STOCHASTICKÉ MODELY OPERAČNEJ ANALÝZY

1. Úvod

1.1. Príklad (P. Kluvánek)

Za socíku patrila trať Praha - Čierna nad Tisou k najfrekventovanejším na svete. Išla ňou prevážna časť nášho obchodu s naším dominantným obchodným partnerom - ZSSR. Často prichádzalo k meškaniu a prestojom vlakov a snahou bolo zvyšovať priepustnosť trate. Z prevádzkových dôvodov prichádzalo v ktorejsi stanici k zdržaniu vlakov v priemere (povedzme) o 2 minúty. Vlakov chodilo v priemere (povedzme) 20 za hodinu (a teda 1 za 3 minúty). Prečo teda vznikali zdržania a dlhé prestoje pred stanicou? Vrchnosť usúdila, že príčinou bol neschopný personál. Mala pravdu?

Matematici z vtedajšej VŠD sa na vec pozreli bližšie a spočítali, že naopak, personál dosahuje výsledky blízke ideálnej priepustnosti. Prečo, dozvieme sa z jednej z teórií, ktoré sú súčasťami tohoto predmetu. Zatiaľ len toľko, že vlaky nechodili rovnomerne jeden za tri minúty a ich zdržanie v stanici tak isto nemuselo byť rovnaké...

1.2. Terminológia

Príklad vlakov a stanice je jedným z mnohých, ktoré sa spoločne nazývajú úlohami teórie hromadnej obsluhy (inak zvanej teóriou frontov, po anglicky queuing theory, po rusky teoria massovogo obsluživania). Ich spoločným rysom je, že zákazníci (v našom prípade vlaky) čakajú v jednom alebo viacerých *frontoch* na *obsluhu* v *obslužnej linke* (v našom prípade v stanici). Obslužnú linku spolu s frontom nazývame *systémom.*

Iné príklady:

zákazník	*obslužná linka*	*obsluha*
telef. účastník	centrála	spojenie
návštevník banky	okienko	vybavenie
pacient	lekár	vyšetrenie
kupujúci	pokladňa	účet
hladoš	stôl	jedenie
$x$mef	počítač	výpočet

1.3. Formulácia úloh

Spoločným rysom je, že zákazníci prichádzajú na obsluhu a ak je linka (resp. linky) obsadená (-é), čakajú vo fronte. Pritom sú buď príchody, alebo doba obsluhy (alebo najčastejšie obidvoje) náhodné.

Rozdiely môžu byť v počte liniek (jedna - stanica, viacero - pokladne), režimov čakania (neobmedzená alebo obmedzená dĺžka frontu - napr. nulová pri obsadenej telefónnej linke), prioritách (kto prv príde, ten prv melie, ale aj naopak - polotovary, čakajúce na spracovanie na hromade).

Otázky, ktoré si teória kladie:

- zostane front ohraničený, alebo bude trvalo rásť
- priemerná dĺžka frontu
- očakávaný čas strávený v systéme resp. vo fronte
- využiteľnosť liniek
- koľko zákazníkov zostane neobslúžených (v prípade ohraničeného frontu)?

Nadstavbou týchto základných otázok sú otázky *optimalizačné*: aké sú straty, zapríčinené odchodom zákazníkov zo systému bez obslúženia, straty v dôsledku čakania (vlastných zamestnancov), optimálny počet liniek ...

1.4. Exponenciálne rozloženie

Ako modelovať „náhodné príchody", „náhodnú dobu obsluhy"?

Abstraktne uvažujme „udalosti rovnakého typu", opakujúce sa v čase (príchod zákazníkov, dobu obsluhy, príchod električky, nehoda na F1, ...). Protipólom deterministických udalostí (spln mesiaca, príchod električky) sú udalosti, ktoré sú navzájom celkom nezávislé (padnutie 0 v rulete, ťah esa v kartách, nehoda v F1,) a to, kedy udalosť nastane v budúcnosti nezávisí od tohho, kedy nastala posledný raz v minulosti. Túto podmienku nepĺňajú celom napríklad zemetrasenia, alebo chrípková pandémia: Pravdpodobnosť ich výskytu v budúcnosti narastá s dĺžkou doby, kotrá uplynula od ich posledného výskytu.

Spolu s nezávislosťou udalostí predpokladáme, že podmienky sa v čase nemenia (napr. karty zamiešame po každom ťahu) a označíme $p_0(t)$ pravdepodobnosť toho, že udalosť nenastane v časovom intervale dĺžky t. Zrejme platí

$$p_0(0) = 1 \tag{1.1}$$

$$p_0(t+s) = p_0(t)p_0(s), \quad t, s \geq 0 \tag{1.2}$$

- udalosť nenastane v intervale dĺžky $t + s$ práve vtedy, ak nenastane na intervale dĺžky t, ani na intervale dĺžky s a tieto udalosti sú podľa predpokladu nezávislé.

K predpokladu nezávislosti a nemennosti zákonitostí v čase (homogénnosti) doplníme technický predpoklad, že funkcia p_0 je spojitá. Potom platí

Veta. *Nech $p_0 : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ je spojitá klesajúca nezáporná funkcia, spĺňajúca (1.1), (1.2). Potom platí*

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{1.3}$$

pre nejaké $\lambda > 0$.

Dôkaz. Označíme

$$\lambda = -\ln p_0(1).$$

Potom z (1.2) postupne vyplýva

$$p_0(k) = \underbrace{p_0(1)\dots p_0(1)}_{k \text{ razy}}$$
$$p_0(1) = \underbrace{p_0(1/n)\dots p_0(1/n)}_{n \text{ razy}}$$
$$p_0(1/n) = p_0(1)^{1/n}$$
$$p_0(\frac{k}{n}) = [p_0(1)]^{\frac{k}{n}} = e^{-\lambda \frac{k}{n}}.$$

To značí, že (1.3) platí pre $t \geq 0$ racionálne; z predpokladanej spojitosti p_0 vyplýva, že (1.3) platí aj pre všetky $t \geq 0$ reálne.

Poznámka. 1. Pravdepodobnosť toho, že v intervale dĺžky t nastane aspoň jedna udalosť, je

$$1 - p_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \tag{1.4}$$

Inak povedané, je to pravdepodobnosť toho, že dĺžka intervalu τ medzi dvoma po sebe nasledujúcimi udalosťami je $\leq t$, a teda distribučná funkcia náhodnej premennej τ. Jej priemerná hodnota je

$$E(\tau) = \int_0^\infty \tau \frac{d}{d\tau}(1 - e^{-\lambda\tau})d\tau == - \int_0^\infty \tau \frac{d}{d\tau} e^{-\lambda\tau} d\tau$$
$$= - \left[\tau e^{-\lambda\tau}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

To značí, že $1/\lambda$ má význam priemernej dĺžky intervalu medzi dvoma udalosťami; parameter λ má teda význam priemerného počtu udalostí za jednotku intervalu..

2. V teórii hromadnej obsluhy sa doba obsluhy často modeluje ako náhodná premenná s exponenciálnym rozložením. Hoci takto modelujeme aj príchody zákazníkov do systému, na opis dynamiky ich pohybu vo fronte to nestačí - potrebujeme poznať ich počet ako funkciu času, označíme ju $X(t)$. Pre každé t je $X(t)$ náhodnou premennou, nadobúdajúcou celé nezáporné čísla. Ako už je známe z iných predmetov (Finančná matematika II, Časové rady), systém náhodných premenných parametrizovaných časom sa nazýva náhodným procesom.

2. MARKOVOVE REŤAZCE

2.1. Náhodný proces a náhodný reťazec

Nech $X(t)$ je systém náhodných premenných, závislých od parametra t, ktorý nadobúda hodnoty z $T = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, alebo ich podmnožín.

Pre naše účely budeme náhodný proces považovať za daný zloženými pravdepodobnosťami

$$P(X(t_1) \in A_1, \dots, X(t_n) \in A_n) \qquad t_1, \dots, t_n \in T.$$

Všeobecná teória náhodných procesov je zložitá; aby sme sa vyhli komplikáciám, budeme predpokladať, že realizácie $X(t)$ sú spojité sprava.

Náhodný proces nazývame *homogénnym*, ak platí

$$\begin{aligned}&P(X(t_1) \in A_1, X(t_2) \in A_2, \dots, X(t_n) \in A_n)\\ &= P(X(t_1+\tau) \in A_1, X(t_2+\tau) \in A_2, \dots, X(t_n+\tau) \in A_n),\end{aligned}$$

pre ľubovoľné τ také, že $t_1, t_1+\tau, \dots, t_n, t_n+\tau \in T$. My sa v tomto texte budeme zaoberať iba homogénnymi procesmi.

Náhodné premenné, vyskytujúce sa v THO predstavujú vždy zákazníkov a preto budú nadobúdať stavy z konečnej alebo zo spočítateľnej množiny. Náhodný proces ich vývoja v čase bude sa teda opisovať zloženými pravdepodobnosťami

$$\left\{P(X(t_1)=j_1, \dots, X(t_n)=j_n) : n \in \mathbb{Z}^+,\ t_1, \dots, t_n \in T,\ j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}^+\right\}$$

Procesy s konečnou alebo spočítateľnou množinou hodnôt nazývame aj *reťazcami.*

2.2. Reťazce s nezávislými prírastkami a Markovova vlastnosť

Predpoklady o postupnosti udalostí z 1.4. hovoria, že počty ich výskytu v disjunktných intervaloch sú navzájom nezávislé a ich počty v intervaloch rovnakej dĺžky nezávisia od polohy týchto intervalov na reálnej osi. Značí to, že môžeme definovať náhodný reťazec $X(t)$ so spočítateľnou množinou hodnôt ako počet udalostí, ktoré nastanú v intervale dĺžky t (rovnako, ako v ľubovoľnom konkrétnom intervale $[\tau, \tau+t],\ \tau \in \mathbb{R}]$. Predpoklady 1.4 hovoria, že pre $t \ge t_1 \ge t_2 \ge \dots \ge t_n$ platí

$$\begin{aligned}&P\left(X(t)-X(t_1)=i_1 | X(t_1)-X(t_2)=i_2, \dots, X(t_{n-1})-X(t_n)=i_n\right)\\ &\qquad = P(X(t)-X(t_1)=i_1).\end{aligned} \tag{2.1}$$

O reťazcoch, spĺňajúcich (2.1) hovoríme, že sú to reťazce s *nezávislými prírastkami.* Poznamenajme, že Wienerov proces z predmetu Finančná matematika II je proces s nezávislými prírastkami, kým v predmete Časové rad sa študujú procesy, ktoré nezávislé prírastky mať nemusia.

Ukážeme, že každý proces s nezávislými prírastkami má *Markovovu vlastnosť*, t.j. že pre každé n a $t \ge t_1 \ge \dots \ge t_n$ a $i, j_1, \dots, j_n$ platí

$$P(X(t)=i | X(t_1)=j_1, \dots, X(t_n)=j_n) = P(X(t)=i | X(t_1)=j_1). \tag{2.2}$$

K tomu použijeme nasledovnú lemu, ktorej dôkaz ponechávame ako cvičenie.

Lema.

$$P(A|B,C) = P((A|B)|C).$$

Jej viacnásobným použitím dostávame

$$\begin{aligned}P(X(t) =& i|X(t_1)=j_1, \dots, X(t_n)=j_n)\\ =& P(X(t)-X(t_1)=i-j_1 | X(t_1)-X(t_2)=j_1-j_2, \dots,\\ & X(t_{n-1})-X(t_n)=j_{n-1}-j_n,\ X(t_1)=j_1)\\ =& P((X(t)-X(t_1)=i-j_1 | X(t_1)-X(t_2)=j_1-j_2, \dots,\\ & X(t_{n-1})-X(t_n)=j_{n-1}-j_n | X(t_1)=j_1)\\ =& P(X(t)-X(t_1)=i-j_1 | X(t_1)=j_1) = P(X(t)=i | X(t_1)=j_1).\end{aligned}$$

Náhodný reťazec s Markovovou vlastnosťou sa nazýva *Markovovským reťazcom.*

Príklady. Markovove reťazce resp. procesy: Myš v bludisku (homogénny reťazec s konečnou množinou stavov), počty ľudí na zastávke električky, Wienerov proces, teplota vzduchu meraná v hodinových intervaloch (nehomogénny), v rovnakú hodinu v rozličných dňoch (v dosť dlhom období homogénny). Ako ukazovateľov "kreditného rizika" inštitúcie sa používa používa jej príslušnosť k ratingovej triede. Príslušnosť sa považuje z Markovov reťazec s ratingovými triedami ako stavmi. Nemarkovovské procesy: Krokodíl v bludisku (homogénny, konečná množina stavov).

Všimnime si, že Markovov reťazec je úplne opísaný pravdepodobnosťami $P(X(t) = i)$ a podmienenými pravdepdodobnosťami $P(X(t_1) = i_1|X(t_2) = i_2),\ t_1 > t_2$. Naozaj, pre $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$ platí

$$\begin{aligned}&P(X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n)\\ =&P(X(t_1) = i_1|X(t_2) = i_2, \dots, X(t_n) = i_n)P(X(t_2) = i_2, \dots, X(t_n) = i_n)\\ =&P(X(t_1) = i_1|X(t_2) = i_2)P(X(t_2) = i_2, \dots, X(t_n) = i_n).\end{aligned}$$

Opakovaním tejto úpravy pre $P(X(t_2) = i_2, \dots, X(t_n) = i_n)$ atď. napokon dostaneme

$$\begin{aligned}&P(X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n)\\ =&P(X(t_1) = i_1|X(t_2) = i_2)\dots P(X(t_{n-1}) = i_{n-1}|X(t_n) = i_n)P(X(t_n) = X_n).\end{aligned}$$

2.3. Markovove reťazce s diskrétnym časom a konečnou množinou stavov

Ak je množina stavov reťazca konečná, môžeme ich bez ujmy na všeobecnosti označiť číslami $0, 1, \dots, n$.

Pre Markovov reťazec $X(t)$ so stavmi $\{0, \dots, n\}$ a $T = \mathbb{Z}^+$ označme $p_i(t) = P(X(t) = i)$, $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), \dots, p_n(t))$. Z **2.2** vyplýva, že $X(t)$ je úplne opísaný pravdepodobnosťami $p_j(0) = P(X(0) = j)$ a podmienenými pravdepodobnosťami

$$p_{ij}(t) = P(X(t+1) = j|X(t) = i), \quad t \in T, \quad 0 \le i, j \le n. \tag{2.3}$$

Keďže sa obmedzujeme na homogénne reťazce, platí $p_{ij}(t) = p_{ij}(t+\tau)$ pre ľubovoľné τ prirodzené, preto $p_{ij}(t)$ nezávisia od t , môžeme ho teda vypustiť. Keďže pre pevné i je $\{p_{ij}\}_{j=0}^n$ pravdepodobnostné rozloženie, platí

$$0 \le p_{ij} \le 1, \qquad \sum_{j=0}^n p_{ij} = 1. \tag{2.4}$$

.

Znalosť pravdepodobností p_{ij} a $p_i(t)$ nám umožňuje vyjadriť pravdepodobnosti $p_j(t+1)$:

$$p_j(t+1) = \sum_{i=0}^n p_i(t)p_{ij} \tag{2.5}$$

alebo v maticovom tvare

$$\mathbf{p}(t+1) = \mathbf{p}(t)\mathbf{P}, \tag{2.6}$$

kde

$$\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=0}^{n} \tag{2.7}$$

spĺňa vzťahy (2.4). Maticiam, ktoré ich spĺňajú, hovoríme *stochastické.*

Z pravidiel o podmienených pravdepodobnostiach dostávame

$$P(X(t+2) = i|X(t) = j) = \sum_{k=0}^{n} p_{jk}p_{ki}$$

a pre pevné $t = t_0$ ďalej

$$p_i(t_0 + 2) = \sum_{k=0}^{n} p_{ki} \sum_{j=0}^{n} p_{jk}p_j(t_0),$$

v maticovom zápise

$$\mathbf{p}(t_0 + 2) = p(t_0)\mathbf{P}^2;$$

indukciou dostávame pre každé celé $t > t_0$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0)\mathbf{P}^{t-t_0}.$$

Značí to, že časový vývoj rozložení pravdepodobnosti $\mathbf{p}(t)$ je riadený *lineárnym diskrétnym dynamickým systémom.* (Na rozdiel od jeho zápisu v predmete DDR zapisujeme vektory ako riadkové a maticou $\mathbf{P}$ sa násobí sprava).

Špecifikom systému je, že zobrazuje simplex

$$p_i \geq 0, \quad \sum p_i = 1$$

do seba. Vyplýva to bezprostredne z (2.4).

Ako v teórii dynamických systémov, aj v teórii MR sa skúma asymptotické správanie pravdepodobností. Dôležité je zistiť, či pravdepodobnostné rozloženie $\mathbf{p}(t)$ konverguje k nejakému (nevyhnutne) pravdepodobnostnému rozloženiu π, ktoré predstavuje rozloženie „ustálených" pravdepodobností. K tomu nasledovné poznámky:

1. Ak π je také rozloženie, že

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \pi,$$

potom nevyhnutne platí

$$\pi = \pi\mathbf{P}. \tag{2.8}$$

Inak povedané, π je ľavým vlastným vektorom $\mathbf{P}$ s vlastnou hodnotou 1 a pevným bodom lineárneho dynamického systému (2.6).

2. Pre ľubovoľný vektor v platí

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} |v_i p_{ij}| \leq \sum_{i=0}^{n} |v_i| \sum_{j=0}^{n} p_{ij} = \sum_{i=0}^{n} |v_i|.$$

Ak označíme $|v| = \sum_{i=0}^{n} |v_i|$, značí to, že

$$|v\mathbf{P}| \leq |v|$$

a teda $\mathbf{P}$ nemôže mať vlastnú hodnotu > 1.

Platí

Veta. *Existuje pravdepodobnostné rozloženie* π*, spĺňajúce (2.8). Ak sú pre niektoré* $r > 0$ *všetky prvky matice* $\mathbf{P}^r$ *kladné, potom* π *je jediné a pre ľubovoľné pravdepodobnostné rozloženie* $\mathbf{p}$ *platí*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{p}\mathbf{P}^t = \pi; \tag{2.9}$$

Dôkaz. Simplex $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$ je konvexný a kompaktný a matica $\mathbf{P}$ ho zobrazuje do seba. Podľa Brouwerovej vety o pevnom bode má v simplexe pevný bod π, pre ktorý zrejme platí (2.8). Sporom ukážeme, že je jediný.

Predpokladajme, že by existovalo pravdepodobnostné rozloženie $\tilde{\pi} \neq \pi$, spĺňajúce (2.8), teda že by π bolo vlastným vektorom vlastnej hodnoty 1. Potom by pre každý bod priamky $\{\pi + \alpha\tilde{\pi} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ platilo (2.6). Zvoľme α tak, že $\pi + \alpha\tilde{\pi}$ je na hranici simplexa (2.3), teda aspoň jedna z jeho zložiek je nulová. Ak má $\mathbf{P}^r$ všetky prvky kladné, sú aj všetky zložky vektora

$$(\pi + \alpha\tilde{\pi})\mathbf{P}^r = \pi + \alpha\tilde{\pi}$$

kladné, čo je v spore s voľbou α.

Z Perronovej vety o kladných maticiach vyplýva, že všetky ostatné vlastné hodnoty λ majú absolútne hodnoty < 1. Ak sú všetky vlastné hodnoty navzájom rozličné, vyplýva z teórie DDR

$$p\mathbf{P}^t = \pi 1^t + \sum v_i \lambda_i^t \to \pi,$$

(kde v_i je vlastný vektor vlastnej hodnoty λ_i) pre $t \to \infty$.

Dôkaz konvergencie pre prípad viacnásobných vlastných hodnôt je o niečo zložitejší.

Poznámky. 1. Vetu možno dokázať aj pri slabších predpokladoch.

2. Pravdepodobnostné rozloženie π nazývame *stacionárnym*, čo je v súlade s terminológiou DDR.

3. Všimnite si, že pre i-tý riadok matice $\mathbf{P}^k$ platí $\left[\mathbf{P}^k\right]_i = e_i\mathbf{P}^k$, kde $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (1 je na i-tom mieste) je pravdepodobnostné rozloženie istoty, že sa nachádzame v stave i . Z toho podľa Vety vyplýva

$$\lim_{k\to\infty} \left[\mathbf{P}^k\right]_i = \pi$$

nezávisle od i.

2.4. Priestor l_1

Pravdepodobnostné rozloženia Markovovho reťazca so spočítateľnou množinou hodnôt (za ktorú bez ujmy na všeobecnosti budeme brať množinu $\{0, 1, \dots\}$) sú postupnosti $\{p_0, p_1, \dots\}$, spĺňajúce vzťahy

$$0 \leq p_i \leq 1, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1. \tag{2.10}$$

Sú teda prvkami priestoru postupností $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, spĺňajúcich

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| < \infty.$$

Ak súčet a násobenie konštantou v tomto priestore zavedieme ako súčet resp. násobenie po členoch, tvorí množina takýchto postupností (nekonečnorozmerný) priestor, ktorý označujeme l_1. V tomto priestore môžeme zaviesť *normu* predpisom

$$|x| = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|.$$

Ľahko sa presvedčíme, že takto zavedená norma má nasledovné vlastnosti:

a) $|x| \geq 0$, $|x| = 0$ vtedy a len vtedy, ak $x = 0$
b) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$
c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Ak zavedieme vzdialenosť $d(x, y) = |x - y|$, potom sa priamočiaro môžeme presvedčiť, že d je metrika a metrický priestor takto definovaný je úplný. Vo všeobecnosti sa úplnému lineárnemu priestoru s metrikou definovanou normou hovorí *Banachov priestor*. Matematickej analýze v Banachových (a všeobecnejších) lineárnych priestoroch sa venuje rozsiahla matematická disciplína, funkcionálna analýza. My sa v tomto texte obmedzíme iba na najnevyhnutnejšie skutočnosti a konkrétny prípad priestoru l_1.

Lineárnym operátorom $A : l_1 \to l_1$ nazývame lineárne zobrazenie (t.j. platí)

$$(\alpha x + \beta y)A = \alpha x A + \beta y A,$$

ktoré je ohraničené, t.j. existuje konštanta a taká, že

$$|xA| \leq a|x|$$

pre všetky $x \in l_1$. Najmenšiu z týchto konštánt označíme $|A|$; platí

$$|A| = \sup_{|x|=1} |xA|.$$

Podobne, ako v konečnorozmernom priestore, označme e_i taký prvok z l_1, ktorý má i-tú zložku rovnú jednej a ostatné nulové. Operátor A je zrejme jednoznačne daný nekonečnou maticou čísel, kde a_{ij} je j-tá zložka prvku $e_i A$. Po tejto definícii môžeme zobrazenie A zapísať ako súčin matice A s vektorom (v obidvoch prípadoch so spočítateľným počtom zložiek) podľa analogických pravidiel, ako v prípade konečnorozmernom.

Nasledovné tvrdenia sa dajú priamočiaro odvodiť:

1. Operátor A je ohraničený práve vtedy, ak

$$\sup_i \sum_j |a_{ij}| < \infty$$

2. Operátor je spojitou funkciou

3. Matica kompozície AB operátorov A, B je súčinom ich matíc (pri násobení, analogickom násobeniu matíc v konečnorozmernom prípade)
4. Deriváciu $\dot{x}(t)$ funkcie $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ s hodnotami v l_1 definujeme analogicky ako pre funkcie s konečnorozmernými hodnotami. Nech A je operátor. Potom diferenciálna rovnica

$$\dot{x} = xA$$

má jedné riešenie, spĺňajúce $x(t_0) = x^0$ pre ľubovoľné $t_0 \in \mathbb{R}$, $x^0 \in l_1$.

Dôkaz možno urobiť pomocou Banachovej vety o pevnom bode rovnako, ako v konečnorozmernom prípade.

Doteraz sme uvádzali analýzu l_1 s konečnorozmernými lineárnymi priestormi. Je však jeden podstatný rozdiel: ohraničená množina v l_1 nemusí byť kompaktná. Ďalším rozdielom je, že lineárne zobrazenie nemusí byť nevyhnutne aj spojité.

2.5. Markovove reťazce s diskrétnym časom a spočítateľnou množinou stavov

Pravdepodobnostné rozloženia na množine spočítateľných stavov môžeme podľa **2.3** chápať ako prvky l_1. Ak definujeme podmienené pravdepodobnosti p_{ij} rovnako ako v **2.2**, potom platia vzťahy (2.3) - (2.7) s tým, že n zameníme za ∞ a $\mathbf{P}$ má význam ohraničeného lineárneho operátora $l_1 \to l_1$.

Predpoklady limitnej vety z 2.2. nestačia na jej rozšírenie v nekonečnorozmernom prípade. Dôvodom je, že Schauderova veta, ktorá je rozšírením Brouwerovej vety o pevnom bode na nekonečnorozmerné priestory, vyžaduje okrem konvexnosti množiny aj kompaktnosť jej obrazu.
Príkladom môže slúžiť matica

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Veta z 2.2. platí za zložitejších predpokladov, ktoré vyžadujú zaviesť ďalšie pojmy a preto ju nebudeme formulovať.

2.6. Markovove reťazce so spojitým časom

Podľa **2.1** je homogénny Markovov reťazec $X(t)$ so spojitým časom zadaný podmienenými pravdepodobnosťami

$$p_{ij}(\tau) = P(X(t+\tau) = j | X(t) = i),$$

ktoré sú nezávislé od t a spĺňajú vzťahy

$$0 \le p_{ij}(\tau) \le 1, \qquad \sum_{j=0}^{n} p_{ij}(\tau) = 1 \tag{2.11}$$

(kde n je konečné alebo nekonečné podľa počtu stavov reťazca). Matica podmienených pravdepodobností

$$\mathbf{P}(\tau) = \{p_{ij}(\tau)\}_{i,j}$$

definuje (ohraničený) lineárny operátor na $\mathbb{R}^n$, resp. l_1.

Z elementárnych vlastností podmienených pravdepodobností vyplýva pre ľubovoľné $t, s \geq 0$

$$\sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(s) = p_{ij}(t+s)$$

čo značí

$$\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s). \tag{2.12}$$

Ďalej zrejme platí

$$\mathbf{P}(0) = I. \tag{2.13}$$

Vzťahy (2.12), (2.13) pripomínajú vlastnosti prenosovej fundamentálnej matice autonómnej diferenciálnej rovnice

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{p}Q. \tag{2.14}$$

Otázkou je, či musí existovať operátor Q že $\mathbf{P}(t)$ je jeho prenosovým operátorom. Platí

Veta. *Ak $\mathbf{P}(t), t \geq 0$ závisí spojite na t a má vlastnosti (2.12), (2.13), potom existujú $q_{ij} \in [-\infty, \infty]$ také, že platí*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} p_{ij}(t) = q_{ij} \qquad \textit{pre } i \neq j \tag{2.15}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} = q_{ii}. \tag{2.16}$$

Hodnoty q_{ij} sú pre $i \neq j$ vždy konečné, kým pre $i = j$ môžu byť v prípade nekonečnej množiny stavov aj nekonečné.

V prípade, že q_{ii} sú konečné a konvergencia v (2.15) a (2.16) je rovnomerná vzhľadom na zložku (čo je v prípade konečnej množiny stavov splnené vždy), vyplýva z (2.15) a (2.16) najprv

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{P}(h) - I}{h} = Q$$

a potom s použitím (2.12)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{P}(t+h) - \mathbf{P}(t)}{h} = \mathbf{P}(t) \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{P}(h) - I}{h} = \mathbf{P}(t)Q, \tag{2.17}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{P}(t+h) - \mathbf{P}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{P}(h) - I}{h}\mathbf{P}(t) = Q\mathbf{P}(t). \tag{2.18}$$

Rovniciam (2.17), (2.18) sa hovorí *Chapmanove-Kolmogorovove rovnice* pre reťazce.

V prípade, že q_{ii} sú nekonečné, možno rovnici (2.16) tiež dať zmysel, vychádza to však nad rámec tohoto textu.

Čísla q_{ij} sa nazývajú *intenzitami* prechodu medzi stavmi.

Ak je známe pravdepodobnostné rozloženie $\mathbf{p}(0)$, potom pre rozloženie $\mathbf{p}(t)$ procesu $X(t)$ platí

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)$$

a teda

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)Q = \mathbf{p}(t)Q. \tag{2.19}$$

Stacionárnym nazveme také rozloženie π, pre ktoré z $\mathbf{p}(0) = \pi$ vyplýva $\mathbf{p}(t) \equiv \pi$ pre každé $t \geq 0$. Zrejme preň musí platiť $d/dt\mathbf{p}(t) = 0$, teda

$$\pi Q = 0. \tag{2.20}$$

Rovnako, ako pri MR s diskrétnym časom nás zaujímajú limitné vlastnosti reťazcov. Veta o existencii limitného rozloženia má v prípade MR s nekonečným počtom stavov o niečo jednoduchšie predpoklady, než v prípade diskrétneho času. Platí

Veta. *Ak má MR so spojitým časom stacionárne rozloženie, všetky jeho stavy sú navzájom dosiahnuteľné a jeho intenzity prechodu sú konečné, potom existuje jediné pravdepodobnostné rozloženie π, spĺňajúce (2.20) a pre všetky pravdepodobnostné rozloženia $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)$ platí*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{p}(t) = \pi. \tag{2.21}$$

Stav j nazývame dosiahnuteľným zo stavu i, ak platí $p_{ij}(t) > 0$, pre nejaké t.
Podobne, ako v prípade diskrétneho času, je (2.21) ekvivalentné vzťahu

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$$

pre ľubovoľné i.

2.7. Poissonov proces

Nech $X(t)$ je *bodový proces*, t.i. má zmysel výskytu nejakej náhodnej premennej udalosti v intervale dĺžky t. V zmysle našej dohody predpokladáme, že udalosti sú na sebe nezávislé a proces je homogénny; označme $p_i(t)$ pravdepodobnosť, že v intervale $[0, t)$ nastalo i udalostí. Predpokladajme ďalej, že priemerný počet výskytov udalostí za čas t je λt a navyše

1.
$$p_1(\tau) = \lambda\tau + o(\tau) \tag{2.22}$$

2.
$$\sum_{j=2}^{\infty} p_j(\tau) = o(\tau) \tag{2.23}$$

pre $\tau \to 0$.

Predpoklad 2 nazývame predpokladom *ordinálnosti* procesu.

Z (1.4) vyplýva

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{2.24}$$

Keďže $p_{ij}(t) = P(X(t) = j|X(0) = i) = p_{j-i}(t)$, z (2.22), (2.24) a Vety 2.26 vyplýva, že intenzity procesu spĺňajú

$$q_{ii} = -\lambda, q_{i,i+1} = \lambda \quad \text{a} \quad q_{ij} = 0 \quad \text{pre } j \neq i, i+1 \tag{2.25}$$

a podľa (2.19) pre pravdepodobnosť $p_i(t)$ platí

$$\dot{p}_0(t) = -\lambda p_0(t) \tag{2.26}$$
$$\dot{p}_i(t) = -\lambda p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) \quad \text{pre } i > 0; \tag{2.27}$$

ďalej zrejme platí $p_0(0) = 1$, $p_i(0) = 0$ pre $i > 0$.

Postupným riešením rovníc (2.26), (2.27) pri týchto počiatočných podmienkach dostávame

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{2.28}$$
$$p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \qquad \text{pre } i > 0. \tag{2.29}$$

Vzťah (2.29) vyplýva podľa princípu matematickej indukcie z nasledovného výpočtu:

$$\begin{aligned} p_i(t) &= e^{-\lambda t} p_i(0) + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda s)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda s} ds \\ &= e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{(\lambda s)^{i-1}}{(i-1)!} ds = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Pre každé t je rozloženie $\{p_0(t), p_i(t), \dots\}$ Poissonovo, preto tomuto procesu hovoríme *Poissonov proces.*

Všimnime si, že platí

$$\begin{gathered} p_0(0) = 1 \quad p_k(0) = 0 \qquad \text{pre } k > 0, \\ \dot{p}_0(0) = -\lambda,\ \dot{p}_1(0) = \lambda,\ \dot{p}_i(0) = 0 \text{ pre } i > 1 \end{gathered} \tag{2.30}$$

a ak $p(0) = 1$, potom

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j | X(0) = i) = P(X(t) = j - i | X(0) = 0) = p_{j-i}(t).$$

Spätný výpočet priemerného počtu udalostí za jednotku času dáva

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.$$

Označme teraz $r_k(t)$ pravdepodobnosť toho, že v intervale dĺžky t nastane najviac k udalostí. Zrejme platí

$$r_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda t)^i}{i!}.$$

Rozloženie $t \to 1 - r_k(t)$ je *Erlangovo* s parametrami λ, k.

3. Teória hromadnej obsluhy

3.1. Kendallova klasifikácia

Úlohy teórie hromadnej obsluhy vykazujú veľkú rozmanitosť. Pre ich základné rozlíšenie sa používa symbolika zavedená jedným z priekopníkov teórie D.G. Kendallom. Typ úlohy sa označuje symbolom

$$X/Y/n,$$

kde

X značí typ náhodného procesu príchodu zákazníkov
Y značí zákon rozloženia dĺžky doby obsluhy
n značí počet obslužných miest.

Niekedy sa ako štvrtý symbol v Kendallovej symbolike pridáva maximálny počet zákazníkov v systéme m, teda

$$X/Y/n/m.$$

My budeme za X, Y pripúšťať symboly

M - Poissonov proces resp. exponenciálne rozloženie doby obsluhy
D - deterministické príchody resp. konštantnú dobu obsluhy.

Za n budeme pripúšťať prirodzené čísla a za m prirodzené čísla a ∞ (v prípade neobmedzeného frontu).

Iné možnosti rozložení, ktoré sa dosadzujú za X, alebo Y, sú

E - Erlangovo rozloženie
K - χ^2 rozloženie
G - všeobecné rozloženie.

Kendallova klasifikácia nepostihuje ďalšie možné odlišnosti, ako frontové režimy, či priority.

3.2. Systém $M/M/1/\infty$

V zmysle Kendallovej klasifikácie predpokladáme, že príchody zákazníkov sú opísané Poissonovým procesom a dĺžka doby obsluhy je exponenciálne rozložená s priemernou dobou obsluhy $1/\mu$. Značí to, že ak sa systém nevyprázdni, je počet obslúžených za jednotku času opísaný taktiež Poissonovým procesom, a to s priemerom μ.

Označme $X(t)$ náhodný počet zákazníkov v systéme $p_k(t) = P(X(t) = k)$, $p_{ik}(h) = P(X(t+h) = k|X(t) = i)$ Našim cieľom je odvodiť diferenciálne rovnice pre $p_k(t)$.Platí

$$\begin{aligned} \frac{dp_k}{dt}(t) =& \frac{d}{dh} p_k(t+h)|_{h=0} \\ =& \frac{d}{dh} \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) p_{ik}(h) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) \dot{p}_{ik}(0) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Aby sme koeficienty pri $p_i(t)$ vyčíslili, stačí nám poznať hodnoty $p_{ik}(h)$ s presnosťou $o(h)$. V tom nám pomôže

Lemma. *Pravdpodobnosť výskytu viac ako jednej udalosti typu príchod/odchod na intervale dĺžky h je $o(h)$*

Dôkaz. Pre dva a viac príchodov za neprítomnosti odchodov je tvrdenie Lemy bezprostredným dôsledkom predpokladu 2 odseku **2.7**. Pre odchody je úvaha trocha zložitejšia, treba totiž vziať do úvahy, že systém sa môže vyprázdniť a tým aj obslužná linka prestať pracovať. Presnejšie povedané, ak $X(t) = k$ potom je za neprítomnosti príchodov nemožné, aby zo systému odišlo viac, ako k zákazníkov; pravdepodobnosť $> k$ počtu odchodov je teda 0, čo je $o(h)$. Pre počet odchodov $1 < i \leq k$ sa systém nevyprázdni, môžeme teda použiť rovnakú úvahu, ako v prípade príchodov.

Zostáva prípad, že sa na intervale vyskytne aspoň jeden príchod spolu s aspoň jedným odchodom. Pravdepodobnosť takejto udalosti je zloženou pravdepodobnosťou pravdepodobností výskytu príchodu $1-e^{-\lambda h}$ a a výskytu odchodu $1-e^{-\mu h}$. Keďže príchody a odchody sú nezávislé, je zložená pravdepodobnosť ich súčinom, teda $(1-e^{-\lambda h})(1-e^{-\mu h})$. Tvrdenie Lemy vyplýva z toho, že

$$\frac{d}{dh}[(1-e^{-\lambda h})(1-e^{-\mu h})]|_{h=0} = 0,$$

čo sa overí priamočiarym výpočtom. $\square$

Z Lemy a (2.22), (2.23) vyplýva

$$\begin{gathered}\dot{p}_{i,i+1}(0) = \lambda, \dot{p}_{ik}(0) = 0 \text{ pre všetky } k > i+1,\\ \dot{p}_{ii}(0) = \frac{d}{dh}(e^{-\lambda h}e^{-\mu h})|_{h=0} = -\lambda-\mu, \dot{p}_{i,i-1}(0) = \mu, \dot{p}_{ik}(0) = 0\\ \text{pre } k < i-1 \text{ a } i > 0,\\ \dot{p}_{00}(0) = -\lambda, \dot{p}_{0k}(0) = 0 \text{ pre } k < 0.\end{gathered} \tag{3.2}$$

S ohľadom na (3.2) dáva (3.1) pre $p_k(t)$ diferenciálne rovnice

$$\begin{aligned}\dot{p}_0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1\\ \dot{p}_k &= \lambda p_{k-1} - (\mu+\lambda)p_k + \mu p_{k+1} \quad \text{pre } k > 0,\end{aligned} \tag{3.3}$$

alebo v operátorovej forme

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p}Q$$

kde Q je trojdiagonálna matica

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdot\\ \mu & -\mu-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdot\\ 0 & \mu & -\mu-\lambda & \lambda & 0 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Systém (3.3) sa dá riešiť, ale nebudeme to robiť. V teórii sa totiž spravidla počíta s tým, že systém pracuje v dlhodobo ustálených podmienkach a možno teda predpokladať, že pravdepodobnosti sa ustálili na svojich limitných stacionárnych hodnotách. Tieto podľa **2.6** existujú a sú jediné, pretože intenzity reťazca sú konečné a všetky stavy sú navzájom dosiahnuteľné (dôkaz ako cvičenie). Ďalej podľa **2.6** všetky pravdepodobnosti $\mathbf{p}(t)$ k stacionárnym konvergujú. Ak označíme $(p_0, p_1, \dots)$ stacionárne pravdepodobnosti z (2.9) a (3.3) (alebo ak položíme derivácie v (3.3) rovnými 0), dostaneme

$$\begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0 \\ \lambda p_{k-1} + (-\mu - \lambda) p_k + \mu p_{k+1} &= 0 \quad \text{pre } k > 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Položíme $z_k = -\lambda p_k + \mu p_{k+1}$. Potom (3.4) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_k - z_{k-1} &= 0 \qquad \text{pre } k > 0, \end{aligned}$$

z čoho vyplýva

$$z_k = 0 \qquad \text{pre všetky } k, \tag{3.5}$$

a teda

$$p_{k+1} = \frac{\lambda}{\mu} p_k = \rho p_k, \quad p_k = \rho^k p_0,$$

kde $\rho = \lambda/\mu$ nazývame *intenzitou prevádzky.*

Aby postupnosť $\pi = (p_0, p_1, \dots)$ bola z l_1, musí zrejme platiť $\rho < 1$, t.j.

$$\lambda < \mu, \tag{3.6}$$

a aby π bolo pravdepodobnostným rozložením, musí platiť

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = p_0 \frac{1}{1-\rho}. \tag{3.7}$$

Z (3.5) vyplýva

$$p_0 = 1 - \rho, \qquad p_k = (1-\rho)\rho^k. \tag{3.8}$$

Hodnoty p_k predstavujú pravdepodobnosti, že v systéme je v ustálenom režime k zákazníkov. Možno z nich vypočítať ďalšie zaujímavé charakteristiky.

Pravdepodobnosť, že vo fronte je k zákazníkov, je zrejme $p_0 + p_1$ pre $k = 0$, p_{k+1} pre $k > 0$.

Priemerný počet zákazníkov v systéme je

$$\kappa = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} k \rho^k = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{3.9}$$

a jeho variancia je

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \tag{3.10}$$

Priemerný počet zákazníkov vo fronte je

$$\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} k p_{k+1} = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} k \rho^{k+1} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Všimnime si, že

$$\kappa, \gamma \to \infty \qquad \text{pre } \lambda \to \mu,$$
$$\kappa - \gamma = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{1-\rho} = \rho \neq 1.$$

Výpočet rozloženia pravdepodobnosti doby čakania vo fronte je o niečo zložitejší. Označme W_k (náhodnú) dobu čakania zákazníka, ktorý je v okamihu príchodu $k-$tý vo fronte. Zákazník čaká vo fronte dobu $> w$ práve vtedy, ak na intervale dĺžky w nastalo $0 \leq j \leq k-1$ udalostí „bol obslúžený zákazník", čo je Poissonov proces s priemerným počtom udalostí μ za jednotku času. Podľa **2.7** teda platí

$$P(W_k > w) = e^{-\mu w} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\mu w)^j}{j!}.$$

Zákon rozloženia doby čakania W ľubovoľného zákazníka bude

$$\begin{aligned}
P(W > w) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k P(W_k > w) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^k e^{-\mu w} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\mu w)^j}{j!} \\
&= (1-\rho) e^{-\mu w} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mu w)^j}{j!} \sum_{k=j+1}^{\infty} \rho^k \\
&= (1-\rho) e^{-\mu w} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mu w)^j}{j!} \rho^{j+1} \frac{1}{1-\rho} \\
&= e^{-\mu w} \rho \sum_{j=0}^{\infty} (\mu\rho)^j \frac{w^j}{j!} = e^{-\mu w} \rho \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda w)^j}{j!} \\
&= \rho e^{-(\mu-\lambda)w}
\end{aligned}$$

(samozrejme, $P(W = 0) = p_0 = 1 - \rho$). Stredná hodnota čakania je

$$\begin{aligned}
E(W) &= \int_0^{\infty} w \frac{d}{dw} \left[1 - \rho e^{-(\mu-\lambda)w} \right] dw \\
&= -\rho \int_0^{\infty} w \frac{d}{dw} \left[e^{-(\mu-\lambda)w} \right] dw = -\rho \left[w e^{-(\mu-\lambda)w} \right]_0^{\infty} \\
&\quad + \rho \int_0^{\infty} e^{-(\mu-\lambda)w} dw = \frac{\rho}{\mu - \lambda}.
\end{aligned}$$

Celková doba R strávená v systéme sa od doby čakania vo fronte líši iba o dobu obsluhy, teda platí

$$P(R > w) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k P(W_{k+1} > w) = e^{-(\mu-\lambda)w},$$
$$E(R) = (\mu - \lambda)^{-1}.$$

Doteraz odvodené charakteristiky sú zaujímavé pre zákazníka. Pre prevádzkovateľa sú zaujímavé ďalšie charakteristiky, a to

- priemerná doba využitia linky
- priemerný počet zastavení linky.

Linka je využitá, ak je v systéme aspoň jeden zákazník, čoho pravdepodobnosť je $1 - p_0(t) = \rho$. To je aj priemerná doba jej využitia za jednotku času.

K tomu, aby sme vypočítali priemerný počet zastavení, vypočítame najprv pravdepodobnosť nepretržitej činnosti linky ako funkcie doby.

Označme $\tilde{X}(t)$ modifikáciu procesu $X(t)$, spočívajúcu v tom, že ak počet zákazníkov v systéme klesne na nulu, obslužná linka skončí činnosť. Inak povedané, ak $\tilde{X}(t_0) = 0$, potom $\tilde{X}(t) \equiv 0$ pre $t \geq t_0$. To značí, že Ch.-K. diferenciálne rovnice (3.3) sa zmenia na

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{p}_0}(t) &= +\mu\tilde{p}_1(t) \\
\dot{\tilde{p}_1}(t) &= -(\mu+\lambda)\tilde{p}_1(t) + \mu\tilde{p}_2(t) \\
\dot{\tilde{p}_k}(t) &= \lambda\tilde{p}_{k-1}(t) - (\mu+\lambda)\tilde{p}_k(t) + \mu\tilde{p}_{k+1}(t).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Linka začne činnosť vtedy, ak je v systéme 1 zákazník, teda $\tilde{p}_1(0) = 1$; ak $\tilde{X}(t) = 0$, značí to, že prerušenie jej činnosti nastalo pre nejaké $0 < t' \leq t$. To značí, že $\tilde{p}_0(t)$ je distribučná funkcia pravedpodobnosti náhodnej doby nepretržitej činnosti linky. Na jej výpočet treba nájsť riešenie rovníc (3.11), čo je rovnako ako riešenie rovníc (3.3) zložité a nebudeme ho robiť. Uvedieme iba, že stredná hodnota nepretržitej doby obsluhy je

$$1/(\mu - \lambda).$$

Medzi intervalmi obsluhy sú intervaly, počas ktorých do systému nepríde nový zákazník. Ich stredná dĺžka je $1/\lambda$. To značí, že za jednotku času bude v priemere linka

$$(\frac{1}{\mu-\lambda} + \frac{1}{\lambda})^{-1} = \left(\frac{\mu}{(\mu-\lambda)\lambda}\right)^{-1} = \rho(\mu - \lambda)$$

razy odstavená.

Príklad. Do staničnej pokladnice prichádza v priemere 1 zákazník za 2 minúty, obluha trvá v priemere 1 minútu, t.j $\mu = 1, \lambda = 1/2$, obidva procesy sú Poissonovské.

Intenzita prevádzky je $\rho = \lambda/\mu = 1/2$,

$$\begin{aligned}
&p_0 = 1 - 1/2 = 1/2, \quad p_k = (1/2)^k(1 - 1/2) = (1/2)^{k+1} \\
&P(W > w) = \frac{1}{2}e^{-(1-1/2)w} = \frac{1}{2}e^{-w/2} \\
&E(W) = \frac{1/2}{1-1/2} = 1,
\end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{1/2}{1-1/2} = 1, \quad \gamma = \frac{1/4}{1-1/2} = 1/2.$$

Priemerná doba obsadenosti linky je $\sum_{j>0} p_j = 1 - p_0 = \frac{1}{2}$. Všimnime si, že napriek rezerve vo frekvencii obsluhy sa čaká.

3.3 Systém $M/M/1/n$

Náhodný proces $X(t)$ tohoto systému sa od náhodného procesu, opisujúceho počet zákazníkov v systéme $M/M/1/\infty$ líši iba tým, že $p_k \equiv 0$ pre $k > n$ a do systému nemôže pribudnúť zákazník, ak $k = n$ (a teda $\lambda = 0$ v tomto prípade). Preto platí

$$p_{nn}(h) = \frac{d}{dh}e^{-\mu h} = -\mu h + o(h),\ p_{n,n+1}(h) = 0.$$

V rovniciach (3.3) sa to prejaví tak, že rovnica pre $k = n$ sa zmení na rovnicu

$$\dot{p}_n = \lambda p_{n-1} - \mu p_n.$$

Pre ustálený stav dostávame rovnako ako v systéme $M/M/1/\infty$

$$p_k = \rho^k p_0 \qquad \text{pre}\ \ 0 \le k \le n,$$

a z podmienky $\sum p_k = 1$,

$$p_0 = 1/\sum_{k=0}^{n} \rho^k = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}.$$

Charakteristiky γ, λ, atď. sa vypočítajú analogicky, ako pri systéme $M/M/1/\infty$. Novou charakteristikou je pravdepodobnosť odmietnutia

$$p_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}\rho^n$$

a priemerný počet odmietnutých za jednotku času $p_n \cdot \lambda$.

3.4 Systém $M/M/n/\infty$

Predpokladáme, že príchody zákazníkov sú opísané Poissonovým procesom a dĺžka doby obsluhy *jednej* linky je exponenciálne rozložená s priemernou dobou obsluhy $1/\mu$. Keďže linky obsluhujú navzájom nezávisle, značí to, že ak je v činnosti k liniek, je pravdepodobnosť, že nijaká z liniek na intervale dĺžky h neukončí činnosť rovná $e^{-k\mu h}$

Označíme $X(t)$ náhodný počet zákazníkov v systéme v okmaihu t, $p_k(t) = P(X(t) = k)$, $p_{ik}(h) = P(X(t+h) = k|X(t) = i)$. Ako v predchádzajúcich prípadoch, k tomu aby sme odvodili diferenciálne rovnice pre $p_k(t)$ nám stačí poznať prechodové pravdepodobnosti $p_{ik}(h)$ s presnosťou $o(h)$.

Všimnime si najprv, že Lemma z **3.2** zostáva v platnosti - stačí v nej zameniť μ za $k\mu$, kde k je rovné počtu liniek v činnosti.

Analogicky ako pre systém $M/M/1/\infty$ dostaneme

$$\dot{p}_{i,i+1}(0) = \lambda, \dot{p}_{ik}(0) = 0 \text{ pre všetky } k > i+1,$$
$$\dot{p}_{ii}(0) = -\lambda - \min\{i,n\}\mu, \dot{p}_{i,i-1}(0) = \min\{i,n\}\mu, \dot{p}_{ik}(0) = 0 \text{ pre } k < i-1 \text{ a } i > 0,$$
$$\dot{p}_{00}(0) = -\lambda, \dot{p}_{0k}(0) = 0 \text{ pre } k < 0, \qquad (3.2)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p_k(t) &= \frac{d}{dh}p_k(t+h)|_{h=0} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t)\frac{d}{dh}p_{ik}(h)|_{h=0} \\
&= \begin{cases} -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) & \text{pre } k=0 \\ \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t) & \text{pre } 1 \le k < n \; . \\ \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_k(t) + n\mu p_{k+1}(t) & \text{pre } k \ge n \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Opäť nás zaujímajú limitné stacionárne hodnoty pravdepodobností pre ktoré platia rovnice (3.14) s ľavými stranami nahradenými nulou. Označíme

$$
\begin{aligned}
z_k &= \lambda p_{k-1} - n\mu p_k \quad \text{pre } k > n \\
z_k &= \lambda p_{k-1} - k\mu p_k \quad \text{pre } 1 \le k \le n.
\end{aligned}
$$

Platí $z_0 = 0$, $z_k - z_{k+1} = 0$, teda $z_k = 0$ pre všetky k. Pre $0 < k \le n$ platí

$$
p_k = \frac{\lambda}{k\mu}p_{k-1} = \frac{\rho}{k}p_{k-1}, \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.
$$

Z toho dostávame

$$
p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0 \quad \text{pre} \quad 0 \le k \le n.
$$

Pre $k > n$ platí

$$
p_k = \beta^{k-n}p_n = \frac{\rho^{k-n}}{n^{k-n}}p_n,
$$

kde $\beta = \lambda/n\mu = \rho/n$ je *intenzita prevádzky.* Ak $\beta < 1$, pre p_0 dostaneme z rovnosti

$$
\begin{aligned}
1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k &= p_0\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!}\sum_{k=n}^{\infty}\beta^{k-n}\right) \\
&= p_0\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!}\frac{1}{1-\beta}\right) \\
p_0 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!}\frac{1}{1-\beta}\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Zrejme je nevyhnutné $\beta < 1$. Ďalšie charakteristiky: Pravdepodobnosť okamžitej obsluhy

$$
\sum_{k=0}^{n-1} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!},
$$

pravdepodobnosť čakania

$$
\pi = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = p_n \frac{1}{1-\beta}.
$$

Priemerný počet zákazníkov vo fronte je

$$\gamma = \sum_{r=0}^{\infty} r p_{n+r} = p_n \sum_{r=0}^{\infty} r\beta^r = p_n \frac{\beta}{(1-\beta)^2}.$$

Zákon rozloženia doby čakania: Onačíme $P(W_k > w)$ pravdepodobnosť, že ak zákazník v okamihu príchodu je vo fronte k-tý, čaká viac ako w, čo je rovné pravdepodobnosti, že za dobu w skončí obsluhu najviac $k-1$ zákazníkov, teda

$$e^{-n\mu w} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(n\mu w)^j}{j!}$$

(za jednotku času je obslúžených v priemere $n\mu$ zákazníkov);

$$\begin{aligned}
P(W > w) &= p_n e^{-n\mu w} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \sum_{j=0}^{k} \frac{(n\mu w)^j}{j!} \\
&= p_n e^{-n\mu w} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n\mu w)^j}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} \beta^k \\
&= p_n e^{-n\mu w} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n\mu w\beta)^j}{j!} \frac{1}{1-\beta} \\
&= \frac{p_n}{1-\beta} e^{-n\mu w} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda w)^j}{j!} = \pi e^{-(n\mu-\lambda)w}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(W) &= \int_0^{\infty} w \frac{d}{dw} \left[1 - \pi e^{-(n\mu-\lambda)w}\right] dw = -\pi \int_0^{\infty} w \frac{d}{dw} e^{-(n\mu-\lambda)w} dw \\
&= -\pi \left[w e^{-(n\mu-\lambda)w}\right]_0^{\infty} + \pi \int_0^{\infty} e^{-(n\mu-\lambda)w} dw \\
&= \frac{\pi}{n\mu - \lambda}.
\end{aligned}$$

Prevádzkovateľa zaujíma priemerný počet obsadených liniek:

$$\begin{aligned}
\nu &= \sum_{k=1}^{n} k p_k + n \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k = \rho[\sum_{k=1}^{n} k \frac{\rho^k}{k!} + n\rho^n \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\beta^{n-k}}{n!}] \\
&= p_0 \rho [\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} \beta^{k-n}] p_0 = \rho = \lambda/\mu = n\beta;
\end{aligned}$$

neobsadených liniek je v priemere $n - \rho = n(1-\beta)$. Všimnime si, že počet obsadených liniek nezávisí od n!

Systém $M/D/1$

Tento systém vyžaduje iný prístup. Kým príchod zákazníkov je opísaný Poissonovým procesom s parametrom λ, doba obsluhy je pevne daná, rovná $d = 1/\mu$.

Označme $X(t)$ počet zákazníkov v systéme, $p_k(t) = P(X(t) = k)$. Predpokladáme homogenitu procesu, $X(t)$ však nie je Markovov reťazec, pretože nie je Markovov reťazec odchodov . Skutočne, označme $X^-(t)$ počet odchodov zo systému za čas t. Potom pre $k > 0$ platí $P(X^-(t) = k|X^-(t-\frac{d}{2}) = k) = P(t - d/2$ padlo do ľavej polovice intervalu poslednej obsluhy zákazníka$) = 1/2$, kým $P((X^-(t) = k|X^-(t-d/2) = k, X^-(t-d) = k) = 0$

Reťazec $X^-(t)$ je však Markovovský ak ho chápeme ako reťazec s diskrétnym časom s krokom d (dokázať ako cvičenie). Označme $p_{jk} = p_{jk}(t, t+d)$. Potom platí

$$
\begin{aligned}
&p_{jk} = e^{-\lambda d}(\lambda d)^k/k! = e^{-\rho}\frac{\rho^k}{k!} \text{ pre } j = 0, k \geq 0,\\
&p_{jk} = e^{-\lambda d}(\lambda d)^{k-j+1}/(k-j+1)! = e^{-\rho}\rho^{k-j+1}/(k-j+1)! \text{ pre } j > 0, k \geq j-1,\\
&p_{jk} = 0 \text{ pre } 0 \leq k < j-1,
\end{aligned}
$$

kde $\rho = \lambda d$ je intenzita procesu. Rovnice pre pravdepodobnosti stavov procesu $X(t)$ budú

$$
\begin{aligned}
&p_0(t+d) = p_0(t)e^{-\rho} + p_1(t)e^{-\rho}\\
&p_k(t+d) = e^{-\rho}\left[p_0(t)\frac{\rho^k}{k!} + \sum_{j=1}^{k} p_j(t)\rho^{k-j+1}/(k-j+1)! + p_{k+1}(t)\right] \text{ pre } k > 0.
\end{aligned}
$$

Pre ustálený stav dostávame rovnice

$$
\begin{aligned}
e^{\rho}p_0 &= p_0 + p_1\\
e^{\rho}p_k &= p_0\frac{\rho^k}{k!} + \sum_{j=1}^{k} p_j\rho^{k-j+1}/(k-j+1)! + p_{k+1}\\
\sum_{k=0}^{\infty} p_k &= 1,
\end{aligned}
$$

z čoho dostávame rekurentný predpis

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (e^{\rho}-1)p_0\\
p_{k+1} &= -\sum_{j=1}^{k} p_j\rho^{k-j+1}/(k-j+1)! - p_0\frac{\rho^k}{k!} + e^{\rho}p_k
\end{aligned}
$$

a formuly pre p_k:

$$
\begin{aligned}
p_k &= p_0\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}e^{j\rho}\left[\frac{(j\rho)^{k-j}}{(k-j)!} + \frac{(j\rho)^{k-j-1}}{(k-j-1)!}\right] + e^{k\rho},\\
p_0 &= 1-\rho.
\end{aligned}
$$

Pravdepodobnosti čakacej doby:

Označme u dobu, ktorá uplynie medzi príchodmi dvoch po sebe nasledujúcich zákazníkov. Ako vieme, u je náhodná premenná s distribučnou funkciou $P(u \leq y) = 1 - e^{-\lambda y}$.

Označme W čakaciu dobu ľubovoľne vybraného zákazníka a W' čakaciu dobu zákazníka, ktorý prišiel po ňom.

Platí

$$W' = \max\{0, W + d - u\}$$

a teda

$$W' \leq w \text{ práve vtedy, ak } W + d - u \leq w,$$

z čoho

$$P(W' \leq w | u = y) = P(W \leq w + y - d)$$

a teda

$$P(W' \leq w) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} P(W \leq w + y - d) dy.$$

V ustálenom stave majú W a W' rovnaké rozloženie. Ak označíme $F(w) = P(W \leq w)$, z (3.15) vyplýva, že platí

$$F(w) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} F(w + y - d) dy. \tag{3.16}$$

(pričom $F(w) = 0$ ak $w < 0$).

Zderivujeme

$$\begin{aligned} F'(w) = & \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} F'(w + y - d) dy \\ = & [\lambda e^{-\lambda y} F(w + y - d)]_0^\infty \\ & + \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda y} F(w + y - d) dy \\ = & - \lambda F(w - d) + \lambda F(w). \end{aligned} \tag{3.17}$$

$F(w)$ je teda riešením diferenciálnej rovnice s oneskorením (3.17).

Rovnicu môžeme riešiť „rekurentne": ak poznáme $F(t)$ na intervale $[0, d]$, (3.17) predstavuje nehomogénnu rovnicu na $[d, 2d]$, atď.

Pre $w \leq d$ platí $F(w - d) = 0$, preto $F'(w)$ je riešením rovnice

$$F'(w) = \lambda F(w),$$

platí teda

$$F(w) = ce^{\lambda w} = (1 - \rho) e^{\lambda w}.$$

Hodnota $c = F(0)$ je totiž pravdepododbnosť, že v okamihu príchodu zákazníka je systém prázdny, čo je $P(W = 0) = p_0 = 1 - \rho$.

Pre $w \in [d, 2d]$ platí

$$F'(w) = -\lambda e^{\lambda(w - d)} + \lambda F(w),$$

z čoho

$$\begin{aligned}F(w) &= e^{\lambda(w-d)}F(d) + \int_d^w e^{\lambda(w-s)}e^{\lambda(s-d)}ds = \\ &= (1-\rho)e^{\lambda w} - \int_d^w e^{\lambda(w-s)}e^{\lambda(s-d)}ds \\ &= (1-\rho)e^{\lambda\cdot w} - \int_d^w e^{\lambda(w-d)}ds = e^{\lambda\cdot w} - (w-d)e^{\lambda(w-d)} \\ &= (1-\rho)e^{\lambda\cdot w}[1+(d-w)e^{-\lambda d}].\end{aligned}$$

$$F(w) = (1-\lambda d)e^{\lambda\cdot w} = (1-\rho)e^{\lambda w}.$$

Indukciou dostaneme formulu

$$F(w) = ((1-\rho)\sum_{k=0}^{n} e^{\rho(\mu w-k)}\frac{[-\rho(\mu w-k)]^k}{k!},$$

kde $n = [\mu w]$.

Stredná hodnota je

$$E(W) = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)},$$

3.6 Optimalizačné úlohy

Teória hromadnej obsluhy umožňuje riešiť rad optimalizačných úloh ekonomického obsahu. Nech napríklad v úlohe M/M/1/∞ sú náklady na prestoj linky c_0, na jej chod c_1, na počet zákazníkov v systéme c_2 (všetky za jednotku času), náklady na jedno prerušenie chodu linky c_3. Potom náklady na prevádzku systému za jednotku času sú v priemere

$$C(\rho) = c_0(1-\rho) + c_1\rho + c_2\frac{\rho}{1-\rho} + c_3(\mu-\lambda)\rho.$$

Prevádzkovateľ má možnosť voliť rýchlosť linky, kým λ od neho nezávisí). Ak chce minimalizovať náklady, volí μ tak, aby platilo

$$C(\rho) \to \min,$$

Nutnou odmienkou je $C'(\rho) = 0$, teda

$$-c_0 + c_1 + c_2\frac{1}{(1-\rho)^2} - c_3\lambda = 0,$$

z čoho dostaneme

$$(1-\rho)^2 = \frac{c_2}{c_0 - c_1 + c_3\lambda},$$

teda

$$\rho = 1 - \sqrt{\frac{c_2}{c_0 - c_1 + c_3\lambda}},$$

$$\mu = \lambda\rho = \lambda\left(1 - \sqrt{\frac{c_2}{c_0 + c_3\lambda - c_1}}\right)$$

V úlohe M/M/n/∞ môže byť optimalizačnou úlohou zvoliť optimálny počet liniek. Optimalizačným parametrom je tu prirodzené číslo a preto je spravidla jedinou optimalizačnou metódou preskúmavanie jednotlivých možností.

Príklad. Zamestnanci firmy si potrebujú čas od času niečo prefotiť na kopírke. Dlhodobé záznamy ukazujú, že kopírovať prichádza v priemere 12 pracovníkov za hodinu, kopírovanie im trvá v priemere 5 minút, pričom príchody sú opísané Poissonovým procesom a dĺžka doby obsluhy má exponenciálne rozloženie. Priemerný plat zamestnanca je 100 Sk/hod, náklady na amortizáciu a prevádzku linky sú 20 Sk/hod. Náklady sú súčtom strát v dôsledku čakania zamestnancov vo fronte a nákladov na prevádzku a amortizáciu kopírok. Koľko kopírok má firma zakúpiť a prevádzkovať, aby minimalizovala tieto náklady?

V tejto úlohe je $\lambda = \mu = 12$, $\rho = \lambda/\mu = 1, \beta = \lambda/(n\mu) = 1/n$. Očakávané hodinové náklady firmy sú $C(n) = 100\lambda E(W) + 20n$, kde podľa strany 20 v závislosti od n

$$E(W) = p_n \frac{\pi}{n\mu - \lambda} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!}\frac{1}{1-\beta}} \frac{\rho^n}{n!} \frac{1}{1-\beta} \frac{1}{n\mu - \lambda}$$

$$= [\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}\frac{1/n}{(1-1/n)^2}]^{-1} \frac{1}{n!} \frac{1}{1-1/n} \frac{1}{12n-12}$$

Pre n=2,3,4,5 je po rade $C(n)$=106.6, 65.7, 80.7, 100.1, optimálnym počtom kopírok je teda 3.

4. Teória zásob

Ako teória hromadnej obsluhy, tak aj teória zásob rieši rozličné varianty úloh, my sa obmedzíme na akúsi vzorku.

4.1. Základné deterministické úlohy (EOQ problém)

Zjednodušene predpokladáme, že potrebujeme doplňovať zásoby materiálu, ktorý sa spojite míňa (napr. pohonná hmota, čapované pivo). Ako dovoz, tak aj skladovanie niečo stojí, ale straty vznikajú aj pri nedostatku tovaru (prestoje prevádzky, stratení zákazníci). Otázka je, kedy a koľko doplňovať, aby celkové náklady na skladovanie, doplňovanie a nedostatok tovaru boli minimálne.

V najjednoduchšom modeli prepokladajme, že:

- tovar je neobmedzene deliteľný
- spotreba je rovnomerná a známa, λ jednotiek za jednotku času
- výška dodávky (Q) do skladu nie je ohraničená, jej okamih je ľubovoľne voliteľný
- skladovateľnosť je neohraničená a tovar nestarne
- náklady na jednu dodávku nezávisia od množstva
- neprítomnosť tovaru na sklade počas netriviálneho časového intervalu nie je prípustná.

Označme

c_s - náklady na skladovanie jednotky tovaru za jednotku času

c_d - cenu jednej objednávky tovaru (bez ohľadu na jej veľkosť)

Keďže skladovanie nie je zadarmo a neprítomnosť tovaru v sklade sa nepripúšťa, je zrejmné, že v optimálnom režime príde k doplneniu zásob iba v okamihu ich vyčerpania.

Označme $S(t)$ množstvo tovaru na sklade v okamihu t. Ak bolo v okamihu t_0 dodané množstvo Q, potom množstvo na sklade čase $t \in [t_0, t_0 + Q/\lambda]$ bude

$$S(t) = Q - \lambda(t - t_0). \tag{4.1}$$

K ďalšej dodávke teda príde v čase $t_0 + T$, kde

$$T = Q/\lambda,$$

a počet dodávok za jednotku času je

$$v = \lambda/Q.$$

Bez ujmy na všeobecnosti položme v (4.1) $t_0 = 0$. Náklady na jednotku tovaru, ktorý v sklade pobudne čas dĺžky $[t, t+\Delta t]$ sú rovné $c_s(t + O(\Delta t))$, jeho množstvo je $S(t+\Delta t) - S(t) = -\lambda\Delta t$, teda celkové náklady na skladovanie tovaru, ktorý zo skladu odíde v čase medzi t a $t + \Delta t$ sú

$$c_s(t + O(\Delta t))\lambda\Delta t$$

a celkové náklady na skladovanie počas obdobia medzi dvoma dodávkami sú

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum \lambda c_s(t + O(\Delta t))\Delta t = \lambda c_s \int_0^T t dt = \lambda c_s \frac{T^2}{2}.$$

Celkové náklady za jedno obdobie medzi dodávkami sú teda

$$c_d + \lambda c_s \frac{T^2}{2} = c_d + \frac{1}{2} c_s \frac{Q^2}{\lambda}$$

a za jednotku času sú

$$C(Q) = (c_d + \frac{1}{2} c_s \frac{Q^2}{\lambda}) v = \frac{c_d \lambda}{Q} + \frac{c_s Q}{2}$$

Minimálnu hodnotu dosahuje $C(Q)$ vtedy, ak $C'(Q) = 0$, teda pri

$$\hat{Q} = \left(\frac{2\lambda c_d}{c_s}\right)^{\frac{1}{2}}$$

resp. pri dobe

$$\hat{T} = \frac{\hat{Q}}{\lambda} = \left(\frac{2c_d}{\lambda c_s}\right)^{\frac{1}{2}}$$

medzi jednotlivými dodávkami. Minimálna hodnota nákladov je

$$\hat{C} = C(\hat{Q}) = \sqrt{2\lambda c_d c_s}$$

Poznámky.

1. Vzhľadom na to, že objem tovaru na sklade klesá s časom rovnomerne (lineárne), sú náklady na skladovanie úmerné súčinu objemu dodávky s priemernou dobou skladovania tovaru.
2. Ak tovar nemožno ľubovoľne deliť, môžeme Q považovať za celočíslené. Dodávka musí prísť po vyskladnení posledného kusu. V zmysle predchádzajúcej poznámky sú náklady na skladovanie po dobu medzi dvoma dodávkami rovné

$$\frac{1}{\lambda} c_s \frac{1}{\lambda} \left((Q-1) + (Q-2) + \cdots + 1\right) = \frac{1}{\lambda} c_s \frac{Q(Q-1)}{2}$$

Podmienka stacionarity na minimum celkových nákladov

$$c_s\frac{(Q-1)}{2}+c_d\frac{\lambda}{Q}\to \min$$

je rovnaká, ako pre prípad deliteľného tovaru. Pre kusový tovar bude $Q_{opt}=$ buď $[\hat{Q}]$ alebo $[\hat{Q}]+1$ podľa toho, či $C([\hat{Q}])<C([\hat{Q}]+1)$ alebo nie.

Ako príprava na stochastické úlohy sa vyšetruje model, v ktorom sa pripúšťa deficit zásob.

V tomto modeli sa pripúšťa, že rovnomerne rozložená spotreba je v období dĺžky T počas jej časti dĺžky $T_1\le T$ krytá, kým v časti dĺžky $T-T_1$ nie. Kým oceňovanie nákladov na skladovanie je dosť jednoznačné, oceňovanie strát z deficitu závisí od situácie (môžu to byť straty za prestoj, za nerealizovaný predaj, „goodwill loss",...).

Jednou z možností je, že sa deficit pokutuje cenou c^- za jednotku času a jednotku objemu. Pri deterministickej spotrebe je možné T,T_1 jednoznačne voliť objemami Q dielu dopytu, (prípadne neuspokojeného), pripadajúceho na obdobie medzi dodávkami a výškou S neuspokojeného dopytu. Potom celkové náklady za jednotku času sú

$$\begin{aligned}C(Q,S)&=\text{počet dodávok}\times\text{náklady za obdobie medzi dodávkami}\\&=\frac{\lambda}{Q}\times[\text{priemerné množstvo na sklade}\times\text{doba skladovania}\\&+\text{náklady na dodávku}+\text{straty z deficitu}]\\&=\frac{\lambda}{Q}[c_s\frac{Q-S}{2}\frac{Q-S}{\lambda}+c_d+c^-\frac{S}{2}\times\frac{S}{\lambda}]\\&=c_s\frac{(Q-S)^2}{2Q}+c_d\frac{\lambda}{Q}+c^-\frac{S^2}{2Q}\end{aligned}$$

Nech $\tilde{Q},\tilde{S}$ sú hodnoty $Q\ge 0$ resp. $0\le S\le Q$, pri ktorých $C(Q,S)$ dosahuje minimum. Ak $0<\tilde{S}<\tilde{Q}$, potom $\tilde{S}$ musí spĺňať

$$0=\partial C/\partial S(\tilde{Q},\tilde{S})=\frac{c_s}{2\tilde{Q}}[-2\tilde{Q}+2\tilde{S}]+c^-\frac{\tilde{S}}{\tilde{Q}}=-c_s+\frac{c_s}{\tilde{Q}}\tilde{S}+\frac{c^-}{Q}\tilde{S},$$

z čoho vyplýva

$$0<\tilde{S}=\tilde{Q}\frac{c_s}{c_s+c^-}<\tilde{Q}; \tag{4.2}$$

Ak $\tilde{Q}>0$, platí $\partial C/\partial Q(\tilde{Q},\tilde{S})=0$, teda

$$\tilde{Q}^2-\tilde{S}^2(1+\frac{c^-}{c_s})-\frac{2\lambda c_d}{c_s}=0.$$

Z toho a zo (4.2) dostaneme

$$\tilde{S}=(\frac{2\lambda c_d c_s}{c^-(c^-+c_s)})^{\frac{1}{2}}=\hat{C}(c^-(c^-+c_s))^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{Q} = \hat{Q}(\frac{c^- + c_s}{c^-})^{\frac{1}{2}},$$

kde $\hat{C}, \hat{Q}$ sú optimálna cena resp. množstvo pre úlohu bez deficitu. Hodnota

$$\frac{\tilde{S}}{\tilde{Q}} = \frac{c^-}{c^- + c_s}$$

sa nazýva *miera rizika*, hodnota

$$\frac{\tilde{Q}}{\hat{Q}} = ((c^- + c_s)/c^-)^{\frac{1}{2}}$$

sa nazýva *poistný koeficient.*

Inými možnosťmi sú, že sa penalizuje cena za neuskutočnený predaj, teda náklady sú

$$c^- = \lambda S$$

prípadne jednorazová pokuta za vznik deficitu.

Ak je strata z deficitu úmerná iba množstvu, dostávame úlohu minimalizovať funkciu

$$C(Q, S) = c_s \frac{(Q - S)^2}{2Q} + \frac{\lambda}{Q} c_d + c^- \frac{\lambda S}{Q}$$

Voľné minimum C vzhľadom na S pri danom Q sa dosahuje v bode $S^* = S^*(Q)$, pre ktorý platí

$$\frac{\partial C}{\partial S}(Q, S^*) = -c_s + c_s \frac{S^*}{Q} + c^- \frac{\lambda}{Q} = 0,$$

z čoho dostávame

$$S^* = \frac{Q}{c_s}[c_s - \frac{c^- \lambda}{Q}]^+ = [Q - \frac{c^- \lambda}{c_s}]^+$$

a

$$S^*(Q) = \begin{cases} 0 & \text{ak } Q < \frac{c^- \lambda}{c_s}, \\ Q - \frac{c^- \lambda}{c_s} & \text{ak } Q \geq \frac{c^- \lambda}{c_s}. \end{cases}$$

Dosadením do rovnice $\frac{d}{dQ}(Q, S_*(Q)) = 0$ dostaneme

$$Q_{opt} = \begin{cases} \sqrt{2\lambda c_d / c_s} & \text{ak } \lambda \geq 2c_d c_s/(c^-)^2 \\ \text{neexistuje} & \text{ak } \lambda < 2c_d c_s/(c^-)^2 \end{cases}$$

$$S_{opt} = \begin{cases} 0 & \text{ak } \lambda \geq 2c_d c_s/(c^-)^2 \\ \text{neexistuje} & \text{ak } \lambda < 2c_d c_s/(c^-)^2 \end{cases}$$

4.2. Stochastická úloha teórie zásob so signalizáciou

Viacero premenných, vystupujúcich v úlohe teórie zásob - spotreba, lehota dodávky, atď - môže mať náhodný charakter. Vzhľadom na to si nemôžeme vopred naplánovať, aby zásoby boli doplnené presne vtedy, keď sa vyčerpajú. Preto sa dopĺňanie rieši dvoma spôsobmi:

a) dodávka sa objedná, ak zásoby poklesnú na zvolené *poistné* množstvo (systém so signalizáciou)

b) výška zásob sa kontroluje periodicky (systém s periodickou kontrolou)

V tomto texte sa obmedzíme na prípad náhodnej spotreby, kým dobu dodávky budeme považovať za deterministickú. Označme λ - (náhodnú) spotrebu za jednotku času

c_d, c_s - náklady na dodávku resp, skladovanie jednotky tovaru za jednotku času

r - hladina zásob, pri ktorej sa objednáva

Q - objednávané množstvo

ϱ - priemerná výška zvyšku zásob v okamihu dodávky

δ - dĺžka dodacej lehoty

Predpokladáme, že zásoby sa míňajú rovnomerne, takže priemerná spotreba za dobu t je $t\bar{\lambda}$, kde $\bar{\lambda} = E(\lambda)$.

Potom priemerná výška zásob je $\varrho + \frac{1}{2}Q$ a

$$\varrho = r - \delta\bar{\lambda}$$

Ak prepokladáme $\varrho > 0$, teda $r > \delta\bar{\lambda}$, potom priemerné celkové náklady sú

$$C(r, Q) = c_s(\frac{1}{2}Q + r - \delta\bar{\lambda}) + c_d\frac{\bar{\lambda}}{Q} + D(r, Q), \tag{4.3}$$

kde $D(r, Q)$ sú straty v dôsledku (náhodného) deficitu.

Straty spôsobené deficitom sa modelujú dvoma spôsobmi:

1. D nezávisí od objemu deficitu, ale iba od jeho výskytu, vtedy

$$\begin{aligned} D &= c^- P(\lambda_\delta > r)\frac{\bar{\lambda}}{Q}, \\ &= c^- \frac{\bar{\lambda}}{Q}\int_r^\infty f_\delta(\eta)d\eta, \end{aligned}$$

kde λ_δ je náhodná spotreba za dobu δ a f_δ je hustota jej rozloženia.

2. D je úmerné priemernej veľkosti deficitu, teda

$$D = c^- P(\lambda_\delta > r)E(\lambda_\delta - r|\lambda_\delta - r > 0)\frac{\bar{\lambda}}{Q} = c^-\frac{\bar{\lambda}}{Q}\int_r^\infty (\eta - r)f_\delta(\eta)d\eta$$

Ak by sme napríklad minimalizovali náklady v úlohe 1, dostali by sme nutné podmienky optimality pre r, Q v tvare

$$0 = \partial C/\partial Q = c_s/2 - [c_d - c^- \int_r^\infty f_\delta(\eta)d\eta]\frac{\bar{\lambda}}{Q^2}$$

$$0 = \partial C/\partial r = c_s - c^-\lambda f(r)/Q = 0$$

Nutné podmienky optimality pre úlohu 2 sa ponechávajú ako cvičenie. Rovnice sa nedajú riešiť inak, ako numericky.

Poznámky.

1. Zrejme $\bar{\lambda_\delta} = \delta\bar{\lambda}$, vo všeobecnosti však nie je pravda, že by $\lambda_\delta = \delta\lambda$ v zmysle rovnosti náhodných premenných, teda že by platilo
$$P(\lambda_\delta \leq y) = P(\lambda \leq y/\delta). \tag{4.4}$$
Napríklad pre $\delta = \frac{1}{2}$ je totiž λ súčtom nezávislých náhodných premenných $\lambda_{\frac{1}{2}} + \lambda_{\frac{1}{2}}$ a pre λ neplatí (4.4). Možné je to pre normálne rozdelenia, kde platí, že ak X je náhodná premenná s rozložením $N(a, \sigma^2)$, potom súčet nezávislých premenných $X + X$ má rozloženie
$$N(2a, 2\sigma^2).$$
Pri ďalšom predpoklade spojitej závislosti rozloženia od času dostaneme, že ak λ má normálne rozloženie $N(\bar{\lambda}, \sigma^2)$, potom λ_δ má normálne rozloženie $N(\delta\bar{\lambda}, \delta\sigma^2)$
2. Z tohoto dôvodu je ťažko riešiť taký možný variant úlohy, v ktorom by sa deficit násobil dĺžkou jeho trvania.
3. Nevýhodou normálneho rozdelenia je, že pripúšťa aj záporné hodnoty spotreby, čo je nerealistické. Určitá ďalšia nepresnosť je v tom, že rozloženie pravdeopodobnosti závisí od stavu zásob - ak sa vyčerpajú, nie je možné ďalej čerpať.

V prípade náhodnej spotreby môžu byť zaujímavé aj iné úlohy, napr. aká má byť zásoba, aby bol dopyt s 90% pravdepodobnosťou krytý.

Príklad. Obchodný dom predáva v priemere 1200 fotoaparátov ročne. Platí 350 Sk za každú dodávku, 100 Sk za skladovanie aparátu ročne. Od objednávky k dodaniu uplynie 1 týždeň. Ročný dopyt aparátov je normálne rozložený so strednou hodnotou 1200 a štandardnou odchýlkou 70. Aká má byť poistná zásoba, aby dopyt po aparátoch bol s 90% pravdepodobnosťout krytý?

Chceme aby platilo
$$P(\lambda_\delta > r) < 0.1,$$
kde
$$\bar{\lambda}_\delta = 1200/52 \cong 23$$
$$\sigma_\delta = 1/(52)^{\frac{1}{2}} * 70 = 9.7,$$
teda
$$r = \text{Kvantil}[N(23, 9.7^2), 0.9] = 35.4$$

4.3. Stochastická úloha teórie zásob s periodickou kontrolou

Úloha stochastickej teórie zásob so signalizáciou vyžaduje stále sledovanie stavu zásob. Ďalšou nevýhodou je, že nie je pri ňom možné dodávku viacerých tovarov koordinovať. Riešením týchto problémov je, že sa zásoby dopĺňajú v pravidelných časových okamihoch podľa zásoby, ktorá je na sklade.

V ekvivalentných časových okamihoch, vzdialených od seba T časových jednotiek skontrolujeme stav zásob a doplníme ho na úroveň R. Predpoklady o spotrebe a dobu dodávky z odseku **4.2** ponechávame.

Ak je prvá objednávka v čase 0, v čase δ bude stav zásob rovný $R - \lambda_\delta$ a v čase $T + \delta$ pred dodávkou $R - \lambda_{T+\delta}$.Priemerná výška zásob počas jedného cyklu bude teda

$$\frac{R - \bar{\lambda}\delta + R - \bar{\lambda}(T + \delta)}{2} = R - (\delta + T/2)\bar{\lambda}$$

Celkové očakávané náklady za jednotku času teda budú

$$C(R, T) = c_s(R - \bar{\lambda}(\delta + T/2)) + c_d\frac{1}{T} + D(R, T)$$

kde $D(R, T)$ sú straty spôsobené deficitom. V prípade strát úmerných veľkosti deficitu budú

$$D(R, T) = \frac{c^-}{T}P(\lambda_T > R)E(\lambda_T - R|\lambda_T > R) = \frac{c^-}{T}\int_R^\infty (\lambda - R)f_T(\lambda)d\lambda,$$

podobne pre straty spôsobené nedostatkom.

4.4. Modely na základe teórie hromadnej obsluhy

Predstavme si napríklad antikvariát (kde abstrahujeme od rôznosti kníh), ktorý ako nakupuje, tak aj predáva knihy. Kupujúci aj predávajúci prichádzajú náhodne; predpokladajme, že procesy ich príchodov sú Poissonovým procesom.

Sklad modelujeme ako systém hromadnej obsluhy s knihami ako zákazníkmi, kupujúcimi ako obsluhou. Potom je to systém $M/M/1/n$, kde $1 \le n \le \infty$ je kapacita skladu. Náklady sa skladajú z nákladov na skladovanie a strát v dôsledku prázdneho skladu, teda

$$\begin{aligned} C = {} & c_s \times \text{priemerné množstvo tovaru} \\ & + c_0 \times \text{priemerná doba, za ktorú prichádzajúci zákazník nenájde tovar.} \end{aligned}$$

Optimalizovať môžeme napríklad celkový zisk Π, skladajúci sa z marže za tovar mínus náklady s optimalizačným parametrom $n =$ kapacita skladu.

Nech p je cena, za ktorú priekupník jednotku tovaru kupuje, q je cena, za ktorú ho predáva. Potom

$$\begin{aligned} \Pi(n) = & - c_s \times \text{priemerný počet zákazníkov vo fronte} \\ & - p \times \text{priemerné množstvo nakúpeného tovaru} \\ & + q \times \text{ priemerné množstvo predaného tovaru} \\ & - c_0 \times \text{priemerná doba, počas ktorej príchodzí zákazník nenájde tovar} \\ = & - c_s \sum_{k=1}^{n} kp_k - p\lambda(1 - p_n) + q\mu(1 - p_0) - c_0 p_0. \end{aligned}$$

Všimnime si, že

$$\lambda(1 - p_n) = \lambda(1 - \varrho^n p_0) = \lambda(1 - \varrho^n \frac{1 - \varrho}{1 - \varrho^{n+1}}) = \lambda\frac{1 - \varrho^n}{1 - \varrho^{n+1}},$$

kým

$$\mu(1 - p_0) = \mu(1 - \frac{1 - \varrho}{1 - \varrho^{n+1}}) = \mu\varrho\frac{1 - \varrho^n}{1 - \varrho^{n+1}} = \lambda\frac{1 - \varrho^n}{1 - \varrho^{n+1}}$$

(počet predaných je rovný počtu nakúpených, ak $\lambda < \mu$), takže

$$\begin{aligned}\Pi(n) &= -c_s p_0 \sum_{k=0}^{n} k\varrho^k + (q-p)\lambda\frac{1-\varrho^n}{1-\varrho^{n+1}} - c_0 p_0 \\ &= -\frac{1-\varrho}{1-\varrho^{n+1}}(c_0 + c_s\sum_{k=0}^{n} k\varrho^k) + (q-p)\lambda\frac{1-\varrho^n}{1-\varrho^{n+1}}\end{aligned}$$

4.5. Jednorázová úloha

Tejto úlohe sa hovorí aj "problém predavača novín".

Predpokladajme, že predavač objednáva jednorázovo tovar (noviny), rozdelenie dopytu po ktorom má distribučnú fuknciu F. Ak je ponuka vyššia ako dopyt, musí predávať nadbytočný tovar so stratou r za jednotku; ak je ponuka menšia ako dopyt, ujde mu zisk q za jednotku tovaru.

Označíme Q výšku objednávky a predpokladajme, že F je hladká, $F' = f$. Potom celková strata predajcu je

$$\Sigma(Q) = r\int_0^Q (Q-D)f(D)dD + q\int_Q^\infty (D-Q)f(D)dD$$

Cieľom je minimalizovať stratu, čo vedie k rovniciam

$$r\int_0^Q f(D)dD - q\int_Q^\infty f(D)dD = 0$$

Praktický príklad tejto úlohy je „overbooking" lietadiel.

4.6. Viacprvkové modely

Väčšie sklady často objednávajú viacero druhov tovaru od rovnakého dodávateľa. Spoločná dodávka viacerých druhov tovaru môže viesť k úsporám na nákladoch za dodávku, avšak k zvýšeniu nákladov za skladovanie.

Obmedzíme sa na deterministické modely bez možnosti deficitu.

Uvažujeme so spoločnou dodávkou tovaru a označíme λ_i - objem dopytu pri i-tom tovare c_{si} - cenu skladovania jednotky i-teho tovaru za jednotku času c_d - fixnú cenu dodávky, nezávislú od jej množstva Q_i - nemenný objem dodávky i-tého tovaru.

Ak označíme T dĺžku cyklu, celkové náklady na dodávky a skladovanie budú rovné

$$C(T) = c_d\frac{1}{T} + \sum_{i=1}^{n} c_{si}\frac{Q_i}{2} = c_d\frac{1}{T} + \sum_{i=1}^{n} c_{si}\frac{\lambda_i T}{2},$$

pretože

$$Q_i = T\lambda_i\ (\lambda_i = Q_i\frac{1}{T})$$

Z toho dostávame pre $\hat{T}$ také, že $C(\hat{T}) \le C(T)$ pre každé T rovnicu

$$\frac{\partial C}{\partial T}(\hat{T}) = c_d - \sum \frac{c_{si}\lambda_i}{2}\hat{T}^2 = 0,$$

a teda

$$\hat{T} = (\frac{2c_d}{\sum_{i=1}^n c_{si}\lambda_i})^{\frac{1}{2}}$$

V úlohe sa môžu vyskytnúť ohraničenia ako na objem skladovaných, tak aj na objem objednaných zásob, napr.

$$\sum_{i=1}^n w_i Q_i \leq A,$$

kde w_i môžu byť jednotkové objemy alebo hmotnosti, alebo aj výška prostriedkov, viazaných na skladovanie tovaru. V prípade takéhoto ohraničenia zostíme, či platí

$$\sum_{i=1}^n w_i \hat{T} \lambda_i \leq A,$$

t. j.

$$(\frac{2d}{\sum_{i=1}^n c_{si}\lambda_i})^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n w_i \leq A.$$

Ak platí, je $T_{\text{opt}} = \hat{T}$, ak nie, dostaneme T_{opt} z rovnice

$$A = \sum_{i=1}^n w_i Q_i = \sum_{i=1}^n w_i \lambda_i T_{\text{opt}} = A,$$

teda

$$T_{\text{opt}} = \frac{A}{\sum_{i=1}^n w_i \lambda_i}.$$

Literatúra

1. J. Kalas: Markovove reťazce. Skriptá, UK 1993
2. J. R. Norris: Markov Chains. Cambridge University Press 1997
3. Š. Peško: Operačná analýza 2 - Teória hromadnej obsluhy. Text na sieti, adresa http://frcatel.utc.sk/users/Pesko/OA2/oa2.pdf
4. L.Unčovský: Stochastické metódy operačnej analýzy. Alfa 1980
5. F. Zítek: Ztracený čas. Academia 1969