

CVIČENIA ZO STOCHASTICKÝCH METÓD OPERAČNEJ ANALÝZY

I. TEÓRIA HROMADNEJ OBSLUHY

1. Nájdite najmenej tri príklady systémov hromadnej obsluhy, odlišujúce sa v aspoň jednom z nasledovných charakteristík: počet obslužných liniek, obmedzenia na dĺžku frontu, priority
2. Dokážte, že platí

$$P(A|B, C) = P((A|B)|C)$$

3. Alternatívy
 - Množina stavov: konečná — spočítateľná — kontinuálna
 - Proces markovovský — nemarkovovský
 - homogénny — nehomogénny
 - s časom diskrétnym — spojitým
 umožňujú celkove 24 možností. Nájdite príklady procesov na čo najviac, ale aspoň štvrtiny (teda 6) z nich.
4. Vypočítajte limitné stacionárne rozloženie pre Markovov reťazec s diskrétnym časom, dvoma stavmi a prechodovou maticou

$$\text{a) } P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

5. Dokážte, že priestor l_1 je úplný
6. Dokážte, že lineárny operátor $A = \{a_{ij}\}_{i,j}$ na l_1 je ohraničený práve vtedy, ak $\sup_i \sum_j a_{ij} < \infty$
7. Dokážte, že ohraničený lineárny v operátor v l_1 je spojitým zobrazením
8. Dokážte, že množina bodov e_i , $i = 1, 2, \dots$, kde e_i je postupnosť ktorej i -tý prvok je 1 a ostatné sú nulové, je ohraničená, uzavretá, ale nie kompaktná
9. Dokážte, že operátor v l_1 s maticou

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

zobrazuje (konvexný ohraničený) simplex $0 \leq x_i \leq 1$, $\sum_{i=0}^{\infty} x_i = 1$ do seba, ale nemá pevný bod.

10. Markovov reťazec so spojitým časom a nekonečnou množinou stavov má intenzity prechodov

$$q_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pre } j < i \\ -\lambda & \text{pre } j = i \\ \lambda & \text{pre } j = i + 1 \\ 0 & \text{pre } j > i + 1 \end{cases}.$$

Vypočítajte jeho maticu prechodových pravdepodobností $\mathbf{P}(t)$.

Návod: napíšte diferenciálne rovnice pre $\mathbf{P}(t)$ a pokúste sa nájsť ich riešenie

11. Dokážte, že v náhodnom reťazci úlohy hromadnej obsluhy M/M/1/ ∞ sú všetky stavy navzájom dosiahnuteľné.
12. Odvodte formulu pre priemerný počet zákazníkov v úlohe M/M/1/ ∞ .

13. Informácie na informačnej telefónnej linke s priemerným trvaním 1 min majú exponenciálne rozloženie, záujem o informácie je Poissonovsky rozložený s priemerným počtom 30 za hodinu. Informácia stojí 50 hal/sec., polovica odmietnutých o informáciu opäť nepožiada. Aké priemerné straty má informačná kancelária v dôsledku odmietnutia zákazníkov? Ak prevádzka ďalšej linky stojí 100 Sk/hod., oplátí sa prevádzkovať ju?
14. Do odchodu vlaku zostávajú 3 minúty a v rade pred okienkom na lístky sú predomnou dvaja zákazníci. Rozloženie doby obsluhy zákazníka je exponenciálne s priemerom 15 sekúnd, čas, potrebný na nastúpenie do vlaku je 2 minúty. Aká je pravdepodobnosť, že vlak stihnem?
15. V čakárni u lekára je 5 miest na sedenie. V okamihu môjho príchodu sú všetky obsadené a ďalší traja pacienti stoja. Doba strávená pacientom u lekára je exponenciálne rozložená s priemernou hodnotou 5 minút. Môj zdravotný stav mi nedovoľuje stáť viac, ako 15 minút. Aká je pravdepodobnosť, že si do tejto doby budem môcť sadnúť?
16. Do malej trafiky pána Markova sa zmestí 5 zákazníkov. V ustálenom Markovskom režime prichádza do nej v priemere 10 zákazníkov za hodinu, obsluha jedného zákazníka trvá v priemere 5 minút. Sused si ide do trafiky kúpiť Mínius 0.7 dní a rozhodujú sa, či si má nasadiť čapicu, rieši nasledovné otázky: a) Aká je pravdepodobnosť, že bude čakať pred trafikou? b) Aká bude priemerná doba, strávená pred trafikou?
17. Pre dané počiatočné pravdepodobnosti $p_0(0), p_1(0)$ počtov zákazníkov v systéme hromadnej obsluhy $M/M/1/1$ vypočítajte ich hodnoty v čase t .
18. Urobte analýzu systému hromadnej obsluhy $M/M/1/1$ (bez čakania) v ustálenom režime: vypočítajte a) pravdepodobnosti p_0, p_1 počtov zákazníkov v systéme, b) priemerný počet odmietnutých zákazníkov.
19. Pre systém $M/M/1/n$ odvodte charakteristiky κ, γ
20. Majiteľ malej non-stop čerpacej stanice má priestor na 3 čakajúce autá, ďalšie autá nemôžu na ceste stáť. V priemere mu chodí 20 zákazníkov za hodinu, obsluha trvá v priemere 2 minúty a zisk z jedného zákazníka je v priemere 1 koruna. Má možnosť prenajať si od mesta priestor na parkovanie ďalšieho auta, prenájom by ho stál 500 korún mesačne. Oplátí sa mu to? (*predpokladá sa ustálený Poissonovský príchod zákazníkov a exponenciálny zákon rozdelenia doby obsluhy*)
21. Odvodte formuly pre $P(W > w)$ a $E(W)$ v úlohe $M/M/n/\infty$.
22. Obsluha zákazníka v kaderníctve má exponenciálne rozloženie s priemernou dobou 10 min., zákazníci prichádzajú náhodne Poissonovsky s priemerom 6 za hodinu. Aká je pravdepodobnosť, že z troch kaderníčov môže jedna vziať telefonickú rezerváciu bez toho, aby prerušila obsluhu?
23. V čakárni úradu, v ktorom vybavujú stránky dve referentky sú tri stoličky. Doba vybavovania stránky má exponenciálne rozloženie s priemerom 6 minút, stránky prichádzajú náhodne Poissonovsky v priemere 10 za hodinu. Ak prichodia stránka nájde v čakárni 4 čakajúce stránky, aká je pravdepodobnosť, že bude stáť viac ako 5 minút?
24. Cestovná kancelária s dvoma pracovníčkami vybavujúcimi stránky spríjemňuje čakanie zákazníkov tým, že im ponúka kávu. V priemere každý druhý prichodzí zákazník, ktorý nájde vo fronte aspoň jedného čakajúceho ponuku (raz) využije. Ak zákazníci prichádzajú náhodne Poissonovsky s priemerom 10 za hodinu a čas obsluhy je náhodný s exponenciálnym rozložením s priemerom 6 minút, koľko káv

- sa v priemere minie za hodinu?
25. vynechaná
 26. Na pošte sú tri okienka na príjem listov. Prúd zákazníkov je Poissonovský s priemerom 2 za minútu, doba obsluhy je exponenciálne rozložená s priemerom 1 minúta. Koľko času v hodine zostane v priemere pracovníckam za okienkami, aby si upravili make up?
 27. Príchod vozov na hranicu je Poissonovský s priemerom 1 voz za minútu, dĺžka kontroly má exponenciálne rozdelenie s priemerom 40 sekúnd. Ak pred hraničnou kontrolou čakajú vo fronte viac než tri vozy, blokujú výjazd opačným smerom. Aká je priemerná hodnota časti doby, počas ktorej je výjazd blokovaný, ak kontrolu vykonáva a) jeden b) dvaja pracovníci
 28. Náhodný príchod cestujúcich k predajni cestovných lístkov je Poissonov s priemerom 30 za hodinu, doba, za ktorú automat vydá cestovný lístok má exponenciálne rozdelenie s priemerom 1 minúta. Exponenciálne je i rozdelenie doby výdaja lístka predavačom. Koľkonásobne rýchlejší by musel predavač byť, aby sa sám vyrovnal dvom automatom v tom zmysle, že by cestujúci v priemere kupovaním lístku (vrátane čakania) nestrávil viac času ako v prípade paralelnej obsluhy dvoma automatmi?
 29. Správa letiska sa rozhoduje, či upratovaciu čatu vybaví jedným výkonným, alebo dvoma menej výkonnými vysavačmi. Na čistenie prichádzajú čate Poissonovsky v priemere 4 lietadlá za hodinu, doba čistenia lietadla má exponenciálne rozdelenie s priemerom 10 minút výkonnejším resp. 15 minút menej výkonným vysavačom. Prevádzka výkonnejšieho vysavača vyjde na 500 korún za hodinu, menej výkonného na 300 korún za hodinu. Prestoj lietadla stojí 100 korún za hodinu. Ako sa rozhodne správa letísk, aby minimalizovala celkové náklady?
 30. Pre úlohu $M/M/n/n$ odvodte formuly pre pravdepodobnosti p_k , pravdepodobnosť odmietnutia zákazníka a priemerný počet obsadených liniek
 31. Taxislužba má na stanovisku jeden taxík. Dopyt zákazníkov je opísaný Poissonovým procesom s priemerným počtom 5 za hodinu, doba obsluhy má exponenciálne rozdelenie s priemerom 10 minút. Zákazník, ktorý nenájde na stanovisku taxík zvolí iný spôsob dopravy. Ak prestoj taxíka predstavuje náklady 60 Sk za hodinu a priemerný zisk z jedného zákazníka je 20 Sk, oplatí sa pridať jeden taxík?
 32. Odvodte formulu pre p_k v úlohe $M/D/1/\infty$
 33. Dokážte formulu pre $F(w) = P(W \leq w)$ a $E(w)$ v úlohe $M/D/1/\infty$ (veľmi prácna)
 34. Po trati chodia Poissonovsky náhodne nákladné vlaky v priemere raz za 10 minút. V stanici Popudinské Močidlany musia zastať na rovnakú dobu 5 minút, počas ktorej je návěstidlo pred stanicou v polohe STOP. Aké priemerné zdržanie vlakov má za následok táto zastávka?
 35. Prievozník Charon preváža cez rieku Styx do Hadesu po jednom grécke dušičky, odchádzajúce zo sveta náhodne Poissonovsky s priemerom 2 za hodinu. Prevoz a návrat mu trvajú po 10 minút. Aká je pravdepodobnosť, že prichádzia dušička nájde na brehu nejakú čakať?
 36. Osobná bezpečnostná kontrola jedného cestujúceho na letisku trvá v priemere 1 minútu, chodí cez ňu v priemere 120 cestujúcich za hodinu, hodinové náklady na prevádzku jedného kontrolného stanoviska sú 1000 Sk. Čakanie cestujúcich vedie k stratám (napr. za meškanie lietadiel), ktoré sú vyčíslené na 30 Sk na cestujúceho a minútu. Koľko kontrolných stanovísk má letisko prevádzkovať?

Predpokladá sa ustálený Poissonovský príchod zákazníkov a exponenciálny zákon rozdelenia doby obsluhy. (je to dosť počítania, navrhujem použiť Mathematicu, Matlab alebo niečo podobné)

II. TEÓRIA ZÁSLOB

37. Ak v deterministickej úlohe zásob k fixným nákladom na jednu dodávku pridáme náklady na dodávku úmerné jej objemu, ako sa zmenia jej výsledky v prípade
 - a) neprípustného deficitu
 - b) strát na deficite, úmerných jeho objemu a trvania?
38. V deterministickej úlohe teórie zásob vypíšte predpis pre určenie optimálneho objemu dodávky Q v prípade že cena za dodávku je kc_d ak $(k-1)Q_0 < Q \leq kQ_0$ (Q_0 predstavuje napr. veľkosť kontajnera, ktorým sa dodávka prepravuje).
39. Ukážte, že v prípade nákladov na deficit, úmerných jeho množstvu nemusí optimum existovať a vysvetlite tento paradox.
40. Nájdite optimálne Q a S v deterministickej úlohe s deficitom v prípade, že náklady na deficit sú úmerné počtu jeho výskytov.
41. Mäsiarska výroba má možnosť objednať odvoz odpadu do kafilérie smetnými nádobami s objemom 100 l, alebo kontajnermi s objemom 500 l; ich odvoz stojí 200 resp. 500 Sk. Premerná produkcia odpadu je 1000 l týždenne, cena za jeho skladovanie je 10 Sk 100 l a deň. Aký spôsob pravidelného odvozu odpadu zvolí mäsiarstvo, aby minimalizovalo celkové náklady na jeho skladovanie a odvoz?
42. Stavba spotrebúva v priemere 500 kg piesku za hodinu a dováža ho nákladiakom s kapacitou 3t. Skladovanie piesku na stavbe ju vyjde na a)100 b) 200 Sk za hodinu a tonu, jedna cesta nákladiaku na 1000 Sk a prestoj pre nedostatok piesku na 500 Sk/hod. Ak bude minimalizovať súčet nákladov a strát, akú časť času bude bez piesku?
43. Podnik dováža materiál, ktorého spotrebúva 1 tonu za rok. Na jeho dopravu má k dispozícii LIAZ (s kapacitou 5 ton) a Aviu (s kapacitou 1/2 tony). Náklady na cestu vozidiel pre materiál sú 2000 korún na LIAZ a 1000 korún na Aviu. Cena skladovania materiálu je 1000 korún za tonu materiálu za rok, materiál nesmie na sklade chýbať. Ktorým vozidlom a koľko materiálu bude podnik dovážať, aby minimalizoval celkové náklady?
44. Obchod dováža tovar, ktorého spotrebúva 1 tonu za mesiac. Na jeho dopravu má k dispozícii LIAZ (s kapacitou 3 tony) a Aviu (s kapacitou 1 tony). Náklady na cestu vozidiel pre materiál sú 2000 korún na LIAZ a 1000 korún na Aviu. Cena skladovania materiálu je 700 korún za tonu materiálu za mesiac, tovar nesmie na sklade chýbať. Ktorým vozidlom a koľko tovaru bude obchod dovážať, aby minimalizoval celkové náklady?
45. Skladovanie odpadu z (nepretržitej) výroby, produkujúcej 100 l odpadu denne stojí 10 Sk za liter a deň. jeden odvoz odpadu stojí 100 Sk (bez ohľadu na jeho množstvo). Kapacita nádrže na skladovanie je 40 l, ak je nádrž plná, treba zastaviť výrobu, čo výrobcu stojí 100 Sk (pri každom zastavení). Ak chce výrobca minimalizovať celkové náklady na skladovanie a odvoz odpadu, ako často a v akých množstvách bude odpad odvážať a) ak sa zastavenie výroby nepripúšťa b) ak sa pripúšťa.
46. Skladovanie odpadu z nepretržitej výroby, produkujúcej 100 l odpadu denne stojí 10 Sk za liter a deň, jeden odvoz odpadu stojí 100 Sk bez ohľadu na jeho

množstvo. Kapacita nádrže na skladovanie je 50 l; ak je nádrž plná, treba zastaviť výrobu, čo výrobcu stojí 50 Sk pri každom zastavení plus 50 Sk za každú hodinu prestoja. Ak chce výrobca minimalizovať celkové náklady na skladovanie a odvoz odpadu, ako často a v akých množstvách bude odpad odvážať?

47. Sklad objednáva pravidelne tovar dopravovaný kamiónmi v nádržiach, ktoré sa v sklade ihneď vyprázdňujú. Tovar sa spotrebúva rovnomerne v množstve 2 nádrže za týždeň. Náklady na skladovanie sú 120 Sk za náplň jednej nádrže a týždeň. Náklady na dopravu sú 100 Sk za kamión bez ohľadu na dopravované množstvo plus 50 Sk za každú dopravovanú nádrž. Kamión odvezie najviac 4 nádrže. Aké množstvo tovaru a v akých časových intervaloch má sklad objednávať, aby minimalizoval celkové náklady na skladovanie a dopravu?

Poznámka: Pripúšťa sa objednať aj množstvo nezopodvedajúce celej nádrži.

48. Nemocnica objednáva krv skupiny 0 z oblastného skladu v množstvách 100 l, jej priemerná ročná spotreba je normálne rozložená s priemerom 520 l a štandardnou odchýlkou 43.26. Každá objednávka predstavuje fixný náklad 200 korún a vybaví sa za 5 dní, skladovanie 1l krvi stojí 25 korún ročne. Ak nemocnica nemá krv na sklade, musí si ju urýchlene zadovážiť, čo ju stojí 500 Sk za liter. Ak objednáva pri úrovni zásob, ktoré jej zabezpečia, že s 90% pravdepodobnosťou nimi pokryje potrebu, aké budú jej očakávané celkové náklady na dodávku a skladovanie krve? Oplatí sa jej znížiť požadovanú pravdepodobnosť zabezpečenia potreby zo skladových zásob na 85%?

49. Opravovňa objednáva náhradné diely v baleniach po 100 kusov. Priemerná spotreba za rok je 1200 kusov, fixné náklady na jednu dodávku sú 100 korún za balenie za rok. Náklady na skladovanie sú 100 korún za balenie za rok, straty v prípade nedostatku náhradných dielov sú 1 koruna za jeden diel a jeden deň (sú teda úmerné objemu deficitu a jeho trvaniu). Aké množstvo balení a v akej frekvencii bude opravovňa objednávať, aby minimalizovala celkové náklady? Zdôvodnite svoj záver.

Poznámka: Nákladová funkcia je konvexnou funkciou objemu dodávky a deficitu

50. Non-stop motorest na diaľnici predáva hamburgery, na ktoré dováža mäso ako polotvar z blízkeho mestečka. Na jeden hamburger spotrebuje 200 g polotovaru, dopyt po hamburgeroch je normálne rozložený s priemerom 200 a disperziou 50 za 24 hodín. Zisk na jednom hamburgeri je 20 korún, náklady na skladovanie 1 kg polotovaru stoja 100 korún denne. Jedna objednávka predstavuje fixný náklad 300 korún a realizuje sa za jednu hodinu. Zákazník, ktorý nedostane v motoreste hamburger, pokračuje v ceste k ďalšiemu.
- a) Motorest objednáva polotovar na 100 hamburgerov, ak mu klesne zásoba polotovaru na 10 hamburgerov. Aké sú jeho celkové očakávané náklady vrátane straty na zisku?
- b) Je pre Motorest výhodnejšie dopĺňať polotovar pravidelne dva razy denne na úroveň 20 kg?

51. Priekupník vykupuje použité surfy za priemernú cenu 100 denárov. Kapacita priekupníkovho skladu je 10 surfov, skladovanie predstavuje pre neho náklady 50 denárov mesačne na surf. Ponuky na predaj i záujem o kúpu sú exponenciálne rozdelené s priemerom 450 resp. 500 surfov mesačne. Ak sa nepočíta so stratami v dôsledku odmietnutia zákazníka, akú maržu si má priekupník nasadiť na jeden surf, aby netratil?

52. Dopyt po tovare je náhodne rozložený. Predavač nakupuje tovar za a korún za jednotku, predáva za b korún za jednotku, prebytočného tovaru sa zbavuje za c korún za jednotku. Ukážte, že úloha maximalizácie jeho očakávaného zisku je ekvivalentná jednozrazovej úlohe z prednášky a vyjadrite r, q pomocou a, b .
53. Iľo objednáva na sobotu chlieb, dopyt po ktorom má normálne rozdelenie s priemerom 50 kg a smeodajnou odchylkou 10 kg. Na kile predaného chleba má zisk 5 kg, kým nepredaný chlieb predáva Pavlovi na skrmenie so stratou 10 kg. Kolko objedná chleba?
54. Dopyt po párkoch, ktorý hasiči očakávajú na svojom bále je rovnomerne rozložený v intervale $[100,150]$. Na jednom predanom párku majú zisk 5 korún, na jednom nepredanom stratu 7 korún. Kolko párkov objednajú, aby maximalizovali svoj zisk?
55. Šimon ide na púť predávať Mišom vyrobené suveníry. Kupuje ich od Miša za 20 Sk/kus, predáva za 25 Sk/kus. Nepredané suveníry mu Mišo odoberie naspäť za polovičnú cenu pre ďalší predaj. Ak je dopyt po suveníroch rovnomerne rozložený v intervale $[200,300]$, koľko ich Šimon kúpi od Miša, aby maximalizoval svoj zisk?
56. Dopyt po vinohraníkovom burčiaku je rovnomerne rozložený v intervale $[10 \text{ l}, 20 \text{ l}]$. Burčiak predáva za 50 Sk/l, nepredaný má hodnotu 5 Sk/l. Na druhej strane, náklady na dokvasenie burčiaku do vína sú 10 Sk/l a za liter vína utrži 40 Sk. Kolko litrov vínneho kvasu sa vinohradník rozhodne predávať ako burčiak?
57. Banka vyrovnáva denne hotovosť v pobočke na hodnotu z . Priemerný denný dopyt klientov po hotovosti v Sk je rovnomerne rozložený v intervale $[0, 10^6]$. Na nevyužitej hotovosti má banka dennú stratu 0.5% z jej hodnoty. Na druhej strane, ak má hotovosti nedostatok, musí objednať jej mimoriadny dovoz, ktorý stojí 1000 Sk bez ohľadu na jeho objem. Určite, aké veľké má banka voliť z , aby minimalizovala svoje priemerné straty.
58. Opravovňa objednáva z veľkoskladu 3 druhy náhradných dielov, ktorých priemerná ročná spotreba je 30, 40, 50 jednotiek, objem jednej jednotky je 0.1, 0.3 a 0.2 m^3 . Dováža ich Aviou, ktorá naloží do 2 m^3 . Cena skladovania prvého z náhradných dielov je 200 korún, ďalších dvoch 100 korún za jednotku a rok, fixná cena jednej objednávky je 500 korún. Vypočítajte optimálnu dĺžku cyklu a veľkosť objednávky.
59. Opravovňa objednáva iba tretí z náhradných dielov. Pri jednej objednávke môže Aviu poslať aj viac razy, každá ďalšia otočka stojí 250 korún. Vypočítajte optimálnu dĺžku cyklu a veľkosť objednávky.
60. Opravovňa spotrebúva 300 náhradných dielov mesačne a dováža ich v v kontajneroch s kapacitou 100 dielov. Skladovanie jedného dielu stojí 10 Sk/mesiac, jeden dovoz stojí 200 Sk + 100 Sk za každý (aj prvý!) kontajner. Ako často a aké množstvá dielov bude opravovňa dovážať, aby minimalizovala svoje náklady?