bude ostrouhlý.

Príklad 1.11. V intervale $(0, 1)$ zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri čísla x, y, z . Nájdite pravdepodobnosť, že súčet týchto troch čísel bude menší ako 1.

Príklady na precvičenie

Príklad 1.12. Hodíme súčasne dvomi kockami. Vypočítajte pravdepodobnosť, že
a) Na oboch kockách padne rovnaký počet bodiek; **b)** Na prvej kocke padne viac bodiek ako na druhej.

Príklad 1.13. Vo vreku máme 24 guľčiek, z toho 5 bielych, 8 modrých a 11 červených. Z vreka vyberieme naraz 3 guľčky (t.j. spôsobom "bez návratu"). Určte pravdepodobnosť, že **a)** Všetky 3 budú biele; **b)** Dve budú červené a jedna bude modrá.

Príklad 1.14. Hodíme súčasne desiatimi mincami. Vypočítajte pravdepodobnosť, že znak padne najmenej na štyroch a najviac na šiestich minciach.

Príklad 1.15. Máme balíček 32 sedmových kariet, ktorý náhodne premiešame. Určte pravdepodobnosť, že **a)** Vrchné štyri karty balíčka budú mať rovnakú výšku (t.j. všetky budú sedmičky, alebo všetky budú osmičky a podobne); **b)** Medzi vrchnými šiestimi kartami budú presne dve esá (a štyri karty iné ako eso).

Príklad 1.16. V nepriehľadnom vreku máme kartičky s číslami $0, 1, 2, \dots, 9$. Z vreka náhodne vyberieme štyri kartičky a uložíme ich vedľa seba v takom poradí, v akom sme kartičky ťahali. Nájdite pravdepodobnosť, že **a)** dostaneme číslo 2021; **b)** dostaneme číslo väčšie ako 2000; **c)** dostaneme číslo väčšie ako 2500; **d)** to bude párne číslo; **e)** to bude číslo deliteľné dvadsiatimi.

Príklad 1.17. V hre LOTO sa losuje 5 čísiel z 35. Vyhrávame cenu v I. poradí, ak vylosujú všetkých 5 nami tipovaných čísiel, v II. poradí ak uhádneme 4 čísla a v III. poradí ak uhádneme 3 čísla. Vypočítajte pravdepodobnosti výhier v jednotlivých poradiach.

Príklad 1.18. V nepriehľadnom vreku máme 12 lístkov očíslovaných $1, \dots, 12$. Z týchto lístkov náhodne vyberieme tri. Vypočítajte pravdepodobnosť, že **a)** najväčšie z vybraných čísel bude menšie ako 9; **b)** najmenšie z vybraných čísel bude 4.

Príklad 1.19. V príklade 1.13 **a)** určte pravdepodobnosť, že všetky tri guľičky budú rôznej farby. **b)** Aká je pravdepodobnosť, že medzi desiatimi náhodne vybratými guľičkami budú 3 biele, 3 modré a 4 červené?

Príklad 1.20. V príklade 1.8 určte pravdepodobnosť, že **a)** A odíde z kancelárie skôr ako B; **b)** A príde do kancelárie neskôr ako B ale súčasne odíde z kancelárie skôr ako B.

Príklad 1.21. Na úsečke dĺžky 1 zvolíme rovnomerne náhodne dva body, ktoré nám rozbijú danú úsečku na tri segmenty. Nájdite pravdepodobnosť, že **a)** zo vzniknutých segmentov bude možné zložiť trojuholník; **b)** najkratší vzniknutý segment bude menší ako $1/4$; **c)** najdlhší vzniknutý segment bude väčší ako $1/2$.

Príklad 1.22. Pravouhlá mriežka pozostáva z dvoch navzájom kolmých sústav rovnobežných priamok s rozstupom 2. Na túto rovinu hodíme kruh s priemerom 1. Vypočítajte pravdepodobnosť, že tento kruh **a)** prekryje niektorú z priamok; **b)** prekryje niektorý z priesečníkov priamok?