1. Úvod

Na začiatok by bolo načim ako-tak vymedziť, čím sa nelineárna analýza zaoberá. Čitateľ by už mal však mať dostatok skúseností, aby vedel, že je to dosť ťažké u ľubovoľnej matematickej disciplíny. U nelineárnej analýzy je to o to ťažšie, že na rozdiel povedzme od geometrie či integrálneho počtu ide o disciplínu, ktorá sa ako-tak sformovala v svojej súčasnej polohe až v druhej polovici tohoto storočia.

Predsa však sa dá povedať, že nelineárna analýza sa točí okolo riešenia rovníc vo viacrozmerných a nekonečnorozmerných priestoroch. A ako nasvedčuje jej názov, pôjde o rovnice nelineárne.

Presnejšie povedané, základnú otázku nelineárnej analýzy možno postaviť takto:

Nech X, Z sú konečno- alebo nekonečnorozmerné priestory, $U \subset X$, $F : U \to Z$ a $z \in Z$. Ako vyzerá $F^{-1}(z)$?

Ako príklad si vezmime najjednoduchšiu verziu vety o implicitnej funkcii.

Nech $X = \mathbb{R}^2$, $Z = \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, U je okolie bodu (x_0, y_0) a $F : U \to Z$ je C^r-diferencovateľná. $F(x_0, y_0) = z_0$, $\partial F/\partial y(x_0, y_0) \neq 0$. Potom, (voľne povedané), lokálne v okolí bodu (x_0, y_0) "možno z implicitnej rovnice $F(x, y) = z_0$ premennú y vyjadriť ako jednoznačnú C^r funkciu $y = \varphi(x)$", t.j. lokálne $F(x, y) = z_0$ platí práve vtedy, ak $y = \varphi(x)$.

Veľmi často má otázka štruktúry množiny riešení rovnice $F(x) = z$ podobu otázky závislosti riešení rovnice na parametroch. V takomto prípade je $X = Y \times P$, kde P chápeme ako priestor parametrov úlohy. Pýtame sa na závislosť riešenia od parametrov: ak poznáme riešenie pre istú hodnotu $p = p_0$, čo sa s ním stane, ak zmeníme p?

V aplikáciách rovnice spravidla predstavujú ustálené stavy nejakej dynamiky. Napríklad môže ísť o tyč, na ktorej os pôsobíme tlakom. Za priestor riešení môžeme považovať funkciu, ktorá dĺžkovej súradnici tyče priraďuje jej priečnu výchylku, za parameter môžeme vziať silu, ktorou tyč stláčame. Pre malé hodnoty parametra - sily, bude jediným riešením funkcia identicky rovná nule (a teda malá zmena parametra neovplyvní riešenie). Pri istej medznej hodnote parametra však tyč z priamej polohy vybočí a nie je zrejmé, na ktorú stranu. Hovoríme, že príde k vetveniu, bifurkácii riešení.

2. Diferenciálny počet v Banachových priestoroch

Príklad vety o implicitnej funkcii napovedá, že sotva bude možné niečo o množine riešení rovnice $F(x) = z$ povedať, ak sa nebude od nej žiadať nejaký stupeň regularity. Všeobecne povedané, čím regulárnejšia (hladšia) je funkcia F, tým jemnejšie môžu byť naše výpovede o štruktúre množiny riešení. Pretože vo všeobecnosti nám pôjde o rovnice v Banachových priestoroch, potrebujeme v nich najprv zaviesť derivácie a naučiť sa s nimi pracovať.

2.1 Derivácia v smere

Kým v prípade funkcie jednej premennej je definícia derivácie bez nejasností a stotožňuje sa s diferenciálom, už v prípade z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$ (teda reálnej funkcie dvoch reálnych premenných) sa definujú prinajmenej dva pojmy, ktoré s diferencovaním súvisia - parciálne derivácie, (úplný) diferenciál. Tieto pojmy sa zväzujú tajomnou formulou

$$df = (\partial f/\partial x_1)dx_1 + (\partial f/\partial x_2)dx_2.$$

Túto tajomnú formulu samozrejme možno rozšíriť na funkcie z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$ (teda n reálnych funkcií s m premennými). Čo však s funkciami na nekonečnorozmerných priestoroch?

Pripomeňme si však, že parciálne derivácie na $\partial f/\partial x_i(x)$ je vlastne derivácia funkcie jednej premennej, ktorá vznikne zúžením funkcie f na rovnobežku s osou x_i cez bod x, teda funkcie

$$\varphi(t) = f(x + te_i),$$

kde e_i je i-tý jednotkový súradnicový vektor. Z geometrického hľadiska však niet nijakého dôvodu privilegovať súradnicové osi - analogicky môžeme derivovať funkciu, ktorá vznikne zúžením funkcie na ľubovoľnú priamku cez bod x. Vyjadrením toho je pojem derivácie v smere:

2.1.1. Definícia. Nech X, Y sú Banachove priestory, $U \subset X$ je otvorená a $F : U \to Y$. Nech $x \in U$ a $h \in X$. Ak existuje limita

$$\lim_{\vartheta \to 0} \frac{1}{\vartheta} \left[F(x + \vartheta h) - F(x) \right],$$

nazývame ju *deriváciou funkcie F v bode x v smere h* a označujeme ju $\partial_h F(x)$.

2.1.2. Poznámka. Ak $X = \mathbb{R}^m$, potom zrejme

$$\partial_{e_i} F(x) = \partial F/\partial x_i(x).$$

2.1.3. Aplikácia. Derivácie v smere hrajú významnú úlohu pri odvodzovaní nutných podmienok pre lokálne extrémy reálnych funkcií na konečnorozmerných a Banachových priestoroch v prítomnosti ohraničení.

Nech $F : X \to \mathbb{R}$, kde X je Hilbertov priestor a nech $K = \{x \in X :< a_i, x >\leq b_i\ , i = 1, \ldots, n\}$, kde $< .,. >$ je skalárny súčin, $a_i \in X$ a $b_i \in \mathbb{R}$ sú dané. Nech $\hat{x} \in K$ je taký bod, že

$$F(\hat{x}) = \min_{x \in K} F(x).$$

Potom hodnota F zrejme nemôže klesať pozdĺž nijakej polpriamky cez bod $\hat{x}$, ktorá v blízkosti bodu $\hat{x}$ leží v množine K. To vedie k podmienke $\partial_h F(\hat{x}) \leq 0$ pre každé h také, že $\partial_h F(\hat{x})$ existuje a $< a_i, h >\leq 0$ pre všetky $i \in I(\hat{x}) = \{i :< a_i, \hat{x} >= b_i\}$. Ak sa starostlivo do dôsledkov využijú tieto podmienky minima, dostane sa spravidla formálne dostatok podmienok na jeho určenie (koľko neznámych, toľko rovníc).

2.1.4 Cvičenia.

1. Dokážte, že $h \mapsto \partial_h F(x)$ je homogénna v h.
2. Dokážte tvrdenie 2.1.3.
3. Nech $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a nech $\hat{x}$ je lokálne minimum funkcie F. Odvoďte z 2.1.3 známe nutné podmienky minima $\partial F/\partial x_i(\hat{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

4. Nech $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a nech F je diferencovateľná v bode $x \in \mathbb{R}^m$. Dokážte, že platí

$$\partial_h F(x) = \partial F/\partial x_1(x)h_1 + \cdots + \partial F/\partial_{x_m}(x)h_m.$$

5. Nech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ je diferencovateľná. Definujme $F : C[0,1] \to C[0,1]$ predpisom

$$F(\varphi)(x) = f(x, \varphi(x)) \tag{2.1}$$

Zobrazenie F nazývame Nemyckého operátorom generovaným funkciou f. Dokážte, že

$$\partial_h F(\varphi)(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))h(x).$$

6. Dokážte, že rovnaká formula ako v cvičení 5. platí aj vtedy, ak F chápeme ako zobrazenie $L^p[0,1] \to L^p[0,1]$, $p \geq 1$.

2.2 Gâteauxov diferenciál

Nech $F : U \to Y$, kde $U \subset X$ a X, Y sú Banachove priestory. Predpokladajme, že pre $x \in U$ existuje $\partial_h F(x)$ pre každé h. Podľa cvičenia 2.1.4.1. je $\partial_h F(x)$ homogénnou funkciou h. Ak je navyše aditívnou funkciou h, potom je lineárna v h.

2.2.1. Definícia. Ak je zobrazenie $h \mapsto \partial_h F(x)$ lineárne a ohraničené, potom ho nazývame Gâteauxovým diferenciálom funkcie F v bode x a označujeme ho $dF(x)$. Gâteauxov (G-) diferenciál je teda definovaný predpisom

$$dF(x)h = \partial_h F(x) \qquad \text{pre } h \in X \tag{2.2}$$

2.2.2. Poznámky.

1. Gâteauxov diferenciál je prvkom priestoru $L(X,Y)$ ohraničených lineárnych operátorov z X do Y.

2. Ak je $\dim X < \infty$, netreba ohraničenosť operátora $h \mapsto \partial_h F(\hat{x})$ osobitne predpokladať, vyplýva totiž z linearity.

3. G-diferenciál budeme nazývať tiež G-deriváciou a nebudeme medzi týmito pojmami robiť rozdiel.

4. Mystickej formule

$$dF(x) = \partial F/\partial x_1(x)dx_1 + \cdots + \partial F/\partial x_n(x)dx_n$$

možno teraz dať zmysel rovnosti diferenciálov, pričom dx_i chápeme ako diferenciál zobrazenia, ktoré bodu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ priraďuje jeho i-tú zložku x_i.

5. Nech $F : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ a nech F je diferencovateľná v bode $x \in U$. Potom matica G-diferenciálu F v bode x je

$$dF(x) = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x_1(x) & \ldots & \partial F_1/\partial x_m(x) \\ & \ldots & \\ \partial F_n/\partial x_1(x) & \ldots & \partial F_n/\partial x_m(x) \end{pmatrix}.$$

Takto možno ľavú stranu (2.2) chápať ako násobenie vektora h maticou $dF(\hat{x})$.

2.2.3. Cvičenia.

1. Nájdite príklad spojitej funkcie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, ktorá má v nejakom bode derivácie vo všetkých smeroch, nie je však v ňom G-diferencovateľná.

2. Dokážte tvrdenia poznámok 2.2.2.4 a 2.2.2.5.

3. Za predpokladov cvičení 2.1.4.5 a 2.1.4.6 dokážte, že F je G-diferencovateľná (či už ako zobrazenie $C[0,1] \to C[0,1]$, alebo $L^p(0,1) \to L^p(0,1),\ p \geq 1$) a že platí

$$[dF(\varphi)h](x) = \partial f/\partial y(x, \varphi(x))h(x).$$

4. Ak je funkcia v nejakom bode G-diferencovateľná, je v ňom aj spojitá?

2.3. Fréchetov diferenciál

Definičnú rovnicu (2.2) pre Gâteauxov diferenciál môžeme prepísať aj v tvare

$$F(x + \vartheta h) = F(x) + \vartheta[dF(x)h + \omega(h, \vartheta)] \tag{2.3}$$

kde

$$\lim_{\vartheta \to 0} \omega(h, \vartheta) = 0 \tag{2.4}$$

pre každé pevné h. Vzťahy (2.3), (2.4) môžeme interpretovať tak, že G-diferenciál je najlepšou lineárnou aproximáciou ("lokálnou linearizáciou") funkcie F v bode x. To umožňuje všeličo usúdiť o správaní sa funkcie F v okolí bodu x zo správania jej G-diferenciálu. Je to dôležité preto, že lineárne zobrazenia sa vyšetrujú oveľa pohodlnejšie.

Skúsenosť však ukazuje, že tesnosť priblíženia F jej linearizáciou v zmysle (2.2) - (232) nie je pre takéto účely dostatočná. Preto sa zavádza pojem Fréchetovho diferenciálu.

2.3.1. Definícia. Nech X, Y sú Banachove priestory, $U \subset X$ je otvorená, $F : U \to Y$ a $x \in U$. Hovoríme, že zobrazenie F je Fréchetovsky diferencovateľnáv bode x, ak existuje lineárny ohraničený operátor $DF(x)$ (nazývaný Fréchetovým (F-) diferenciálom) taký, že

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{1}{|h|}[F(x+h) - F(x) - DF(x)h] = 0$$

2.3.2. Poznámky.

1. Aj v prípade Fréchetovho diferenciálu budeme alternatívne používať termín Fréchetova (F-) derivácia. Pokiaľ vynecháme prívlastok, budeme vždy mať na mysli F-diferenciál.

2. Diferenciál, ako sa definuje v diferenciálnom počte je Fréchetov diferenciál.

3. Ak existuje Fréchetov diferenciál, potom je rovný Gâteauxovmu (a preto je jediný). Gâteauxov diferenciál je Fréchetovým vtedy, ak je konvergencia v (8.2) rovnomerná vzhľadom na h, spĺňajúce $|h| \leq 1$.

4. G-diferenciál budeme dôsledne značiť písmenom d, F-diferenciál zasa písmenom D; upozorňujeme však, že táto konvencia nie je všeobecne prijatá a značenia sú všakovaké.

V teórii a aplikáciách sa pracuje takmer výlučne s F-diferenciálom. Zmysel G-diferenciálu je v tom, že jeho definícia je na rozdiel od F-diferenciálu konštruktívna a je ho možné počítať aj pri zobrazení z nekonečnorozmerných priestorov, ako napr. v cvičení 2.2.3.3. Kedy je G-diferenciál aj F-diferenciálom, o tom hovorí nasledujúca veta:

2.3.3. Veta. *Nech X, Y sú Banachove priestory , $U \subset X$ otvorená $F : U \to Y$ a $x \in U$. Ak F je G-diferencovateľná a dF je spojitý v okolí V bodu x (ako zobrazenie $V \to L(X,Y)$), potom F je v bode x F-diferencovateľná.*

K dôkazu tejto vety nám poslúži nasledujúca lema, ktorú budeme aj v ďalšom často používať.

2.3.4. Lema (Hadamardova). *Nech F spĺňa predpoklady vety. Ak $x + \vartheta h \in U$ pre $0 \le \vartheta \le 1$, potom platí*

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_0^1 dF(x+\vartheta h) h d\vartheta \\ (&= \left[\int_0^1 dF(x+\vartheta h) d\vartheta \right] h) \end{aligned} \tag{2.5}$$

kde integrál chápeme ako Riemannov.

Dôkaz. Označíme

$$\varphi(\vartheta) = F(x+\vartheta h).$$

Potom $\varphi : [0,1] \to Y$ je diferencovateľná. Podľa Newtonovej-Leibnizovej formuly platí

$$F(x+h) - F(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(\vartheta) d\vartheta.$$

Priamo z definícií 2.1.1 a 2.2.1 však dostávame

$$\varphi'(\vartheta) = \partial_h F(x+\vartheta h) = dF(x+\vartheta h)h,$$

z čoho vyplýva (2.5). $\square$

2.3.5 Poznámka. Ak $\dim Y > 1$, neplatí vo všeobecnosti veta o strednej hodnote diferenciálneho počtu - $F(x+h) - F(x) = dF(x+\hat{\vartheta}h)h$ nemusí platiť pre nijaké $0 \le \hat{\vartheta} \le 1$. Nahradzuje ju Hadamardova lema.

Dôkaz vety 2.3.3. Predpoklad spojitosti dF značí, že k zvolenému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že ak $k \in X$, $|k| \le \delta$, potom $F(x+k) \in U$ a platí

$$|dF(x+k) - dF(x)| \le \varepsilon$$

alebo, v zmysle definície normy lineárneho operátora,

$$|(dF(x+k) - dF(x))h| \le \varepsilon |h| \tag{2.6}$$

pre každé $h \in X$.

Nech teraz $|h| \le \delta$. Podľa Lemy 2.3.4 a (2.6) platí

$$|F(x+h) - F(x) - dF(x)h| = |\int_0^1 dF(x+\vartheta h) d\vartheta h - dF(x)h| =$$

$$= |\int_0^1 [dF(x+\vartheta h) - dF(x)] h d\vartheta| \le \left[\int_0^1 |(dF(x+\vartheta h) - dF(x))| d\vartheta \right] |h| \le \varepsilon |h|$$

To dokazuje vetu. $\square$

2.3.6 Príklad. Veta 2.3.3 nám umožňuje počítať F-diferenciál zobrazenia F na nekonečnorozmernom priestore v danom bode takto:

1. Vypočítame derivácie v smeroch v bodoch nejakého okolia U bodu x_0.
2. Overíme, že $h \mapsto \partial_h F(x)$ je prvkom priestoru $L(X,Y)$ pre všetky $x \in U$ (a teda funkcia je G-diferencovateľná v U).
3. Overíme, že G-diferenciál dF je spojitý na U.

Postup si ukážeme na prípade derivácie Nemyckého operátora z Cvičení 2.1.4.5, 2.2.3.3. Dokážeme, že ak je funkcia f spojito diferencovateľná, potom je G-diferenciál jej Nemyckého operátora z $C[0,1]$ do $C[0,1]$ z Cvičenia 2.2.3.3 jeho F-diferenciálom.

Kroky 1, 2 sú predmetom spomínaných cvičení. Vykonáme teda krok 3. Označme $\|\cdot\|$ normu v $C[0,1]$. Treba dokázať, že pre ľubovoľnú funkciu $u \in C[0,1]$ a ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že ak $v \in C[0,1]$, $\|u-v\| < \delta$, potom pre každé $h \in C[0,1]$ platí

$$\| \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, u(\cdot)) - \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, v(\cdot)) \right] h(\cdot) \| \leq \varepsilon \|h\|,$$

t.j.

$$\sup_{x\in[0,1]} | \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, v(x)) \right] h(x)| \leq \varepsilon \sup_{x\in[0,1]} |h(x)|. \tag{2.7}$$

Nerovnosť $\|u-v\| < \delta$ značí $|u(x)-v(x)| < \delta$ pre každé $x \in [0,1]$. Podľa predpokladu je $\partial f/\partial y$ spojitá, a teda je aj rovnomerne spojitá na každej kompaktnej množine. Preto existuje také $\delta > 0$, že

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, v(x))| < \varepsilon$$

pre každé $x \in [0,1]$. Pre toto δ zrejme platí aj (2.7).

2.3.7 Varovanie. Tvrdenie z Príkladu 2.3.6 vo všeobecnosti neplatí, ak F chápeme ako zobrazenie z $L^2[0,1]$ do $L^2[0,1]$. Dá sa dokázať, že $F : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ daná predpisom (2.1) je diferencovateľná práve vtedy, ak f je afinná v y, t.j.

$$f(x,y) = a(x) + b(x)y.$$

Pri výpočte derivácie možno často využiť nasledovnú vetu o derivácii kompozície zobrazení.

2.3.8 Veta. *Nech X, Y, Z sú B-priestory a nech $U \subset X$, $V \subset Y$ sú otvorené, $F : U \to Y$, $G : V \to Z$. Nech $F(x) \in V$ a nech F, G sú (F-)diferencovateľné v bode x resp. $F(x)$. Potom funkcia $G \circ F$ je (F-)diferencovateľná v bode x a platí*

$$D(G \circ F)(x) = DG(F(x))DF(x). \tag{2.8}$$

Dôkaz tejto vety je takmer doslovným prepisom zodpovedajúcej vety z elementárneho diferenciálneho počtu a preto ho prenechávame na čitateľa.

2.3.9 Cvičenia.

1. Zostrojte reálnu funkciu dvoch premenných, ktorá je v nejakom bode spojitá a G-, ale nie F-diferencovateľná.
2. Dokážte tvrdenie z 2.3.7.
3. Dokážte detailne Vetu 2.3.8.
3. Dokážte, že ak F je v bode x F-diferencovateľná, potom je v ňom aj spojitá.
4. Platí Veta 2.3.8 aj pre G-diferenciály?
5. Dokážte, že ak existuje F-diferenciál, potom je jediný.

2.4. Multilineárne zobrazenia

Ako definovať vyššie derivácie funkcií na Banachových priestoroch?

V prípade funkcie jednej reálnej premennej niet problémov: ak $F : X \to Y$ je diferencovateľná a $X = \mathbb{R}$, potom $x \to DF(x)$ je opäť funkcia jednej reálnej premennej a má zmysel hovoriť o jej derivácii. To je preto, že priestor lineárnych operátorov $L(X,Y)$ je izomorfný priestoru X, ak $X = \mathbb{R}$. Akonáhle však $\dim X > 1$, potom to nie je pravda. Ak $F : U \to Y$ je diferencovateľná a $U \subset X$, potom $DF : U \to L(X,Y)$. Ak chceme hovoriť o druhej derivácii funkcie F, teda o derivácii jej derivácie, ide o deriváciu funkcie s hodnotami v priestore $L(X,Y)$, teda v úplne inom priestore, než je Y.

To je samozrejme možné, ukazuje sa však užitočným chápať aj vyššie derivácie funkcií z X do Y ako funkcie s hodnotami v tom istom priestore Y.

To je možné takto: Ak $DF : X \to L(X,Y)$, potom $D^2F(x) = D(DF)(x) \in L(X, L(X,Y))$. Ak $P \in L(X, L(X,Y))$ potom pre zvolené $h \in X$ je $Q = Ph \in L(X,Y)$. Pre zvolené $k \in X$ je

$$Qk = (Ph)k \in Y. \tag{2.9}$$

Každé zobrazenie $P \in L(X,(X.Y))$ teda predpisom (2.9) môžeme stotožniť s istým zobrazením z $X \times X$ do Y. Toto zobrazenie je zrejme *bilineárne*, t.j. pri pevnej hodnote jednej z premenných je lineárne v druhej z nich.

Nie je už ťažko si predstaviť, že takto možno pokračovať k vyšším deriváciám. Vedie k zobrazeniam viacerých premenných, ktoré sú lineárne v každej z nich - k multilineárnym zobrazeniam.

Aby sme mohli pracovať s deriváciami vyšších rádov, potrebujeme si teda čo-to povedať o multilineárnych zobrazeniach. Ich teória je v mnohom analogická teórii lineárnych operátorov.

2.4.1. Definícia. Nech $X_1, \dots, X_n, Y$ sú B-priestory. Hovoríme, že zobrazenie $A : X_1 \times \dots \times X_n \to Y$ je multilineárne (presnejšie n-lineárne), ak

$$A(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n) : X_i \to Y$$

je lineárne pre každé i a pre každé pevné $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$.

Podobne, ako u lineárnych zobrazení, budeme často zátvorku za symbolom multilineárneho zobrazenia vynechávať.

Platí

2.4.2. Veta. *Nech $X_1, \ldots, X_n, Y$ sú B-priestory a nech $A : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ je multilineárne zobrazenie. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.*

(i) A je spojitá v každom bode $x \in X = X_1 \times \cdots \times X_n$

(ii) A je spojitá v bode 0.

(iii) existuje $K > 0$ také, že

$$|Ax_1 \ldots x_n| \leq K|x_1| \ldots |x_n| \tag{2.10}$$

pre každé $(x_1, \ldots, x_n) \in X$

(iv) A je diferencovateľná v každom bode X a jej derivácia je spojitou funkciou x.

Dôkaz povedieme po trase $(iv) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$, $(i) \wedge (iii) \Rightarrow (iv)$. Zrejme $(iv) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii)$.

Dôkazy ostatných implikácií:

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Pretože $A0 = 0$ a A je spojitá v 0, existuje $\delta > 0$ také, že platí

$$|Ay_1 \ldots y_n| \leq 1 \text{ ak } |y_i| \leq \delta \text{ pri } i = 1, \ldots, n.$$

Z toho pre ľubovoľné $x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, n$ dostávame

$$\left| A \frac{\delta x_1}{|x_1|}, \ldots, \frac{\delta x_n}{|x_n|} \right| \leq 1$$

(pretože $|\delta x_i / |x_i|| \leq \delta$). Z multilinearity vyplýva

$$|Ax_1 \ldots x_n| \leq \delta^{-n} |x_1| \ldots |x_n|,$$

teda (2.11) platí s $K = \delta^{-n}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$

Tvrdenie (i) vyplýva z nerovnosti

$$|A(x - x')| \leq K|x_1 - x_1'| \ldots |x_n - x_n'|,$$

ktorá je bezprostredným dôsledkom (iii).

$(i) \wedge (iii) \Rightarrow (iv)$

Dôkaz vykonáme pre $n = 2$, jeho rozšírenie pre $n > 2$ je zrejmé.

Nech $x, h \in X$.

$$\begin{aligned}
\partial_h A(x) &= \lim_{\vartheta \to 0} \vartheta^{-1} [A(x_1 + \vartheta h_1, x_2 + \vartheta h_2) - Ax_1 x_2] = \\
&= \lim_{\vartheta \to 0} \vartheta^{-1} [Ax_1 x_2 + \vartheta(Ah_1 x_2 + Ah_2 x_1) + \vartheta^2 Ah_1 h_2 - Ax_1 x_2] = \\
&= Ah_1 x_2 + Ah_2 x_1.
\end{aligned}$$

Zobrazenie $h \mapsto Ah_1 x_2 + Ah_2 x_1$ je zrejme lineárne a podľa (iii) aj ohraničené a teda podľa definície G-diferenciálu je A G-diferencovateľné v bode x a platí

$$dA(x)h = Ah_1 x_2 + Ah_2 x_1 \tag{2.11}$$

F-diferencovateľnosť A vyplynie z Vety 2.3.3 ak ukážeme, že zobrazenie

$$A(\cdot, x_2) + A(x_1, \cdot) : X_1 \times X_2 \to Y,\ (h_1, h_2) \mapsto Ah_1x_2 + Ax_1h_2)$$

je spojité ako zobrazenie z $X_1 \times X_2$ do $L(X, Y)$.

Toto zobrazenie je zrejme lineárne a teda stačí dokázať, že je ohraničené. Podľa (i) však platí

$$|Ah_1x_2 + Ax_1h_2| \leq K(|h_1||x_2| + |x_1||h_2|) \leq 2K(|x_1| + |x_2|)(|h_1| + (|h_2|),$$

čím je dôkaz ukončený. □

2.3.4. Definícia. Multilineárne zobrazenie, spĺňajúce podmienku (2.12) (alebo ľubovoľnú z jej ekvivalentných podmienok) nazývame *ohraničeným*. Najmenšiu z konštánt K, pre ktorú platí (2.13) nazývame normou zobrazenia A a označujeme $|A|$ (resp. rovnakým symbolom, akým označujeme normu v priestore Y).

2.4.4. Poznámky.

1. Všimnime si analógie medzi ohraničenými multilineárnymi formami a ohraničenými lineárnymi operátormi (napr. ekvivalencia "ohraničenosti" (2.13) a spojitosti, definíciu normy).

2. Ak $X_1, \ldots, X_n$ sú konečnorozmerné priestory, potom každé multilineárne zobrazenie z $X_1 \times \cdots \times X_n$ je ohraničené.

Pre dané B-priestory $X_1, \ldots, X_n, Y$ je množina multilineárnych foriem z $X_1 \times \cdots \times X_n$ do Y s normou zavedenou v Definícii 2.4.3 opäť B-priestorom; označujeme ho

$L(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y)$. Dôkaz je rovnaký ako pre priestor ohraničených lineárnych operátorov, preto ho ponechávame čitateľovi ako cvičenie. Rovnako ponechávame na čitateľa dôkaz nasledovnej vety:

2.4.5. Veta. *Priestor $L(X_1, \ldots, X_n; Y)$ je izometricky izomorfný priestoru $L(X_1, L(X_2, \ldots (L(X_n, Y) \ldots))$.*

Ak $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, označujeme $L^n(X, Y) = L(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

2.4.6. Definícia. Multilineárne zobrazenie $A \in L^n(X, Y)$ nazývame *symetrickou*, ak pre ľubovoľnú permutáciu $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ a ľubovoľné $x_1, \ldots, x_n \in X$ platí

$$Ax_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} = Ax_1 \ldots x_n.$$

Ak $A \in L^n(X, Y)$ a $x_1 = x_2 = \cdots = x_n \in X$, píšeme

$$Ax_1 \ldots x_n = Ax^n.$$

2.4.6. Veta. *K ľubovoľnej multilineárnemu zobrazeniu $A \in L^n(X, Y)$ existuje symetrické $SymA \in L^n(X, Y)$ také, že*

(i) $(SymA)x^n = Ax^n$ pre každé $x \in X$

(ii) $|SymA| = |A|$ ak A je ohraničené.

Definujeme ju vzťahom

$$(SymA)x_1 \ldots x_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \text{ permutácie}} Ax_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \tag{2.12}$$

Dôkaz prenechávame čitateľovi ako cvičenie.

2.4.7. Cvičenia.

1. Nájdite trilineárnu funkciu z $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$, ktorá nie je konštantná v nijakej z premenných.
2. Urobte detailne indukčný krok v závere dôkazu Vety 2.4.2.
3. Dokážte tvrdenie Poznámky 2.4.4.
4. Dokážte Vetu 2.4.5.
   [Návod: použite indukciu]
5. Dokážte, že zobrazenie Sym$A$, definované vzťahom (2.13) spĺňa (i), (ii) Vety. Je to jediná symetrické zobrazenie, ktoré ich spĺňa?
   [Návod: Ukážte, že

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} A \left(\sum_{j=1}^{n} t_j x_j \right)^n = (\mathrm{Sym}A) x_1 \ldots x_n$$

6. Dokážte, že priestor $L(X_1, \ldots, X_n; Y)$ so zavedenou normou je Banachov.
7. Dokážte, že pre ohraničené multilineárne zobrazenie $A \in L(X_1, \ldots, X_n; Y)$ platí

$$|A| = \sup_{|x_i| \leq 1} |A x_1 \ldots x_n|.$$

2.5 Derivácie vyšších rádov

2.5.1. Definícia. Nech X, Y sú B-priestory, $U \subset X$ je otvorená a $F : U \to Y$ je diferencovateľná v každom $x \in U$. Hovoríme, že F má druhú deriváciu v bode $x \in U$, ak funkcia $DF : U \to (X, Y)$ má deriváciu v bode x. Vtedy píšeme

$$D^2 F(x) = D(DF)(x).$$

Pripomeňme si, že $DF : U \to L(X, Y)$, takže $D^2 F(x) \in L(X, L(X, Y))$. Podľa Vety 2.4.5 môžeme $D^2 F(x)$ chápať ako prvok $L^2(X, Y)$, pričom

$$D^2 F(x_0) hk = D(DF(x)h)_{x=x_0} k.$$

Pre porozumenie je užitočné rozmysliet si prípad $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}$. V takomto prípade môžme každé zobrazenie $A \in L^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ reprezentovať takto:

Označíme $a_{ij} = A e_i e_j$, kde $\{e_i\}_{i=1}^n$ sú bazové vektory $\mathbb{R}^n$. Z multilinearity pre ľubovoľné h, k bezprostredne vyplýva

$$Ahk = h^T A k,$$

kde A na pravej strane je matica s prvkami a_{ij}. Ak $A = D^2 F(x^0)$, ij-tý prvok matice $[D^2F(x^0)]$ je

$$\begin{aligned}
D^2F(x_0)e_ie_j &= D(DF(x)e_i)_{x=x_0}e_j = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[(DF(x)e_i)_{x=x_0+\varepsilon e_j} - (DF(x)e_i)_{x=x_0}\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\lim_{\vartheta\to 0}\frac{F(x_0+\varepsilon e_j+\vartheta e_i)-F(x_0+\varepsilon e_j)}{\vartheta} - \right. \\
&\qquad \left. - \lim_{\vartheta\to 0}\frac{F(x_0+\vartheta e_i)-F(x_0)}{\vartheta}\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^0+\varepsilon e_j) - \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^0)\right] = \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(x^0);
\end{aligned}$$

$$\text{teda } [D^2F(x_0)]_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(x^0). \tag{2.13}$$

Z elementárneho diferenciálneho počtu vieme, že za istých podmienok regularity si s poradím derivovania v (2.13) nemusíme robiť starosti, t.j. matica $D^2F(x)$ je symetrická.

Nasledujúca veta rozširuje tento výsledok na ľubovoľné Banachove priestory. Podmienky sú však trochu iné, než sa obvykle udávajú. V prípade $X=\mathbb{R}^n$, $Y=\mathbb{R}$, pretože vo všeobecnosti diferenciál nie je určený konečným počtom parciálnych derivácií.

2.5.2. Veta. *Nech $F: U\to Y$, $U\subset X$ otvorená, X,Y- B-priestory. Ak D^2F existuje v okolí bodu $x\in U$ a v bode x je spojitá, potom je $D^2F(x)$ symetrická.*

2.5.3. Poznámka. Tvrdenie vety platí aj za predpokladu samotnej existencie D^2F v bode x. Dôkaz je však zložitejší a pre naše účely bude veta postačovať vo formulácii, v ktorej je uvedená. V prípade $X=\mathbb{R}^n$ možno zameniteľnosť druhých parciálnych derivácií dokázať za predpokladu spojitosti prvých parciálnych derivácií v okolí bodu x, z čoho však nevyplýva existencia 2. diferenciálu. Naopak, z jeho existencie nevyplýva spojitosť 1. parciálnych derivácií v okolí bodu x.

Dôkaz. Potrebujeme dokázať, že pre ľubovoľné $h,k\in X$ platí

$$\lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0}\Phi(t,s) = \lim_{s\to 0}\lim_{t\to 0}\Phi(s,t),$$

kde

$$\Phi(t,s) = \frac{1}{st}[F(x+sh+tk)-F(x+sh)-F(x+tk)-F(x)].$$

Nech $h,k\in X$ sú také, že D^2F je spojitá v každom bode $x+sh+tk$ pre $0\le s\le 1$

a $0 \leq t \leq 1$. Potom dvojnásobným použitím Lemy 2.3.4 dostaneme

$$\begin{aligned}\Phi(1,1) &= \int_0^1 [DF(x+h+tk) - DF(x+tk)]kdt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [D^2F(x+sh+tk)hkdsdt \\ &= \int_0^1 \int^1 D^2F(x)hkdsdt + \omega_1(h,k) \\ &= D^2F(x)hk + \omega_1(h,k),\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}|\omega_1(h,k)| &\leq \int_0^1 \int_0^1 |D^2F(x+sh+tk) - D^2F(x)|dsdt|h||k| \\ &\leq \varepsilon|h||k|, \end{aligned} \tag{2.14}$$

ak h, k sú zvolené tak malé, že

$$|D^2F(x+sh+tk) - D^2F(x)| \leq \varepsilon$$

pre $0 \leq s \leq 1$ a $0 \leq t \leq 1$.

Zámenou h za k dostaneme rovnakým postupom

$$\Phi(1,1) = D^2F(x)hk + \omega_2(h,k), \tag{2.15}$$

kde $\omega(h,k) = \omega_2(h,k) - \omega_1(h,k)$ spĺňa (2.14). Označme A multilineárne zobrazenie, definované predpisom

$$Ahk = D^2F(x)kh.$$

Z rovnosti (2.15) vyplýva

$$(D^2F(x) - A)hk = \omega(h,k).$$

Nech teraz $h, k \in X$ sú ľubovoľné. Ak δ zvolíme dosť malé, vzhľadom na (2.14) platí

$$\begin{aligned}\delta^2|(D^2F(x) - A)hk| = |(D^2F(x) - A)\delta h\delta k| \leq \\ \leq |\omega(\delta h, \delta k)| \leq \delta^2\varepsilon\end{aligned}$$

a teda

$$|D^2F(x) - A| < \varepsilon.$$

Keďže ε bolo ľubovoľné, platí

$$D^2F(x) = A,$$

čo je tvrdením vety. $\square$

2.5.4. Veta. *Nech X, Y, Z sú B-priestory, $U \subset X$, $V \subset Y$ sú otvorené a nech $F : U \to V$, $G : V \to Z$. Ak $D^r F(x)$ a $D^r G(F(x))$ existujú, potom existuje aj $D^r(G \circ F)(x)$. Ak sú navyše $D^r F$, $D^r G$ spojité na U resp. V, potom je aj $D^r(G \circ F)$ spojité na U.*

K dôkazu budeme potrebovať nasledovnú lemu.

2.5.5. Lema. *Nech X, Y, Z sú B-priestory. Potom zobrazenie $\Phi : L(X,Y) \times L(Y,Z) \to L(X,Z)$ dané predpisom*

$$\Phi(A,B) = B \cdot A$$

má derivácie všetkých rádov a tieto derivácie sú spojité.

Dôkaz. Zobrazenie Φ je zrejme ohraničené bilineárne zobrazenie a ako také je podľa Vety 2.4.2 (*iv*) aj diferencovateľné a jeho derivácia je spojitá. Z výrazu (2.11) pre deriváciu bilineárnej funkcie vidno, že $D\Phi : (A,B) \mapsto D\Phi(A,B)$ je súčtom dvoch funkcií, z ktorých prvá je lineárna v A a nezávisí od B a druhá je lineárna v B a nezávisí od A. Preto je druhý diferenciál $D^2\Phi$ konštantný a ďalšie sú nulové. $\square$

Dôkaz Vety 2.5.4.. Vetu dokážeme indukciou. Pre $r = 1$ veta vyplýva z Vety 2.3.8. Predpokladajme, že veta platí pre $r-1$ namiesto r. Ak G má r-tú deriváciu v bode $F(x)$, potom DG má $r-1$-tú deriváciu v bode $F(x)$. Zobrazenie

$$x \mapsto DG(F(x)) \circ DF(x) \tag{2.16}$$

je teda kompozíciou $r-1$ razy diferencovateľného zobrazenia $x \mapsto (DF(x)), DG(F(x))$ z X do $L(X,Y) \times L(Y,Z)$ a bilineárneho zobrazenia $\Phi : L(X,Y) \times L(Y,Z) \to L(X,Z)$, ktoré je $(r-1)$-krát diferencovateľné podľa Lemy 2.5.5. Z formuly (2.8) teda vyplýva, že $D(G \circ F)$ má $(r-1)$-ú deriváciu v bode x, čo značí, že $G \circ F$ má r-tú deriváciu v bode x. Analogicky, použitím indukcie dokážeme aj spojitosť r-tej derivácie $G \circ F$ za predpokladu spojitosti r-tých derivácií funkcií F a G. $\square$

Derivácie vyšších rádov sa definujú indukciou analogicky ako druhá derivácia: $D^{k+1}F(x) = D(D^k F)(x)$. Z definície indukciou vyplýva, že $D^k F(x)$ je prvkom priestoru $L(\underbrace{X, L(X, \ldots, L(X,Y)) \ldots}_{k\text{krát}})$, ktorý je podľa Vety 2.3.4 izometricky izomorfný priestoru $L^k(X,Y)$. Indukciou sa z Vety 2.5.2 odvodí, že ak $D^k F$ existuje v okolí bodu x a v bode x je spojitá, potom je $D^k F(x)$ symetrická.

2.5.6. Cvičenia.

1. Dokážte detailne tvrdenie o symetrii $D^k F(x)$.
2. Dokážte detailne spojitosť $D^r(G \circ F)$ za predpokladu spojitosti $D^r G$ a $D^r F$.
3. Dokážte, že $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je C^r-diferencovateľná, potom ňou generovaný Nemyckého operátor (Cvičenie 2.1.4.5) je C^r ako zobrazenie z $C[0,1]$ do $C[0,1]$ a platí
$$(D^r F(\varphi) h^r)(s) = D^r \varphi(s)(h(s))^r$$

.

2.6. Taylorova veta

Taylorova veta ako ju poznáme z elementárneho diferenciálneho počtu, platí aj v Banachových priestoroch. Formulácia sa takmer zhoduje s formuláciou pre reálne funkcie, koeficienty - derivácie však majú zmysel multilineárnych zobrazení.

V ďalšom budeme používať obvyklú symboliku. Ak X, Y sú B-priestory $U \subset X$ je otvorená a $F : U \to X$, $V \subset U$, potom pre $F \in C^r(V, Y)$ bude značiť, že F má r-tú deriváciu v bodoch U a táto derivácia je spojitá vo V. $C^\infty(V, Y) = \bigcap_{r \geq 0} C^r(V, Y)$. Pre úplnosť uvádzame, že $C^\omega(V, Y)$ označujeme množinu analytických funkcií $V \to Y$. Hoci veľa z teórie možno rozšíriť na analytický prípad, ponecháme ho v tomto texte bokom. Preto ani neuvádzame presnú definíciu analytickej funkcie vo viacrozmernom priestore. Ďalej, ak $\rho : U \to \mathbb{R}$ a $x \in U$, píšeme $F = O(\rho)$ v x resp. $F = o(\rho)$ v x, ak platí $|F(\xi)| \leqq K|\rho(\xi)|$ v okolí x pre nejaké $K > 0$ resp. $F(\xi)/\rho(\xi) \to 0$ pre $\xi \to x$.

2.6.1. Veta (Taylorova). *Nech X, Y sú B-priestory $U \subset X$ otvorená, $F \in C^n(U, Y)$. Potom pre každé $x \in U$ a $h \in X$ dostatočne malé platí*

$$F(x+h) = F(x) + DF(x)h + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}F(x)hn - 1 + R_n(x,h), \quad (2.17)$$

kde

$$R_n(x,h) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-s)^n D^n F(x+sh)h^n ds = O(|h|^n).$$

Podobne platí

$$F(x+h) = F(x) + DF(x)h + \cdots + \frac{1}{n!}D^n F(x)h^n + \tilde{R}_{n+1}(x,h), \quad (2.18)$$

kde

$$\tilde{R}_{n+1}(x,h) = o(|h|^n).$$

Dôkaz. Zobrazenie $t \mapsto D^n F(x+th)h^n$ je spojité pre $0 \leq t \leq 1$ a dosť malé h. Z Lemy 2.3.4 dostávame

$$\begin{aligned} < y^*, F(x+h) > &=< y^*, F(x) + \int_0^1 DF(x+\vartheta h)hd\vartheta > \\ &=< y^*, F(x) > + \int_0^1 < y^*, DF(x+\vartheta h)h > d\vartheta \\ &=< y^*, F(x) > + D\int_0^1 < y^*, F(x+\vartheta h) > d\vartheta h. \end{aligned}$$

Funkcia $\vartheta \mapsto < y^*, F(x+\vartheta h) >$ je C^n reálna funkcia jednej reálnej premennej, preto ju môžeme rozvinúť podľa Taylorovej vety pre takéto funkcie. Takto dostaneme rovnosť

$$< y^*, F(x+h) > =< y^*, F(x) + DF(x)h + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}F(x)h^{n-1} + R_n(x,h) >$$

a analogickú rovnosť zodpovedajúcu rovnosti (2.18). Pretože rovnosti platia pre ľubovoľný lineárny funkcionál, platia aj pre ich argumenty. Tým sú rovnosti (2.17) a (2.18) dokázané.
□

Menej známe je obrátenie Taylorovej vety, ktoré je niekedy užitočné. Uvádzame ho bez dôkazu.

2.6.2. Veta. *Nech X, Y sú B-priestory, $U \subset X$ je otvorená, $F : U \to Y$ a nech $\varphi_k : U \to L^k(X, Y)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ sú symetrické. Pre $x \in U$ označme*

$$\rho(x, h) = F(x + h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \varphi_k(x) h^k.$$

Predpokladajme, že
(1) φ_k sú spojité na U
(2) $\lim_{(\xi,h)\to(x,0)} \rho(\xi, h)/|h|^n = 0$ pre každé $x \in U$.
Potom $F \in C^n(U, Y)$ a platí $D^k F = \varphi_k$ na U.

Nasledujúci príklad, ktorého výsledok použijeme v nasledujúcej kapitole, slúži na ilustráciu možnosti použitia Vety 2.6.2.

2.6.3. Príklad. Nech X je B-priestor. Potom množina R operátorov $L(X, X)$, ktoré majú ohraničený inverzný je otvorená a zobrazenie $A \mapsto A^{-1}$ je na nej C^∞.

Dôkaz. Zvoľme $0 < r < \infty$. Nech $A, B \in L(X, X)$ a nech $A \in R$. Platí

$$A + B = A(I + A^{-1}B). \tag{2.19}$$

Ak $|B| < 1/|A^{-1}|$, potom $|A^{-1}B| < 1$ a podľa známej vety z funkcionálnej analýzy má operátor $I + A^{-1}B$ ohraničený inverzný; podľa (2.19) má ohraničený inverzný operátor aj $A + B$. Ďalej platí

$$\begin{aligned}(A + B)^{-1} = I + A^{-1}B)^{-1}A^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}B)^k A^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} \varphi_k(A) B^k + \rho(A, B),\end{aligned}$$

kde

$$\varphi_k(A) = k!(-1)^k A^{-k-1}$$

a

$$\rho(A, B) = A^{-1} \sum_{k=r+1}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}B)^k \le A^{-1}(A^{-1}B)^{r+1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}B)^k,$$

teda

$$|\rho(A, B)| \le |A^{-1}|^{r+2} |B|^{r+1} \sum_{k=0}^{\infty} |A^{-1}B|^k = (1 - |A^{-1}B|)^{-1} |A^{-1}|^{r+2} |B|^{r+1}.$$

Sú teda splnené predpoklady Vety 2.6.2, podľa ktorej je zobrazenie $A \mapsto A^{-1}$ C^r. Pretože r bolo zvolené ľubovoľne, je táto funkcia aj C^∞. □

3. Rovnomerne kontraktívne zobrazenia

3.1. Lokálna verzia Banachovej vety o pevnom bode

Banachova veta o pevnom bode kontraktívnych zobrazení sa pre svoje bohaté aplikácie stala všeobecne známym užitočným nástrojom. Pri jej používaní sa spravidla stáva, že zobrazenie, ktorého pevný bod chceme dokázať, nie je kontraktívne na celom priestore. V takom prípade je často možné použiť postup, ktorý teraz sformulujeme vo všeobecnosti.

Nech X je B-priestor, $x_0 \in X$ a $\delta > 0$. Označíme

$$G(x_0, \delta) = \{x : |x - x_0| < \delta\}.$$

3.1.1. Veta. *Nech X je B-priestor a nech $\mathcal{T} : \overline{G(x_0, \delta)} \to X$ je kontraktívne zobrazenie s konštantou $\alpha < 1$ také, že*

$$|\mathcal{T}x_0 - x_0| < \delta(1 - \alpha).$$

Potom $\mathcal{T}$ má jediný pevný bod a tento bod leží v $G(x_0, \delta)$.

Dôkaz. Pre $x \in \overline{G(x_0, \delta)}$ platí

$$|\mathcal{T}x - x_0| \le |\mathcal{T}x - \mathcal{T}x_0| + |\mathcal{T}x_0 - x_0| < \alpha|x - x_0| + \delta(1 - \alpha) \le \delta,$$

teda $\mathcal{T} : \overline{G(x_0, \delta)} \to G(x_0, \delta)$. Množina $\overline{G(x_0, \delta)}$ je uzavretou podmnožinou Banachovho priestoru X a preto je úplným metrickým priestorom. Zobrazenie $\mathcal{T}$ zobrazuje $\overline{G(x_0, \delta)}$ kontraktívne do seba a má teda podľa Banachovej vety o pevnom bode jediný pevný bod v $\overline{G(x_0, \delta)}$. Pretože $\mathcal{T}(\overline{G(x_0, \delta)}) \subset G(x_0, \delta)$, tento pevný bod musí ležať v $G(x_0, \delta)$.

3.1.2. Poznámka. Zrejmá analógia Vety 3.1.1 (so vzdialenosťou namiesto normy rozdielu) platí aj v úplnom metrickom priestore.

3.2. Princíp rovnomernej kontrakcie

V tomto odseku nám pôjde o závislosť pevného bodu na parametroch, od ktorých závisí kontraktívne zobrazenie. Výsledok má bohaté aplikácie a dajú sa z neho odvodiť užitočné nástroje lokálnej nelineárnej analýzy.

3.2.2. Definícia. Nech X je B-priestor, $U \subset X$ a nech P je množina . Hovoríme, že zobrazenie $\mathcal{T} : U \times P \to X$ je rovnomerne (vzhľadom na $y \in P$) kontraktívne, ak existuje $\alpha < 1$ také, že

$$|\mathcal{T}(x, y) - \mathcal{T}(x', y)| \le \alpha|x - x'|$$

pre každé $x, x' \in U$ a každé $y \in P$.

3.2.3. Označenie. Ak $\mathcal{T}$ je funkciou dvoch premenných x, y, potom budeme značiť

$$D_x\mathcal{T}(x, y) = D\mathcal{T}(\cdot, y),$$

teda $D_x\mathcal{T}(x, y)$ značí deriváciu funkcie premennej x v bode (x, y) pri pevnom y; podobný význam má $D_y\mathcal{T}(x, y)$.

3.2.4. Veta (princíp rovnomernej kontrakcie). *Nech U, V sú otvorené podmnožiny B-priestorov X resp. P, $\mathcal{T} : \bar{U} \times V \to X$ je rovnomerná kontrakcia a nech $\mathcal{T}(\cdot, y)$ má jediný pevný bod $\varphi(y) \in U$ pre každé $y \in V$. Potom platí*

(i) Ak $\mathcal{T}$ je lipschitzovská vzhľadom na y s konštantou L a α je konštanta rovnomernej kontrakcie, potom φ je lipschitzovská s konštantou $L/(1-\alpha)$.

(ii) Ak $\mathcal{T} \in C^r(U \times V, X)$ pre $0 \le r \le \infty$, potom aj $\varphi \in C^r(V, X)$; ak $r \ge 1$, platí

$$D\varphi(y) = (I - D_x\mathcal{T}(\varphi(y)y))^{-1} D_y\mathcal{T}(\varphi(y), y). \tag{3.1}$$

Všimnime si, že vo vete nepredpokladáme, že obrazy $\mathcal{T}$ sú obsiahnuté v $\bar{U}$ a preto musíme existenciu pevného bodu v $\bar{U}$ predpokladať; samozrejme, že ak existuje, tak je jediný.

Dôkaz vety.

(i) Pre $y_1, y_2 \in P$ platí

$$\begin{aligned}|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| &= |\mathcal{T}(\varphi(y_1), y_1) - \mathcal{T}(\varphi(y_2), y_2)| \\ &\le |\mathcal{T}(\varphi(y_1), y_1) - \mathcal{T}(\varphi(y_1), y_2)| + |\mathcal{T}(\varphi(y_1), y_2) - \mathcal{T}(\varphi(y_2), y_2)| \\ &\le L|y_1 - y_2| + \alpha|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)|,\end{aligned}$$

z čoho vyplýva

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \le \frac{L}{1-\alpha}|y_1 - y_2|$$

(ii) Pre $r = 0$ je dôkaz podobný dôkazu (i) a prenechávame ho čitateľovi ako cvičenie.

Najprv si ukážeme, že z kontraktívnosti vyplýva $|D_x\mathcal{T}(x, y)| \le \alpha$ pre $x, y \in U \times V$. Naozaj, podľa Vety 2.3.4 platí pre $h \in X$

$$\begin{aligned}|D_x\mathcal{T}(x, y)h| = |\partial_h\mathcal{T}(x, y)| &= |\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\mathcal{T}(x + th, y)) - \mathcal{T}(x, y)| \\ &\le \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\alpha|x + th - x| = \alpha|h|,\end{aligned}$$

čo je podľa definície normy operátora tvrdením.

Tvrdenie (ii) dokážeme najprv pre $r = 1$. Formálnym (zatiaľ neodôvodneným) derivovaním rovnosti

$$\mathcal{T}(\varphi(y), y) = \varphi(y)$$

podľa y dostávame

$$D_x\mathcal{T}(\varphi(y), y)D\varphi(y) + D_y\mathcal{T}(\varphi(y), y) = D\varphi(y);$$

z čoho vyplýva

$$D\varphi(y) = (I - D_x\mathcal{T}(\varphi(y), y))^{-1} D_y\mathcal{T}(\varphi(y), y) \tag{3.2}$$

Pretože $|D_x\mathcal{T}(\varphi(y)y)| \le \alpha < 1$, je podľa známej vety o existencii inverzného operátora výraz na pravej strane dobre definovaný a predstavuje jediného možného kandidáta na $D\varphi(y)$. Musíme však ešte dokázať, že je naozaj deriváciou. Použijeme postup z Príkladu 2.3.6. To znamená, že ak označíme Δ pravú stranu (3.2) potrebujeme dokázať, že pre každé $h \in P$ platí

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi(y+th) - \varphi(y)] = \Delta h \tag{3.3}$$

a že Δ je spojitou funkciou y.

Použitím Lemy 2.3.4 dostávame

$$\begin{aligned}\varphi(y+th) - \varphi(y) =& \mathcal{T}(\varphi(y+th), y+th) - \mathcal{T}(\varphi(y), y) \\ =& \left[\int_0^1 D_x\mathcal{T}(\varphi(y) + \vartheta(\varphi(y+th) - \varphi(y), y)d\vartheta\right](\varphi(y+th) - \varphi(y)) \\ &+ t\int_0^1 D_y\mathcal{T}(\varphi(y+th), y+\vartheta th)d\vartheta h,\end{aligned}$$

z čoho vyplýva

$$\begin{aligned}\varphi(y+th) - \varphi(y) =& t\left[I - \int_0^1 D_x\mathcal{T}(\varphi(y) + \vartheta(\varphi(y+th) - \varphi(y)), y)d\vartheta\right]^{-1} \\ &\left[\int_0^1 D_y\mathcal{T}(\varphi(y+th), y+\vartheta th)d\vartheta\right] h.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Pravá strana má zmysel, pretože

$$\begin{aligned}&|\int_0^1 D_x\mathcal{T}(\varphi(y) + \vartheta(\varphi(y) + th) - \varphi(y), y)d\vartheta| \\ &\leq \int_0^1 \sup_{\substack{x\in\bar{U} \\ y\in P}} |D_x\mathcal{T}(x,y)|d\vartheta \leq \alpha < 1.\end{aligned}$$

Pretože podľa Príkladu 2.6.3 je funkcia operátora $A \mapsto A^{-1}$ spojitou na svojom definičnom obore, dostávame (3.3) z (3.4) limitným prechodom pre $t \to 0$.

Spojitosť Δ vzhľadom na y vyplýva z toho, že je kompozíciou spojitých funkcií.

Nech teraz $\mathcal{T} \in C^r(U,V),\ r > 1$. Indukciou dokážeme, že $y \in C^r(V)$.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $r-1$ miesto r. Pravá strana (3.1) je kompozíciou lineárnych zobrazení $y \mapsto (I - D_x\mathcal{T}(\vartheta(y), y))^{-1}$ a $y \mapsto D_y\mathcal{T}(\varphi(y), y)$. Tieto sú C^{r-1} podľa indukčného predpokladu, Príkladu 2.5.5 a Vety 2.5.4. Podľa Vety 2.5.4 a Lemy 2.5.5 je C^{r-1} aj ich kompozícia a teda aj $D\varphi$. To ale značí, že φ je C^r.

3.2.5. Poznámka. Platí aj analytické rozšírenie princípu rovnomernej kontrakcie: ak $\mathcal{T} \in C^\omega$, potom aj φ je C^ω.

3.2.6. Príklad. *Diferencovateľná závislosť riešenia diferenciálnej rovnice od počiatočných dát.*

Štandardnou ilustráciou aplikácie Banachovej vety o pevnom bode je existenčná veta pre diferenciálne rovnice. V tomto príklade ukážeme, že z princípu rovnomernej kontrakcie možno vyťažiť oveľa viac - diferencovateľnú závislosť riešenia od počiatočných podmienok. Táto veta hrá kľúčovú úlohu v geometrickej teórii diferenciálnych rovníc a jej elementárny dôkaz je technicky dosť komplikovaný.

Uvažujme diferenciálnu rovnicu

$$dx/dt = f(t, x) \tag{3.5}$$

v $\mathbb{R}^n$, $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ otvorená, $r > 0$ s počiatočnou podmienkou

$$x(\tau) = \xi, \tag{3.6}$$

kde $(\tau, \xi) \in U$. Zvoľme $(t_0, x_0) \in U$. Budeme sa zaujímať nielen o existenciu a jednoznačnosť riešenia rovnice (3.5), prechádzajúceho cez bod (t_0, x_0), ale aj o regularitu jeho závislosti od bodu (τ, ξ) v okolí bodu (t_0, x_0).

Zvoľme otvorenú množinu $B \subset U$ takú, že $(t_0, x_0) \in B$ a $\bar{B} \subset U$. Označme

$$M = \sup_{\bar{B}} |f|, \ L = \sup_{\bar{B}} |D_x f|$$

a zvoľme R, T tak malé, že

$$Q = \{(t, x) : |t - t_0| \leq 2T, \ |x - x_0| \leq 4R\} \subset B,$$

$4LT < 1$ a $2MT < R$.

Spojitá funkcia $x : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^n$ je riešením rovnice (3.5), spĺňajúcim (3.6) (pri $|\tau - t_0| \leq T, |\xi - x_0| \leq R$) vtedy a len vtedy, ak rieši integrálnu rovnicu

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))ds \text{ pre } t_0 - T \leq t \leq t_0 + T,$$

t.j. ak je pevným bodom zobrazenia $\mathcal{T} : C[t_0 - T, t_0 + T] \to C[t_0 - T, t_0 + T]$, daného vzťahom

$$\mathcal{T}(x; \xi, \tau)(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))ds, \tag{3.7}$$

závislého od parametrov ξ a τ. Všimnime si, že podľa Príkladu 2.3.6 je $\mathcal{T}$ C^1 v x; jej C^1 závislosť na parametroch τ a ξ je zrejmá. Označme $\mathbf{x_0}(t) \equiv x_0$. Pre $|\xi - x_0| \leq R$ a $|\tau - t_0| \leq T$ a $t_0 - T \leq t \leq t_0 + T$ platí

$$|\mathcal{T}(\mathbf{x_0}, \xi, \tau)(t) - x_0| \leq |\xi - x_0| + |\int_\tau^t |f(s, x_0)|ds| \leq R + 2MT \leq 2R,$$

Ďalej, ak $x, x' \in G(\mathbf{x_0}, 4R)$, potom

$$|\mathcal{T}(x; \xi, \tau) - \mathcal{T}(x'; \xi, \tau)| \leq \int_\tau^t |f(s, x(s)) - f(s, x'(s))|ds$$

$$\leq L \int_\tau^t |x(s) - x'(s)|ds \leq 2LT \sup_{t_0 - T \leq t \leq t_0 + T} |x(t) - x'(t)|,$$

Podľa Vety 3.1.1 (s $\alpha = 1/2,\ \delta = 4R$) je teda $\mathcal{T}$ kontrakcia na $G(\mathbf{x_0}, 4R)$ s koeficientom $\alpha = 2LT \le 1/2$, rovnomerne vzhľadom na $|\xi - \xi_0| \le R$ a $|\tau - t_0| < T$. Z Cvičenia 2.5.6.3 vyplýva, že $\mathcal{T}$ je C^r funkciou x, ξ, τ. Podľa Vety 3.2.4 existuje pre tieto hodnoty parametrov jediný pevný bod $\varphi(\tau, \xi) \in G(\mathbf{x_0}, 4R)$, ktorý je C^r funkciou parametrov ξ a τ. Ekvivalentne, funkcia $t \mapsto \varphi(\xi, \tau)(t)$ je jediným riešením úlohy (3.5), (3.6) na intervale $[t_0 - T,\ t_0 + T]$ s hodnotami v množine $\{(x - x_0) \le 4R\}$.

Počítajme teraz deriváciu $D_\xi \varphi$ podľa Vety 2.3.4. Označme $\hat{x}(t) = \varphi(\xi, \tau)(t)$ a $Y(t) = D_\xi \varphi(\xi, \tau)(t)$. Z formuly (3.2) vyplýva

$$[(I - D_x \mathcal{T}(\hat{x}; \xi, \tau))Y](t) = D_\xi \mathcal{T}(\hat{x}, \xi, \tau)(t). \tag{3.8}$$

Zrejme platí

$$D_\xi \mathcal{T}(\hat{x}, \xi, \tau) = Id \tag{3.9}$$

a podľa Príkladu 2.3.6.

$$D_x \mathcal{T}(\hat{x}; \xi, \tau)(t) = \int_\tau^t D_x f(s, \hat{x}(s)) ds. \tag{3.10}$$

Dosadením (3.9) a (3.10) do (3.8) dostávame

$$Y(t) - \int_\tau^t D_x f(s, \hat{x}(s)) Y(s) ds = Id.$$

Derivovaním tejto rovnice podľa t dostávame, že $Y(t) \in L(\mathbb{R}^n, R^n)$ rieši diferenciálnu rovnicu

$$\dot{Y}(t) = D_x f(s, \hat{x}(s)) Y \tag{3.11}$$

s počiatočnou podmienkou

$$Y(\tau) = I. \tag{3.12}$$

Rovnica (3.11) sa nazýva variačnou rovnicou (alebo linearizáciou rovnice (3.5) pozdĺž riešenia $\hat{x}$. Je to lineárna neautonómna rovnica. Stĺpce matice Y sú jej lineárne nezávislými (vzhľadom na (3.12)) riešeniami, matica $Y(t)$ je teda fundamentálnou maticou riešení rovnice (3.11).

3.2.7. Cvičenia.

1. Dokážte tvrdenie Vety 3.2.4. pre $r = 0$.
2. Vyjadrite $D^2\varphi(y)$ z Vety 3.2.4. pomocou prvých a druhých derivácií $\mathcal{T}$.
   [Návod: Derivujte formálne vzťah

   $$D\varphi = D_x \mathcal{T} D\varphi + D_y \mathcal{T}$$

   podľa y a dosaďte za $D\varphi$ z (3.1).]
3. Overte detailne diferencovateľnosť $\mathcal{T}$ z Príkladu 3.2.6. vo všetkých premenných.
4. Dokážte, že $z(t) = D_\tau \varphi(t, \tau, \xi)$ je riešením variačnej rovnice (31.1) s počiatočnou podmienkou $z(\tau) = -f(\tau, \xi)$. Aký je vzťah z a Y?
   [Návod: z je riešením lineárnej rovnice, pre ktorú je Y fundamentálna matica riešení.]

5. V Príklade 3.2.6 predpokladajme, že $U = \mathbb{R}^{n+1}$ a že Df je globálne ohraničené. Použitím Vety 3.2.4 dokážte globálnu existenciu, jednoznačnosť a hladkú závislosť riešenia na τ, ξ. [Návod: Hľadajte riešenie ako pevný bod v priestore spojitých funkcií $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ s normou
$$\|x\|_L = \sup_{-\infty<t<\infty} e^{-L|t-t_0|}|x(t)|,$$
kde $|Df| \leq L$]
6. V nadväznosti na Príklad 3.2.6 pri jeho označeniach a predpokladoch predpokladajte navyše, že funkcia f je C^r závislá od parametra $\mu \in \mathbb{R}^p$. Dokážte, že
$$u(t) = D_\mu \phi(\xi, \tau, \mu)(t)$$
je riešením nehomogénnej lineárnej rovnice
$$\dot{u} = D_x f(s, \hat{x}(s), \mu)u + D_\mu f(s, \hat{x}(s), \mu)$$
vyhovujúce podmienke $u(\tau) = 0$. Ako môžeme u vyjadriť pomocou $Y(t)$?

4. Veta o implicitnej funkcii a jej aplikácie

4.1. Vety o implicitnej a inverznej funkcii

Vetu o implicitnej funkcii možno považovať za primárny netriviálny kvalitatívny poznatok diferenciálneho počtu. Predstavuje základný nástroj lokálnej nelineárnej analýzy diferencovateľných objektov.

4.1.1. Veta (o implicitnej funkcii). *Nech X, Y, Z sú B-priestory, $U \subset X$, $V \subset Y$ sú otvorené, $F : U \times V \to Z$ je C^r, $0 < r \leq \infty$, $(x_0, y_0) \in U \times V$, $F(x_0, y_0) = 0$. Predpokladajme, že $D_y F(x_0, y_0)$ má spojitý inverzný operátor. Potom existuje okolie $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ bodu (x_0, y_0) a funkcia $f \in C^r(U_1, V_1)$ taká, že $f(x_0) = y_0$ a že $F(x, y) = 0$ pre $(x, y) \in U_1 \times V_1$ platí práve vtedy, ak $y = f(x)$. Ďalej platí*
$$Df(x_0) = -[D_y F(x_0, y_0)]^{-1} D_x F(x_0, y_0). \tag{4.1}$$

4.1.2. Poznámka. Znenie vety presne zodpovedá zneniu elementárnej vety o implicitnej funkcii pre reálnu funkciu dvoch premenných.

4.1.3. Poznámka. Veta o implicitnej funkcii je prototypom tvrdení, ktorých schému by sme mohli voľne vyjadriť termínom "princíp linearizácie":

Ak linearizácia v bode x_0 nejakého hladkého matematického objektu Ω má vlastnosť V a táto vlastnosť je "robustná", potom lokálne vlastnosť V má aj samotný objekt. Robustnosťou rozumieme, že vlastnosť okrem objektu Ω majú aj objekty jemu blízke vo vhodnej topológii.

V konkrétnom prípade Vety 4.1.1. objektom je funkcia F, vlastnosťou V je možnosť vyjadriť z podmienky $F(x, y) = 0$ y ako funkciu x. Táto vlastnosť je (globálne) splnená pre linearizáciu F v bode (x_0, y_0) (rovnica $D_x F(x_0, y_0)h +$

$D_yF(x_0,y_0)k = 0$ má jednoznačné riešenie $k = -[D_yF(x_0,y_0)]^{-1}D_xF(x_0,y_0)h$), jej lokálne splnenie pre funkciu F je predmetom tvrdenia vety. Robustnosť vlastnosti V je predmetom Cvičenia 4.1.8.2.

Iným výrazom princípu linearizovanej stability je napr. Veta o asymptotickej stabilite na základe prvého priblíženia (čo je iné pomenovanie linearizácie).

Princíp linearizácie má obrovský koncepčný význam pre aplikácie matematiky, pretože podmienečne odobruje používanie zjednodušených linearizovaných modelov nielen po kvantitatívnej, ale aj po kvalitatívnej stránke. Na druhej strane nás varuje, že v nerobustných kritických prípadoch (ako napr. ak $D_yF(x_0,y_0)$ nemá spojitý inverzný), lokálna podoba množiny $F(x,y) = 0$ je podstatne ovplyvnená členmi vyššieho stupňa Taylorovho rozvoja funkcie $F(x,y)$ v bode (x_0,y_0).

4.1.4. Poznámka. Ak X, Y, Z sú konečnorozmerné priestory, podmienka invertovateľnosti $D_yF(x_0,y_0)$ je splnená práve vtedy, ak hodnosť $D_yF(x_0,y_0) = \dim Y = \dim Z$.

4.1.5. Poznámka. Metóda dôkazu dáva odhad na veľkosť množín U_1, V_1 (Cvičenie 4.1.6.3), ktorý je niekedy dôležitý.

4.1.6. Poznámka. Platí aj analytická verzia Vety o implicitnej funkcii.

Dôkaz Vety 4.1.1. je motivovaný myšlienkou iteračného riešenia rovnice $F(x,y) = 0$ pri pevne zvolenom x Newtonovou metódou:

Zvolíme (x,y) a pri rovnakom x hľadáme novú iteráciu y' tak, aby platilo

$$F(x,y') = 0. \tag{4.2}$$

Linearizáciou v bode (x,y) dostávame z (4.2) pre y' predpis

$$F(x,y) + D_yF(x,y)(y'-y) = 0,$$

alebo, ak D_yF je invertovateľný,

$$y' = y - [D_yF(x,y)]^{-1}F(x,y). \tag{4.3}$$

V (4.3) nahradíme premennú hodnotu $D_yF(x,y)$ konštantnou hodnotou $D_yF(x_0,y_0)$, čím dostaneme

$$y' = y - [D_yF(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y). \tag{4.4}$$

Je zrejmé, že za predpokladov vety je y pevným bodom pravej strany (4.4), t.j. zobrazenia

$$\mathcal{T}(y,x) = y - [D_yF(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y)$$

práve vtedy, ak (x,y) je riešením rovnice $F(x,y) = 0$.

Zrejme $\mathcal{T}$ má rovnaký stupeň hladkosti ako F. Aby sme vetu dokázali, stačí teda podľa Vety 3.2.4. overiť, že pri vhodnej voľbe okolí U_1, V_1 je $\mathcal{T}$ kontrakcia v $y \in V_1$, ktorá je rovnomerná vzhľadom na $x \in U_1$; formula (4.1) už potom vyjde formálnym derivovaním vzťahu $F(x,f(x)) = 0$ vzhľadom na x.

Podľa Lemy 2.3.4. platí pre $x \in U_1,\ y_1, y_2 \in V$

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}(y_1,x) - \mathcal{T}(y_2,x)| &\le |\int_0^1 |I - DF(x_0,y_0)^{-1}DF(x, y_1 + \vartheta(y_2-y_1)||y_1-y_2|d\vartheta \\ &\le M\int_0^1 |DF(x_0,y_0) - DF(x, y_1+\vartheta(y_2-y_1))||y_1-y_2|d\vartheta,\end{aligned}$$

kde $M = |(DF(x_0, y_0)^{-1}|$.

Keďže $DF(x,y)$ je spojitou funkciou x, y, existuje okolie U_1 bodu x_0 a okolie V_1 bodu y_0 (ktoré môžeme vziať ako guľu $G(y_0, R)$) také, že pre zvolené $\alpha < 1$ platí

$$|DF(x, y') - DF(x_0, y_0)| \leq \alpha M^{-1} |(DF(x_0, y_0))^{-1}|,$$

pre každé $x, y \in U_1 \times V_1$. Keďže V_1 sme zvolili konvexným, patrí spolu s y_1 a y_2 do V_1 aj $y_1 + \vartheta(y_2 - y_1)$ pre ľubovoľné $0 \leq \vartheta \leq 1$. Preto pre $x \in U_1$, $y_1, y_2 \in V_1$ platí

$$|\mathcal{T}(y_1, x) - \mathcal{T}(y_2, x)| \leq \alpha |y_1 - y_2|.$$

Ďalej platí

$$|\mathcal{T}(y_0, x) - y_0| \leq M |F(x, y_0)| \leq r(1 - \alpha),$$

ak bolo U_1 zvolené dosť malé. Podľa Viet 3.1.1. a 3.2.4. teda pre $x \in U_1$ existuje jediný pevný bod $y = f(x) \in U$, ktorý je C^r funkciou x.

Veľmi závažným dôsledkom vety o implicitnej funkcii je Veta o inverznej funkcii. Takisto ako Veta o implicitnej funkcii je rozšírením lokálnej Vety o inverznej funkcii pre reálne funkcie bez dodatočných podmienok.

4.1.7. Veta (lokálna o inverznej funkcii). *Nech X, Y sú B-priestory, $U \subset X$ je otvorená, $f \in C^r(U, Y)$, $r > 0$, $x_0 \in U$. Predpokladajme, že $Df(x_0)$ má ohraničený inverzný operátor. Potom f je lokálny difeomorfizmus, t.j. existuje okolie $W = V \times U_1$ bodu $(f(x_0), x_0)$ a $g \in C^r(V, U_1)$ také, že $g \circ f = id_{U_1} a f \circ g = id_V$.*

Dôkaz. Použijeme Vetu 4.1.1. pre zobrazenie $F : Y \times U \to Y$

$$F(y, x) = y - f(x).$$

Platí $F(f(x_0), x_0) = 0$ a $D_x F(f(x_0), x_0) = -Df(x_0)$; podľa Vety 4.1.1. existuje okolie V bodu $f(x_0)$, okolie $\tilde{U} \subset U$ bodu x_0 a funkcia $g : V \to \tilde{U}$ taká, že $F(y, x) = 0$ pre $(y, x) \in V \times \tilde{U}$ práve vtedy, ak $x = g(y)$. Položme $U_1 = \{x \in \tilde{U} : f(x) \in V\}$. Ľahko si overíme, že $f \circ g$ a $g \circ f$ sú identické zobrazenia na V resp. U_1.A to je vlastne tvrdením vety.

4.1.8. Cvičenia.

1. Za predpokladu $F \in C^2$ vypočítajte $D^2 f(x_0)$.
2. Dokážte robustnosť vlastnosti "Ohraničený operátor" $A : X \to Y$ má ohraničený inverzný.
3. Urobte odhad veľkosti okolí U_1, V_1 z Vety 4.1.1. pomocou $M = |(DF(x_0, y_0))^{-1}|$ a modulu spojitosti DF.
4. Ak navyše k predpokladom Vety 4.1.1 platí $D_y^j F(x_0, y_0) = 0$ pre $j = 0, \ldots, k \leq r$, potom $D^j f(x_0) = 0$ pre $j = 0, \ldots, k$; ak $k < r$, potom

$$D^{k+1} f(x_0) = -\left[D_y F(x_0, y_0\right]^{-1} D_x^{k+1} F(x_0, y_0).$$

Dokážte.

4.2. Príklady použitia vety o implicitnej funkcii

Obsahom kapitoly je exkurzia po rozličných aplikáciách vety o implicitnej funkcii - či už v konečnorozmerných, alebo nekonečnorozmerných priestoroch. Na záver si ukážeme úskalie, ktoré číha pri používaní vety vo funkcionálnych priestoroch. Príklady z literatúry ukazujú, že pri nedbalom overovaní predpokladov vety ho ľahko možno prehliadnuť.

4.2.1. Príklad. *Spojitá závislosť algebraicky jednoduchej vlastnej hodnoty matice a jej vlastného vektora od jej prvkov.*

Vlastný vektor nie je jednoznačnou funkciou matice (je určený modulo násobenie nenulovou konštantou). Aby úloha dostala zmysel, budeme navyše požadovať, aby mal danú (jednotkovú) normu.

Matice $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sú dané ich n^2 prvkami, ich množinu môžeme stotožniť s $\mathbb{R}^{n^2}$.

Skutočnosť, že λ je vlastnou hodnotou A a v je jej jednotkový vlastný vektor môžeme vyjadriť tak, že dvojica $y = (v, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ je nulou funkcie $F = (F_1, \ldots, F_{n+1}) : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n+1}$, danej predpisom

$$F(A, y) = \begin{cases} (A - \lambda I)v \\ < v, v > -1 \end{cases} \tag{4.5}$$

kde $< \cdot, \cdot >$ je skalárny súčin.

Funkcia F je zrejme C^∞ funkciou svojich premenných.

Nech teda A_0 je matica, ktorá má algebraicky jednoduchú vlastnú hodnotu λ_0 s vlastným vektorom v_0, $< v_0, v_0 >= 1$; platí teda $F(A_0, y_0) = 0$. Použitím Vety 4.1.1 chceme dokázať, že lokálne pre ľubovoľné A blízke A_0 existuje jediná dvojica $y = (v, \lambda)$ blízka y_0 taká, že platí (4.5) a táto y je C^∞ funkciou A. K tomu nám stačí overiť, že

$$D_y F(A_0, y_0) = \begin{pmatrix} A_0 - \lambda I & v_0 \\ 2v_0^T & 0 \end{pmatrix}.$$

je regulárnou maticou, alebo ekvivalentne, že

$$\det D_y F(A_0, y_0) \neq 0.$$

Keďže λ_0 je jednoduchou vlastnou hodnotou, existuje regulárna matica $S = (s_1, ..., s_n)$ taká, že $S^{-1} v_0 = e_n = (0, 0, \ldots, 1)^T$, t. j. $s_n = v_0$, $C = S^{-1} A_0 S - \lambda_0 I$ spĺňa $c_{nj} = c_{jn} = 0$ pre $j = 1, \ldots, n$ a minor prvku c_{nn} je $\neq 0$.

Označme

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\begin{aligned} \det(\tilde{S}^{-1}) \det D_y F(A_0, y_0) \det \tilde{S} &= \det(\tilde{S}^{-1} D_y F(A_0, y_0) \tilde{S}) \\ &= \det \begin{pmatrix} C & -e_n \\ w & 0 \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

, kde $w = (w_1, \ldots, w_n)$ je riadkový vektor taký, že $w_n = 2 < v_0, v_0 > \neq 0$ Tým je overené, že sú splnené predpoklady Vety 4.1.1.

V príkladoch tohoto odseku sa budú vyskytovať aj zobrazenia na nekončnorozmerných priestoroch, ktorých diferencovateľnosť treba overovať. Spravidla sa to robí postupom z Príkladu 2.3.6. Ten je síce priamočiary, ale často dosť zdĺhavý. Prenechávame ho preto na čitateľa a obmedzíme sa na formálny výpočet diferenciálu a overenie podmienky z Vety 4.1.1, že $D_yF(x_0, y_0)$ má ohraničený inverzný. Keďže deriváciu zobrazenia na nekonečnorozmernom priestore nemožno reprezentovať konečnou tabuľkou hodnôt, spravidla ho treba zapísať ako zobrazenie, povedzme $h \mapsto DF(x)h$. V súlade s premennou zobrazenia F, podľa ktorej sa derivuje, budeme premennú zobrazenia $DF(x)$ spravidla označovať pridaním symbolu δ k premennej. (teda povedzme $\delta x \mapsto DF(x)\delta x$. Symbol δx, atď. treba teda chápať chápať ako symbol pre jednu premennú.

4.2.2. Príklad. *Funkcia ako parameter.*

Vetu 4.1.1 o implicitnej funkcii môžme interpretovať ako výpoveď o tom, ako sa správa riešenie y rovnice $F(x, y) = 0$ pri zmene jej vonkajšieho parametra x.

Skúmajme teraz riešenia x rovnice

$$f(x) = 0. \tag{4.6}$$

V tejto rovnici zdanlivo nijaké parametre nevystupujú. Môže nás však zaujímať, čo sa s riešeniami rovnice (4.6) stane, ak v nejakom funkcionálnom priestore zmeníme funkciu f. Takto vlastne za funkcionálny parameter v rovnici (4.6) môžeme považovať samotnú funkciu f!

Dokážeme nasledovné tvrdenie:

Nech X, Y sú B-priestory, $U \subset X$ je otvorená a $f \in C^1(\bar{U}, Y)$. Nech $f(x_0) = 0$ pri $x_0 \in U$. Predpokladajme že $Df(x_0)$ má ohraničený inverzný. Potom existuje okolie W funkcie f v $C^1(\bar{U}, Y)$ a okolie V bodu x_0 také, že pre každé $g \in W$ existuje jediný bod $\varphi(g) \in V$ taký, že $g(\varphi(g)) = 0$; funkcia φ je C^1 funkciou g.

Aby sme tvrdenie dokázali, použijeme Vetu 4.1.1 na funkciu $F : C^1(C^1(\bar{U}, Y) \times U, Y)$, danú predpisom

$$F(g, x) = g(x).$$

Vypočítame diferenciál funkcie F v smere:

$$\begin{aligned}
\partial_{(\delta g, \delta x)} F(g, x) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [F(g + t\delta g, x + t\delta x) - F(g, x)] \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [g(x + t\delta x) + t\delta g(x + t\delta x) - g(x)] \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [g(x) + t(Dg(x)\delta x + \delta g(x)) + o(t) - g(x)] \\
&= Dg(x)\delta x + \delta g(x).
\end{aligned}$$

Zobrazenie $(\delta g, \delta x) \mapsto Dg(x)\delta x + \delta g(x)$ je zrejme lineárne ohraničené a preto predstavuje $dF(g, x)$. Overenie, že $DF(g, x)$ existuje, ponecháme podľa dohody na čitateľa.

Podľa predpokladu platí

$$F(f, x_0) = f(x_0) = 0,$$

tvrdenie teda vyplynie z Vety 4.1.1, ak overíme, že $D_x F(f, x_0)$ má inverzný spojitý. Zrejme platí

$$D_x F(f, x_0) = Df(x_0),$$

$Df(x_0)$ však má spojitý inverzný operátor podľa predpokladu.

4.2.3. Príklad. *Lokálna existencia, jednoznačnosť a spojitá závislosť riešení diferenciálnej rovnice na počiatočných dátach.*

Túto úlohu sme už riešili v Príklade 3.2.6. pomocou princípu rovnomernej kontrakcie. Vtipné škálovanie nám umožní riešiť ju pomocou vety o implicitnej funkcii.

Ako v Príklade 3.2.6. hľadajme riešenie diferenciálnej rovnice

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \tag{4.7}$$

(závislej od parametra μ), spĺňajúce podmienku

$$x(\tau) = \xi. \tag{4.8}$$

K predpokladom o x, f, τ, ξ z Príkladu 3.2.6. pridáme, že f je C^1 funkciou premenných t, x, μ pre $(t, x) \in U$ a $\mu \in W$, kde W je otvorenou podmnožinou Banachovho priestoru P.

Cieľ dôkazu z Príkladu 3.2.6. doplníme o cieľ Cvičenia 3.2.7.5 - dokázať aj C^r-závislosť riešenia od parametra μ.

Ak x je riešením (40.1), (40.2) na intervale $[\tau - \alpha, \tau + \alpha]$ a $y(\sigma) = x(\alpha\sigma + \tau) - \xi$, potom $y(\sigma)$ spĺňa rovnicu

$$dy/d\sigma = \alpha f(\alpha\sigma + \tau, \xi + y, \mu) \tag{4.9}$$

na intervale $[-1, 1]$ a počiatočnú podmienku

$$y(0) = 0 \tag{4.10}$$

označíme

$$\begin{aligned} Y =& \{\varphi \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}^n) : y(0) = 0\} \\ Z =& C([-1, 1], \mathbb{R}^n) \\ X =& \mathbb{R} \times U \times W \end{aligned}$$

a funkciu $F : X \times Y \to Z$ definujeme predpisom $F(\alpha, \tau, \xi, \mu, y)(\sigma) = y'(\sigma) - \alpha f(\alpha\sigma + \tau, \xi + y(\sigma), \mu)$ pre $-1 \leq \sigma \leq 1$. Zrejme y spĺňa (4.9), (4.10) práve vtedy ak

$$F(\alpha, \tau, \xi, \mu, y) = 0. \tag{4.11}$$

Pre ľubovoľné $(\tau_0, \xi_0, \mu_0) \in U \times W$ zrejme platí

$$F(0, \tau_0, \xi_0, \mu_0, 0) = 0.$$

Ak overíme splnenie ďalších predpokladov Vety 4.1.1 - C^r-diferencovateľnosť F a existenciu spojitého inverzného operátora k $D_yF(0,\tau_0,\xi_0,\mu_0)$, z Vety 4.1.1, dostaneme lokálnu (v (τ,ξ,μ) existenciu funkcie $y = y(\alpha,\tau,\xi,\mu)$, spĺňajúcu rovnicu (4.11) a jej C^r-závislosť od α,τ,ξ,μ. No a to značí, že funkcia

$$x(t) = \xi + y\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)$$

je riešením problému (4.7), (4.8) pre malé α (všimnime si, že dĺžka intervalu, na ktorom dostaneme riešenie, je iba 2α!).

Obmedzíme sa opäť na výpočet smerových derivácií F v bode $(0,\xi_0,\tau_0,\mu_0,0)$. Overenie splnenia podmienky existencie spojitej inverzie D_yF z Vety 4.1.1. a diferencovateľnosti v zmysle krokov 2 a 3 z Príkladu 2.3.6 ponecháme na čitateľa.

Platí

$$\begin{aligned}
&F(\alpha+\vartheta\delta\alpha,\tau+\vartheta\delta\tau,\xi+\vartheta\delta\xi,\mu+\vartheta\delta\mu,y+\vartheta\delta y)(\sigma) - F(\alpha,\tau,\xi,\mu,y)(\sigma)\\
=&y'(\sigma)+\vartheta\delta y'(\sigma) - (\alpha+\vartheta\delta\alpha)f((\alpha+\vartheta\delta\alpha)\sigma+\tau+\vartheta\delta\tau,\xi+\delta\xi\\
&\quad + y(\sigma)+\vartheta\delta y(\sigma),\mu+\vartheta\delta\mu) - y'(\sigma)+\alpha f(\alpha\sigma+\tau,\xi+y(\sigma),\mu) =\\
=&\vartheta\left[(\delta y)'(\sigma) - \alpha D_t f(\alpha\sigma+\tau,\xi+y(\sigma),\mu)((\delta\alpha)\sigma+\delta\tau)\right.\\
&\quad - \alpha D_x f(\alpha\sigma+\tau,\xi+y(\sigma),\mu)(\delta\xi+\delta y(\sigma))\\
&\quad \left. -\ \alpha D_\mu f(\alpha\sigma+\tau,\xi+y(\sigma),\mu)\delta\mu - \delta\alpha f(\alpha\sigma+\tau,\xi+y(\sigma),\mu)\right]\\
&\quad + o(\vartheta),
\end{aligned}$$

z čoho (za predpokladu existencie DF) vyplýva

$$\begin{aligned}
&[DF(\alpha,\tau,\xi,\mu,y)(\delta\alpha,\delta\tau,\delta\xi,\delta\mu,\delta y)](\sigma)\\
&\ =\delta y'(\sigma) - [\alpha D_t f(\alpha\sigma+\tau,\xi+y(\sigma),\mu) + f(\alpha\sigma+\tau,\xi+y(\sigma),\mu)]\,\delta\alpha\\
&\quad - \alpha D_t f(\alpha\sigma+\tau,\xi+y(\sigma),\mu)\delta\tau - \alpha D_x f(\alpha\sigma+\tau,\xi+y(\sigma),\mu)\delta\xi\\
&\quad - \alpha D_\mu f(\alpha\sigma+\tau,\xi+y(\sigma),\mu)\delta\mu - \alpha D_x f(\alpha\sigma+\tau,\xi+y(\sigma),\mu)\delta y(\sigma).
\end{aligned}$$

Pre $\alpha = 0$, $\tau = \tau_0$, $\xi = \xi_0$, $\mu = \mu_0$ dostávame

$$DF(0,\tau_0,\xi_0,\mu_0,0)(0,0,0,0,\delta y)(\sigma) = \delta y'(\sigma),$$

čo znamená

$$D_yF(0,\tau_0,\xi_0,\mu_0,0)\delta y = \delta y'.$$

Tento operátor má zrejme ohraničený inverzný zo $Z \to Y$,

$$[D_yF(0,\tau_0,\xi_0,\mu_0,0)]^{-1}\delta z(\sigma) = \int_0^\sigma \delta z(\vartheta)d\vartheta.$$

Tým je overovanie predpokladov Vety 4.1.1 ukončené.

4.2.4. Príklad. *Periodické riešenie slabo nelineárnej diferenciálnej rovnice.*

Uvažujme diferenciálnu rovnicu

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.12}$$

kde $f \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ je periodická v t s periódou T. Zaujíma nás, či rovnica (4.12) má periodické riešenie s periódou T.

Riešenie budeme hľadať tak, že sa vynasnažíme nájsť bod x_0, cez ktorý by pre $t = 0$ takéto riešenie prechádzalo. Podľa formuly variácie konštánt riešenie $x(t, x_0)$ rovnice (4.12), prechádzajúce bodom x_0 pri $t = 0$ spĺňa integrálnu rovnicu

$$x(t,x_0) = e^{tA}x_0 + \varepsilon \int_0^t e^{(t-s)A} f(s, x(s,x_0))ds.$$

(čo si možno priamo overiť).

Riešenie $x(t, x_0)$ je periodické s periódou T práve vtedy, ak platí $x(T, x_0) = x_0$, alebo ekvivalentne,

$$x_0 = e^{TA}x_0 + \varepsilon \int_0^T e^{(T-s)A} f(s, x(s,x_0))ds. \tag{4.13}$$

Rovnicu (43.1) môžeme zapísať v tvare

$$F(\varepsilon, x_0) = 0, \tag{4.14}$$

kde $F \in C^1((-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times G, \mathbb{R}^n)$ je dané predpisom

$$F(\varepsilon, x_0) = (I - e^{TA})x_0 - \varepsilon \int_0^T e^{(T-s)A} f(s, x(s,x_0))ds,$$

a kde $0 < \varepsilon_0 < \infty$ a ohraničená otvorená oblasť G sú volené tak, aby interval existencie riešenia $x(t, x_0)$ obsahoval $[0, T]$. Skutočnosť, že také G a ε_0 možno zvoliť, vyplýva zo základnej vety o spojitej závislosti riešenia diferenciálnej rovnice od počiatočných dát a parametrov.

Na hľadanie x_0 pri dostatočne malom $|\varepsilon|$ použijeme Vetu 4.1.1. Platí $F(0,0) = 0$, stačí nám teda overiť, že $D_{x_0}F(0,0)$ je regulárna matica. Platí $D_{x_0}F(0,0) = I - e^{TA}$.

Ak teda $\det(I - e^{TA} \neq 0$, má rovnica (4.14) podľa Vety 4.1.1 lokálne jediné riešenie. Toto riešenie je počiatočnou podmienkou periodického riešenia s malou amplitúdou.

Všimnime si ešte, že podmienka

$$\det(I - e^{TA} \neq 0. \tag{4.15}$$

je ekvivalentná podmienke $e^{AT}x_0 \neq x_0$ pri ľubovoľnom $x_0 \neq 0$, t.j. podmienke, že rovnica $\dot{x} = Ax$ nemá netriviálne periodické riešenie s periódou T. V reči teórie kmitania, "nelineárne budenie" nie je v rezonancii s vlastným kmitaním lineárnej rovnice $x = Ax$.

4.2.5. Príklad. Poincarého zobrazenie.

Predpokladajme, že diferenciálna rovnica

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

má periodickú trajektóriu $\Gamma : x = \gamma(t)$ s najmenšou periódou $T > 0$. Zvolíme bod $\hat{x} \in \Gamma$ a vedieme cezeň nadrovinu Σ tak, že Γ sa jej nedotýka. Intuitívne očakávame, že existuje zobrazenie P otvoreného okolia U bodu $\hat{x}$ v Σ do Σ, definované takto:

$P(x_0)$ je prvý priesečník trajektórie $x(t, x_0)$ cez bod $x_0 \in U$ s Σ.

Dokážeme s pomocou Vety 4.1.1., že ak f je C^r, $r > 0$, potom P je dobre definované v C^r.

Nadrovina Σ je daná rovnicou

$$< a, x >= b,$$

kde $b =< a, \hat{x} >$. Predpoklad, že trajektória Γ sa v bode $\hat{x}$ nedotýka Σ je vyjadrený vzťahom

$$< a, f(\hat{x}) >\neq 0. \tag{4.16}$$

Podľa definície je

$$P(\xi) = x(\tau(\xi), \xi), \tag{4.17}$$

kde $t = \tau(\xi) > 0$ je najmenší čas, v ktorom $x(t, \xi) \in \Sigma$, teda

$$< a, x(\tau(\xi), \xi) >= b. \tag{4.18}$$

Keďže $x(t, \xi)$ je C^r funkciou t a ξ, vzhľadom na (4.17) stačí dokázať, že τ je lokálne v okolí bodu $(\hat{x}, T)$ C^r funkciou ξ. Aby sme to dokázali, použijeme Vetu 4.1.1 na implicitný vzťah (4.18), ktorým je τ definované.

Funkcia

$$F(\xi, \tau) =< a, x(\tau, \xi) > -b$$

je zrejme C^r; ďalej platí

$$F(\hat{x}, T) =< a, x(T, \hat{x}) > -b =< a, \hat{x} > -b = 0$$

a

$$\begin{aligned} D_\tau F(\hat{x}, T) &=< a, \frac{dx}{dt}(x(T, \hat{x})) >=< a, f(x(T, \hat{x})) > \\ &=< a, f(\hat{x}) >\neq 0 \end{aligned}$$

podľa predpokladu (4.16) -

Poincarého zobrazenie hrá kľúčovú úlohu pri vyšetrovaní kvalitatívnych vlastností (stabilita, atď.) periodických riešení diferenciálnych rovníc.

4.2.6. Príklad. *Veta o paralelizácii (flow box theorem, teorema o vyprjamlenii).*

Nech $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$, $0 < r \le \infty$ a nech $x_0 \in U$, $f(x_0) \neq 0$. Potom existuje C^{r-1}-difeomorfizmus Φ: $V \to \Phi(V) \subset \mathbb{R}^n$ okolia V bodu $x_0 \in V \subset U$taký, že trajektórie diferenciálnej rovnice

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.19}$$

vo V sa zobrazením Φ zobrazia na trajektórie rovnice

$$\dot{y}_1 = 1, \ \dot{y}_2 = 0, \ \ldots, \ \dot{y}_n = 0, \tag{4.20}$$

teda na časti priamok

$$y_2 = \text{ const}, \ y_n = \text{ const}$$

Táto veta hovorí, že lokálne v okolí nekritického bodu vektorového poľa (= nestacionárneho bodu diferenciálnej rovnice) má geometria jeho trajektórií jednotnú a veľmi jednoduchú štruktúru. Lokálna klasifikácia diferenciálnych rovníc z hľadiska invariantných vzhľadom na zámenu súradníc vlastností ich trajektórií je zaujímavá len v okolí stacionárnych bodov.

Naznačíme, ako úlohu riešiť pomocou Vety 4.1.1. Pretože detaily overovania postupu a voľby priestorov nevyžadujú oproti predchádzajúcim príkladom nové obraty, ponechávame ich na čitateľa.

Zostrojíme zobrazenie $\Psi = \Phi^{-1}$. Bez újmy na všeobecnosti predpokladáme $x_0 = 0$, $f(x_0) = e_1$.

Zobrazenie zvolíme tak, že bude identitou na rovine $x_1 = 0$ ($\equiv y_1 = 0$).

Ak označíme $x(t, x^0)$ trajektóriu (4.19) cez x^0 a $y(t, y^0)$ trajektóriu (4.20) cez y_0, platí

$$\Psi(y_1, \ldots, y_n) = (0, y_2, \ldots, y_n) + \int_0^1 f(\Psi(\vartheta, y_2, \ldots, y_n)) d\vartheta.$$

Definujeme zobrazenie $F : C^r(I, \mathbb{R}^n) \times C^{r-1}(I, \mathbb{R}^n) \to C^{r-1}(I, \mathbb{R}^n)$, kde I je dostatočne malý interval v $\mathbb{R}^n$, obsahujúci 0 vo svojom vnútri.

$$F(f, \Psi)(y_1, \ldots, y_n) = \Psi(y_1, \ldots, y_n) - (0, y_2, \ldots, y_n) - \int_0^{y_1} f(\Psi(\vartheta, y_2, \ldots, y_n)) d\vartheta.$$

Pre $f \equiv e_1$ platí

$$F(f, \mathrm{id}) = 0.$$

Derivujúc F formálne dostávame

$$DF(f, \Psi)(\delta f, \delta\psi) = - \int_0^{y_1} \delta f(\Psi(\vartheta, y_2, \ldots, y_n)) d\vartheta$$

$$+ \delta\Psi(y_1, \ldots, y_n) - \int_0^{y_1} Df(\Psi(\vartheta, y_2, \ldots, y_n)) \delta\Psi(\vartheta, y_2, \ldots, y_n)) d\vartheta$$

(všimnime si, že sme *museli* zľaviť zo stupňa diferencovateľnosti Ψ),

$$D_\Psi F(e_1, \mathrm{id}) \delta\Psi = \delta\Psi.$$

To značí, že $D_\Psi F(e_1, \mathrm{id})$ je identita a ako taká má ohraničený inverzný. Dokončenie dôkazu ponechávame na cvičenie.

4.2.7. Príklad. Strata hladkosti.

Týmto príkladom chceme ukázať, že overovanie diferencovateľnosti zobrazenia netreba brať na ľahkú váhu.

K danému zobrazeniu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ blízkemu identite hľadajme zobrazenie blízke identite také, že $g \circ g = f$.

Funkcia g je riešením rovnice $F(f, g) = 0$, kde

$$F(f, g) = f - g \circ g.$$

Pre $f = \mathrm{id}$ je zrejmým riešením $g = \mathrm{id}$. Otázkou je, či môžeme zvoliť vhodné funkcionálne priestory pre f a $g$také, aby sme mohli použiť Vetu 4.1.1.

Formálnym derivovaním dostávame

$$D_g F(f, g)(\delta f, \delta g)(x) = -D_g(x)\delta g(x) - \delta g(g(x)).$$

Ak by sme volili $g \in C^r$, potom $D_g F(f, g) : C^r \to C^{r-1}$, takže $D_g F(\mathrm{id}, \mathrm{id}) = -2\delta g(x)$ zrejme nemá inverzné zobrazenie (vzor funkcie z C^{r-1} by opäť bol z C^{r-1}). Tomuto javu sa hovorí "strata diferencovateľnosti" a je podstatnou prekážkou použiteľnosti vety o implicitnej funkcii. Napriek tomu sa v matematickej literatúre nájdu "aplikácie" vety s touto chybou.

4.2.8 Cvičenia

1. V príkladoch 4.2.2, 4.2.3, 4.2.6 rozmyslite dopodrobna diferencovateľnosť funkcie F.
2. Zovšeobecnite Príklad 4.2.4 v duchu Príkladu 4.2.2 - miesto parametra ε považujte za parameter samotnú funkciu f.
3. Zovšeobecnite Príklad 4.2.4 na prípad periodickej premennej matice $A(t)$.
4. Dotiahnite do konca Príklad 4.2.6
5. Dokážte dopodrobna existenciu matice S v príklade 4.2.1
6. Nájdite podmienky, za akých existuje riešenie okrajovej úlohy

$$u" + [a + \varepsilon f(x, u)] = 0$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

pre ε dosť malé.

4.3. Elementy teórie bifurkácií

Vetu o implicitnej funkcii môžeme interpretovať aj ako vetu o závislosti riešenia od parametrov:

Ak rovnica

$$F(x, \mu) = 0 \tag{4.21}$$

pre x, závislá od parametra μ má pre $\mu = \mu_0$ riešenie $x = x_0$, potom sa "vo všeobecnom prípade", t. j. ak $D_x F(x_0, \mu_0)$ má ohraničený inverzný, pri blízkych μ lokálne v okolí x_0 situácia veľmi nezmení - rovnica (4.21) má naďalej jediné riešenie a to závisí spojito od μ. Pre aplikácie sú však zaujímavé práve hraničné prípady. Nech napr. v (4.21) je $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ a $F(0,\mu) = 0$ pre $0 \le \mu \le 1$, ale $D_xF(0,0) > 0$, $D_xF(0,1) < 0$. Ak F ja C^1, potom pre nejaké $\mu^* \in (0,1)$ platí $D_xF(0,\mu^*) = 0$ a teda pre $(0,\mu^*)$ nie sú splnené podmienky Vety 4.1.1. Čo sa vtedy stane s riešeniami?

Príklad funkcie

$$F(x,\mu) = 2(\mu - 1/2)x - x^3$$

(ktorý si čitateľ poľahky sám vyšetrí) ukazuje, že riešenia sa v takomto bode môžu vetviť.

Tomuto javu sa hovorí "bifurkácia riešení". Bifurkácie majú na svedomí to, že sa napr. prút pri postupnom zvyšovaní tlaku naň pri určitej hodnote tlaku vybočí, alebo to, že papier pri postupnom nahrievaní odrazu vzbľkne.

Pochopeniu bifurkácií sa pre ich dôležitosť v aplikáciách - ale aj vzhľadom na ich vnútornú krásu - v súčasnosti venuje veľká pozornosť. V tejto kapitole urobíme malú exkurziu do ich teórie a oboznámime sa s niektorými jej základnými prvkami.

4.3.1. Ľapunovova-Schmidtova redukcia. Nech $U \subset X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$, $M = \mathbb{R}^p$, $0 \in U$ a nech $F \subset C^2(U,M)$, $F(0,0) = 0$. Predpokladajme, že podmienky Vety 4.1.1 o implicitnej funkcii nie sú splnené, t.j. $A = D_xF(0,0)$ nie je invertibilné. Ekvivalentne môžeme povedať, že buď $\dim \mathcal{N}(A) > 0$, alebo $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A) = n - \dim \mathcal{R}(A) > 0$.

Označíme $k = \dim \mathcal{N}(A)$, $l = \operatorname{codim} \mathcal{R}(A) = n - \dim \mathcal{R}(A)$ $P : X \to \mathcal{N}(A)$, $Q : Y \to \mathcal{R}(A)$ nejaké projekcie a pre $x \in X$ budeme písať $x_1 = Px$, $x_2 = (I-P)x$. Ďalej označíme $A_0 = A|_{(I-P)X}$. Ľahko sa presvedčíme, že $\mathcal{R}(A_0) = \mathcal{R}(A)$ a že existuje pravé inverzné zobrazenie $K : \mathcal{R}(A) \to (I-P)X$:

$$\begin{aligned} AK &= id|_{\mathcal{R}(A)} \\ KA_0 &= id|_{(I-P)X}. \end{aligned}$$

Keďže $F(0,0) = 0$, $D_xF(0,0) = A$, môžeme písať

$$F(x,\mu) = Ax + f(x,\mu),$$

kde $f \in C^2(U,M)$,

$$f(0,0) = 0, \; D_xf(0,0) = 0. \tag{4.22}$$

Keďže $Ax_1 = 0$ pre $x_1 \in \mathcal{N}(A)$, platí

$$F(x,\mu) = Ax_2 + f(x_1 + x_2, \mu).$$

Keďže $Q|_{\mathcal{R}(A)} = id$ a $(I-Q)A = 0$, (4.21) platí práve vtedy, ak

$$0 = QAx_2 + Qf(x_1 + x_2, \mu) = Ax_2 + Qf(x_1 + x_2, \mu) \tag{4.23}$$

a súčasne

$$0 = (I-Q)Ax_2 + (I-Q)f(x_1 + x_2, \mu) = (I-Q)f(x_1 + x_2, \mu).$$

Ak na (4.22) aplikujeme K zľava, dostávame ekvivalentnú rovnicu

$$\Phi(x_1, x_2) = x_2 - KQf(x_1 + x_2, \mu) = 0. \tag{4.24}$$

Z (4.22) vyplýva $\Phi(0,0) = 0$ a $D_{x_2}\Phi(0,0) = id$. Podľa Vety 4.2.1 možno teda lokálne z rovnice (4.24) vyjadriť x_2 ako C^2 funkciu premenných x_1, μ, teda

$$x_2 = \psi(x_1, \mu).$$

Zrejme platí

$$\psi(0,0) = 0. \tag{4.25}$$

Pretože $D_{x_1}\Phi(0,0) = 0$ formula (4.21) dáva

$$D_{x_1}\psi(0,0) = 0. \tag{4.26}$$

Bod $x = (x_1, x_2)$ je teda riešením (4.21) práve vtedy, ak platí

$$(I-Q)f(x_1 + \psi(x_1, \mu), \mu) = 0. \tag{4.27}$$

Rovnica (4.27) sa nazýva *bifurkačnou rovnicou* úlohy. Zmysel Ľapunovovej-Schmidtovej redukcie, ktorej je výsledkom je ten, že úlohu vysokej dimenzie redukuje na úlohu dimenzie l, ktorá je spravidla oveľa nižšia.

4.3.2 Poznámka. Ľapunovovu-Schmidtovu redukciu sme pre jednoduchosť uviedli pre konečnorozmerný prípad. Možno ju však použiť aj pri priestoroch X, Y nekonečnej dimenzie, ak A je *Fredholmov operátor*, t.j. $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$, $\dim \mathcal{R}(I-Q) < \infty$ a $\mathcal{R}(A)$ je uzavretý priestor. V prípade nekonečnorozmerných priestorov má $L-S$ redukcia ešte dramatickejší efekt, pretože redukuje nekonečnorozmernú úlohu na konečnorozmernú, spravidla malej dimenzie.

4.3.3 Bifurkácia z jednoduchej vlastnej hodnoty..

Predpokladajme, že v 4.3.1 $m = n$, $p = 1$ a $h(A) = n - 1$ (t.j. 0 je algebraicky jednoduchou vlastnou hodnotou matice A).

V takomto prípade môžeme lineárnou zámenou súradníc v $\mathbb{R}^n$ dosiahnuť, že

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix},$$

kde A_0 je regulárna (Príklad 4.2.1, Cvičenie 4.2.8.5).

V takýchto súradniciach je $\mathcal{N}(A) = \{x_2 = 0, \ldots, x_n = 0\}$ a $\mathcal{R}(A) = \{x_1 = 0\}$, môžeme teda voliť

$$\begin{aligned} &Px = x_1 \\ &Qx_2 = \tilde{x} = (x_2, \ldots, x_n), \\ &K\tilde{x} = \tilde{x}. \end{aligned}$$

Zložky $x_1, \tilde{x}$ zodpovedajú zložkám x_1, x_2 zo 4.3.1. Platí

$$\tilde{f}(x, \mu) = KQ(x, \mu) = (f_2(x, \mu), \ldots, f_n(x, \mu)).$$

Funkcia π je teda funkciou premenných x_1 a μ s hodnotami v priestore $x_1 = 0$. Z (4.26) a (4.27) vyplýva

$$\psi(x_1, \mu) = a\mu + O(|x_1|^2 + |\mu|^2), \tag{4.28}$$

kde $a = (a_2, \ldots, a_n) = D_\mu \tilde{f}(0, 0)$.

Bifurkačná rovnica bude mať tvar

$$\begin{aligned} O = (I - Q)f(x_1 + \psi(x_1, \mu), \mu) = f_1(x_1 + \psi(x_1, \mu), \mu) = \\ = \alpha\mu + \beta x_1^2 + O(|\mu| + |x_1|^2) \end{aligned} \tag{4.29}$$

kde $\alpha = D_\mu f(0, 0)$ a $\beta = D_{x_1}^2 f(0, 0)$ (z (4.28) a (4.22) vyplýva, že vektor a koeficienty α, β neovplyvní). Vo všeobecnom prípade, ak $\alpha \neq 0$, podľa Vety 4.1.1 možno z (4.29) vyjadriť μ ako funkciu x_1. Zo (4.1) a formuly pre druhú deriváciu funkcie, danej implicitne (Cvičenie 4.1.8.1) vyplýva

$$\mu = -\frac{\beta}{\alpha} x_1^2 + O(x_1^2).$$

Ak aj $\beta \neq 0$, vyzerá teda množina núl funkcie F v okolí bodu $(0, 0)$ ako parabola, ktorá je otvorená doľava alebo doprava podľa toho, či $\alpha\beta > 0$ alebo $\alpha\beta < 0$.

Ako vidno, vo "všeobecnom prípade" pri prechode cez bod, v ktorom linearizácia má jednoduchú vlastnú hodnotu, dve vetvy riešenia rovnice $F(x, \mu) = 0$ splynú a zaniknú.

Celkove obrázok vyzerá takto:

4.3.4 Príklad. Periodické riešenie slabo nelineárnej diferenciálnej rovnice.

Ako v Príklade 4.2.4, budeme sa zaujímať o existenciu periodického riešenia diferenciálnej rovnice

$$\dot{x} = Ax + \epsilon f(t, x) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.30}$$

kde $f \in C^2(\mathbb{T} \times U, \mathbb{R}^n)$, U otvorené okolie O v $\mathbb{R}^n$ je periodické v t s periódou $\mathcal{T}$. Pre jednoduchosť položíme bez ujmy všeobecnosti $T = 2\pi$.

Predpokladajme, že A nespĺňa podmienku $\det(e^{2\pi A} - I) \neq 0$ z Príkladu 4.2.4, že má algebraicky jednoduchú dvojicu komplexne združených vlastných hodnôt $\pm i$ a že nijaká iná jej vlastná hodnota nie je celočíselným násobkom i. Potom existuje lineárna transformácia v $\mathbb{R}^n$, ktorá maticu prevedie do blokovo diagonálneho tvaru

$$diag\left\{J, A_0\right\}, \tag{4.31}$$

kde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a $\det(e^{2\pi A_0} - I) \neq 0$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že matica A má tvar (4.3.1). Rovnicu (4.30) môžeme potom písať ako systém

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Jy + \epsilon g(t, x) \\ z &= A_0 z + \epsilon h(t, x)\text{'} \end{aligned}$$

kde $y \in \mathbb{R}^2,\ z \in \mathbb{R}^{n-2},\ x = (y, z) \in \mathbb{R}^n$, platí

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

V Príklade 4.2.4 sme odvodili, že riešenie $x(t, x^0, \epsilon)$ rovnice (4.30), vychádzajúce z bodu $x_0 = (y_0, z_0)$ pri $t = 0$ je periodické s periódou 2π práve vtedy, ak pre

$$F(\epsilon, x_0) = (e^{2\pi A} - I)x_0 + \epsilon \int_0^{2\pi} e^{A(2\pi - t)} f(t, x(t, x_0, \epsilon))dt$$

platí

$$F(\epsilon, x_0) = 0. \tag{4.32}$$

Z $A = diag\{J, A_0\}$ vyplýva

$$D_{x_0}F(0,0) = diag\left\{0_{2\times 2}, e^{2\pi A_0 - I}\right\}.$$

Platí teda

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(D_{x_0}F(0,0)) &= \{(y,z) : x = 0\},\\ \mathcal{R}(D_{x_0}F(0,0)) &= \{(y,z) : y = 0\}\end{aligned},$$

a za projekcie P, Q $L-S$ metódy 4.3.1 môžeme vziať

$$P(y,z) = y,\ Q = I - P,\ K = (e^{2\pi A_0} - I)^{-1}.$$

V zmysle L-S metódy definujeme $z_0 = \psi(y_0, \epsilon)$ ako jediné riešenie rovnice

$$QF(\epsilon, y_0, z_0) = 0,$$

t.j.

$$z_0 = \epsilon(e^{2\pi A_0} - I)^{-1}\int_0^{2\pi} e^{A_0(2\pi - t)}h(t, x(t, y_0, z_0, \epsilon))dt = 0. \tag{4.33}$$

Vzhľadom na špeciálne postavenie parametra ϵ v (4.33) (je ním násobená pravá strana ako celok) platí

$$\psi(0, y_0) \equiv 0$$

a teda

$$\psi(\epsilon, y_0) = \epsilon\psi_0(\epsilon, y_0),$$

kde ψ_0 je C^1, $\psi_0(\epsilon, y_0) = O(|y_0|)$. Bifurkačná rovnica

$$(I - Q)F(\epsilon, y_0, \psi(y_0, \epsilon)) = 0$$

má tvar

$$\epsilon\int_0^{2\pi} e^{J(2\pi - t)}g(t, x(t, y_0, \epsilon\psi_0(y_0, \epsilon), \epsilon))dt = 0.$$

Pre $\epsilon \neq 0$ je ekvivalentná rovnici

$$\int^{2\pi} e^{-Jt}g(t, x(t, y_0, \epsilon\psi_0(y_0, \epsilon), \epsilon))dt = 0. \tag{4.34}$$

Označme $g_0(t) = g(t, 0),\ G(t) = D_x g(t, 0)$, potom (4.34) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} e^{-Jt}g_0(t)dt + \int_0^{2\pi} e^{-Jt}G(t)D_{y_0}x(t,0,0)dty_0 +\\ &\epsilon\int_0^{2\pi} e^{-Jt}G(t)D_\epsilon x(t,0,0)dt + o(|y_0|) + o(\epsilon) = 0.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Z viet o diferencovaní riešenia podľa počiatočných podmienok (Príklad 3.2.6, Cvičenie 3.2.7.5) vyplýva

$$D_{y_0}x(t,0,0) = (e^{Jt},0)^T,$$
$$D_\epsilon x(t,0,0) = \int_0^t e^{J(t-s)}g_0(s)ds.$$

Podmienka (4.35) sa teda prepíše do tvaru

$$\int_0^{2\pi} e^{-Jt}g_0(t)dt + \int_0^{2\pi} e^{-Jt}G(t)e^{Jt}dty_0 +$$
$$+\epsilon\int_0^{2\pi} e^{-Jt}G(t)\int_0^t e^{J(t-s)}g_0(s)ds + o(|y_0|) + o(\epsilon) = 0.$$

Aby mala malé riešenie pre malé ϵ, musí platiť

$$\int_0^{2\pi} e^{-Jt}g_0(t)dt = 0. \tag{4.36}$$

Ak ďalej

$$\int_0^{2\pi} e^{-Jt}G(t)e^{Jt}dt$$

je regulárna matica, potom z Vety o implicitnej funkcii dostávame, že rovnica (4.32) má pre $\epsilon \neq 0$ jediné malé riešenie $(y_0, \psi(y_0,\epsilon))$, kde

$$y_0 = \left[\int_0^{2\pi} e^{-Jt}G(t)e^{Jt}dt\right]^{-1}\int_0^{2\pi} e^{-Jt}G(t)\int_0^t e^{J(t-s)}g_0(s)ds\epsilon + o(\epsilon).$$

Toto riešenie je počiatočným bodom jediného periodického riešenia s dostatočne malou amplitúdou.

4.3.5 Poznámka. Podmienka (4.36) je vlastne podmienkou existencie počiatočnej podmienky, z ktorej vychádza periodické riešenie nehomogénnej rovnice

$$\dot{z} = Ax + f(t,0)$$

typu "hodnosť rozšírenej matice sústavy rovná sa hodnosti matice lineárnej sústavy rovníc".

4.2.6 Eulerova-Bernoulliho tyč. V tomto príklade ilustrujeme použitie techniky z 4.3:1, 4.3.3 na analýzu matematického modelu tyče, ktorá pôsobením tlaku na jej konce pri určitej jeho hodnote vybočí.

Napriek tomu, že úlohu postavíme ako nekonečnorozmernú, nebudeme musieť siahnuť po teórii Fredholmových operátorov (Pozn. 4.3.2), ktorú sme nepreberali. Dôvod je ten, že operátor K zo 4.3.1 dokážeme skonštruovať explicitne.

Predstavme si tyč, upevnenú kĺbovo v dvoch bodoch.Na tyč vyvíjame tlak v smere spojnice bodov jej upevnenia.

Označíme
x - dĺžkovú súradnicu na spojnici bodov upevnenia tyče
s - dĺžkovú súradnicu na tyči
P - vyvíjaný tlak
φ - lokálny uhol, ktorý zviera tyč so spojnicou bodov upevnenia
y - lokálnu odchýlku bodu tyče od spojnice bodov jej upevnenia

V kľudovej polohe tyče sú sily, ktoré na ňu pôsobia v každom jej bode v rovnováhe. Týmito silami sú pružná sila, úmerná krivosti tyče a moment sily, spôsobenej tlakom. Podmienka ich rovnováhy je

$$-k\frac{d\varphi}{ds}(s) = Py(s). \tag{4.37}$$

Ak zvolíme dĺžku tyče za π, zapíšu sa podmienky jej upevnenia v tvare

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{4.38}$$

Uhol φ a výchylka y sú viazané vzťahom

$$dy/ds = \sin\varphi \tag{4.39}$$

Derivovaním (4.37) dostaneme

$$-k\frac{d^2\varphi}{ds^2} = P\sin\varphi,$$

alebo

$$d^2\varphi/ds^2 + \lambda^2\sin\varphi = 0, \tag{4.40}$$

kde parameter $\lambda^2 = P/k > 0$ rastie priamo úmerne P, podmienky (4.38) sa prepíšu do podmienok

$$\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0. \tag{4.41}$$

Označíme

$$X = \left\{\varphi \in C^2[0, 2\pi] : \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0\right\}$$
$$Y = C[0, 2\pi]$$

Definujeme $F : X \times \mathbb{R} \to Y$ predpisom

$$F(\varphi, \lambda)(s) = \varphi''(s) + \lambda\sin\varphi(s).$$

Zrejme platí

$$F(\varphi, \lambda) = 0 \tag{4.42}$$

Práve vtedy, ak φ je riešením úlohy (4.40), (4.41).

Obvyklým postupom (v zmysle Príkladu 2.3.6) možno dokázať, že F je C^2-diferencovateľná a platí

$$[D_\varphi F(\varphi, \lambda)\delta\lambda](s) = (\delta\varphi)''(s) + \lambda \cos\varphi(s)\delta\varphi(s).$$

Rovnica (4.42) má zrejme pre každé $\lambda \geq 0$ riešenie $\varphi = 0$, ktoré predstavuje priamu rovnovážnu polohu tyče. Z Vety 4.1.1 vyplýva, že z tohoto riešenia sa môžu odvetviť iné riešenia (s malými odchýlkami od priamej polohy) iba vtedy, ak $D_\varphi F(0, \lambda)$ nemá ohraničený inverzný operátor. Naším cieľom teda teraz bude takéto hodnoty λ nájsť.

Inverzný operátor $[D_\varphi F(0, \lambda)]^{-1}$ (pokiaľ existuje) priradí každému $u \in Y$ funkciu $\varphi \in X$ takú, že $[D_\varphi F(0, \lambda)]\varphi = u$, t.j. vyhovujúcu diferenciálnej rovnici

$$\varphi'' + \lambda^2\varphi = u(s). \tag{4.43}$$

Ako funkcia z X, φ spĺňa podmienky

$$\varphi'(0) = 0, \varphi(1) = 0. \tag{4.44}$$

Obvyklým postupom riešenia diferenciálnych rovníc (korene charakteristickej rovnice $\rightarrow$ lineárne nezávislé riešenia homogénnej rovnice $\rightarrow$ variácia konštánt) odvodíme všeobecné riešenie rovnice (4.43), (4.44)

$$\varphi(s) = \gamma\cos\lambda s + \delta\sin\lambda s + \int_0^s \sin\lambda(s-\sigma)u(\sigma)d\sigma \tag{4.45}$$

$$\varphi'(s) = \lambda(-\gamma\sin\lambda s + \delta\cos\lambda s + \int_0 \cos\lambda(s-\sigma)u(\sigma)ds. \tag{4.46}$$

Riešenie φ spĺňa prvú z podmienok (4.44) práve vtedy, ak $\delta = 0$; aby sme mohli splniť druhú z nich pri ľubovoľnej funkcii u, musí platiť $\sin\pi\lambda \neq 0$, čo je práve vtedy, ak $\lambda \neq 1, 2, 3, \ldots$. Potom riešením (4.43) v X je

$$\begin{aligned}
\varphi(s) =& [\sin\pi\lambda]^{-1} \int_0^\pi \cos\lambda(\pi - s)u(s)ds \sin\lambda s \\
&+ \int_0^s \sin(s-\sigma)u(s)ds \\
=& [\sin\pi\lambda]^{-1} \int_0^\pi \cos\lambda s u(s)ds \sin\lambda s \\
&+ \int_0^s \sin(s-\sigma)u(s)ds.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Poznamenajme, že formule (4.47) sa hovorí Greenova formula pre riešenie okrajovej úlohy (4.43), (4.44). Ponechávame na čitateľa, aby overil, že definuje ohraničený operátor z Y do X.

Z riešenia $\varphi = 0$ úlohy $F(\varphi, \lambda) = 0$ sa teda môžu odvetvovať nenulové riešenia iba pre $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$. Preskúmame situáciu pre $\lambda = 1$.

Pre $L - S$ redukciu zistíme $\mathcal{N}(A)$ a $\mathcal{R}(A)$ pre $A = D\varphi F(0, 1)$. Podľa definície je $\mathcal{N}(A)$ množina riešení (homogénnej) úlohy (4.43), (4.44) pre $u \equiv 0$. Keďže poznáme všeobecné riešenie homogénnej úlohy, ľahko sa presvedčíme, že $\mathcal{N}(A) = \{\gamma \cos s, \gamma \in \mathbb{R}\}$, teda $\mathcal{N}(A)$ je jednorozmerný priestor.

Priestor obrazov $\mathcal{R}(A)$ charakterizujeme tak, že určíme

$$\mathcal{R}(A) = \{u : \text{ existuje riešenie rovnice } \varphi'' + \varphi = u \text{ v } X\}.$$

Ako vyplýva z (4.45), (4.46), toto riešenie je dané formulou

$$\varphi(s) = \gamma \cos s + \int_0^s \sin(s - \sigma) u(\sigma) d\sigma; \tag{4.48}$$

ak $\varphi'(\pi) = 0$, t.j. ak

$$\int_0^\pi \cos s u(s) ds \left(= - \int_0^\pi \cos(\pi - s) u(s) ds \right) = 0. \tag{?}$$

Platí teda

$$\mathcal{R}(A) = \{u \in Y : \int_0^\pi \cos s u(s) ds = 0\}. \tag{4.49}$$

Každú funkciu $u \in X$ môžeme písať v tvare

$$u(s) = Qu(s) + \bar{u}, \tag{4.50}$$

kde projekcia $X \to \mathcal{R}(A)$ daná predpisom

$$Qu(s) = u(s) - \bar{u}$$

a

$$\bar{u} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \cos s u(s) ds.$$

Keďže $\bar{u}$ nadobúda reálne čísla, je codim $\mathcal{R}(A) = 1$; overiť si, že Q je projekcia, ponechávame na čitateľa.

Ako projekciu $P : X \to \mathcal{N}(A)$ môžeme vziať projekciu na prvý člen kosínového Fourierovho rozvoja

$$(P\varphi)(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\Pi \cos \sigma \varphi(\sigma) d\sigma \cos s. \tag{4.51}$$

Ak $u \in \mathcal{R}(A)$, potom Ku môžeme definovať ako riešenie rovnice (4.43), dané formulou (4.48) pri $\gamma = 0$, t.j.

$$(Ku)(s) = \int_0^s \sin(s - \sigma) u(\sigma) d\sigma.$$

Platí

$$F(\varphi,\lambda) = A\varphi + f(\varphi,\lambda)$$

kde

$$f(\varphi,\lambda) = \lambda^2 \sin\varphi - \varphi$$

a $\sin : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$ je Nemyckého operátor funkcie $\sin\varphi$, definovaný vzťahom

$$(\sin\varphi)(s) = \sin\varphi(s).$$

Podľa Cvičenia 2.5.6.3 platí

$$(\sin\varphi)(s) = \sin\varphi(s) - \frac{\varphi^3(s)}{G} + o(\|\varphi\|^3)$$

kde $\|\cdot\|$ je norma v $C^2[0,1]$ (pripomeňme (4.53) si, že norma v $C^2[0,1]$ je zdola odhadnutá normou v $C[0,1]$).

Sledujúc postup $L-S$ metódy zo 4.3.1 rozpíšeme rovnicu (4.42) na systém rovníc (4.22), (4.23), t.j.

$$A(I-P)\varphi + Qf(\varphi,\lambda) = 0 \tag{4.54}$$

$$(I-Q)f(\varphi,\mu) = 0. \tag{4.55}$$

Aplikáciou operátora (4.52) dostávame z (4.54) ekvivalentnú rovnicu

$$\tilde{\varphi} + K\varphi f(P\varphi,\tilde{\varphi},\lambda) = 0, \tag{4.56}$$

kde $\tilde{\varphi} = (I-P)\varphi$ a použitím (nekonečnorozmernej!) vety o implicitnej funkcii dostávame jej lokálne jednoznačné riešenie

$$\tilde{\varphi} = \psi(\gamma,\lambda^2),$$

kde $(P\varphi)(s) = \gamma\cos\varphi(s)$ a γ je Fourierov koeficient z (4.51). Z (4.53) a Cvičení 2.5.6.3, 4.1.8.4 vyplýva

$$D^j_\gamma\psi(0,0) = 0 \qquad \text{pre } j = 0,1,2,$$

a teda

$$\psi(\varphi,\lambda) = o(\|\varphi\|^3) + o(|\lambda^2 - 1|) \tag{4.57}$$

Vzhľadom na (4.57) dostávame dosadením (4.56) do bifurkačnej rovnice (4.55)

$$\begin{aligned}
0 =&(I-Q)\left[\lambda^2\sin(P\varphi + \psi(P\varphi,\lambda)) - (P\varphi + \psi(P\varphi,\lambda))\right]\\
=&(I-Q)\left[\lambda^2\left[\sin(P\varphi + \psi(P\varphi,\lambda)) - (P\varphi + \psi(P\varphi,\lambda))\right]\right.\\
&\left.+\ (\lambda^2-1)(P\varphi + \psi(P\varphi,\lambda))\right]\\
=&(I-Q)\left[\lambda^2(\sin P\varphi - P\varphi) + (\lambda^2-1)P\varphi\right]\\
&+ o(\|\varphi\|^3) + o(|\lambda^2-1|).
\end{aligned}$$

Podľa definície Q a (4.53) to značí

$$\alpha\gamma(\lambda^2 - 1) + \beta\lambda^2\gamma^3 + o(\gamma^3) + o(|\lambda^2 - 1|) = 0 \tag{4.58}$$

kde $\alpha = \int_0^\pi \cos^2 s ds > 0$, $\beta = \int_0^\pi \cos^4 s ds = 0$, pre $\gamma \neq 0$ je rovnica (4.58) ekvivalentná rovnici

$$\Phi(\gamma, \lambda^2) = \lambda^2 - 1 - \frac{\beta}{\alpha}\lambda^2\gamma^2 + o(\gamma^2) + o(|\lambda^2 - 1|) = 0.$$

Platí $D_{\lambda^2}\Phi(0,1) = 1$, preto podľa vety o implicitnej funkcii môžeme v okolí bodu (0,1) vyjadriť λ^2 ako C' funkciu γ, $\lambda^2 = \xi(\gamma)$.

Cvičenie 4.1.8.4 platí

$$\xi(\gamma) = 1 + \frac{\beta}{\alpha}\gamma^2 + o(\gamma^2).$$

To značí, že pri $\lambda = 1$ sa od priamej rovnovážnej polohy tyče odvetvia dve ďalšie rovnovážne polohy, ktoré existujú pre $\lambda^2 > 1$ a asymptoticky majú tvar sínu, ktorého amplitúda rastie kvadraticky s $\lambda^2 - 1$.

Podrobnejšou analýzou by sa ukázalo, že spomínané rovnovážne polohy sú navzájom symetrické (v skutočnosti jav prebieha v trojrozmernom priestore a tyč sa nám ideálne môže vychýliť do ľubovoľnej z nekonečného počtu radiálne symetrických polôh).

4.3.7 Poznámka. Analýzou rovnice, opisujúcej dynamiku prúta sa dá dokázať, že priama rovnovážna stabilita je stabilná pre $\lambda^2 \leq 1$ a nestabilná pre $\lambda > 1$, kým vychýlené rovnovážne polohy sú stabilné.

4.3.8 Cvičenia.

1. Dokážte detailne ohraničenosť operátora $C[0,\pi] \to C^2[0,\pi]$, daného formulou (4.47).
2. Vyložte detailne Poznámku 4.3.5.
3. Vykonajte analýzu bifurkácie periodického riešenia z 4.3.4 analogicky, ako v 4.3.6 (t.j. tak, že za priestor X vezmete namiesto priestoru $\mathbb{R}^n$ počiatočných podmienok vhodný funkcionálny priestor.
4. Vykonajte analýzu bifurkácie Bernoulliho tyče (z 4.3.6 čiastočne) analogicky, ako v 4.3.4 (t.j. tak, že za priestor X vezmete priestor počiatočných hodnôt $\varphi(0)$).