CVIČENIA Z DIFERENČNÝCH A DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

Pavel Brunovský

Čísla odsekov sa vzťahujú na text "Diferenčné a diferenciálne rovnice" od rovnakého autora.

Časť I

Odsek 1.3

1. Matematickou indukciou dokážte formulu (1.5) z textu
2. Majme afinný DS
$$x(t+1) = ax(t) + b.$$
Pre rozličné a, b nájdite čo najviac množín X takých, ktoré môžu pre tento DS slúžiť ako stavový priestor.

Odsek 1.4

3. V "pavučinovej" úlohe je
$$D(p) = 9 - 3p$$
$$S(p) = -1 + 2p$$
Ak $p(0) = 4$, vypočítajte prvé štyri členy postupnosti $p(t)$, $q^s(t)$, $q^d(t)$ (pre $t = 0, 1, 2, 3$) a zakreslite ich hodnoty do pavučinového diagramu.

Odsek 1.5

4. Anka Šporovlivá ukladá na revolvingový týždenný účet 100 Sk týždenne. Účet má ročnú úrokovú sadzbu 15%. Každý štvrtý týždeň si z výplaty uloží ďalších tisíc korún. Aký bude stav jej účtu po roku (= 52 týždňov)?
Poznámky: Na revolvingovom účte sa úročí v každom období (v tomto prípade týždni) čiastka, ktorá je na účte na začiatku obdobia. Sporiť začne 1. týždňom, skončí 52. týždňom.
5. Arktická únia (AÚ) predpísala svojim členským štátom, že o 3 roky nesmie ich štátny dlh prekročiť 6% ročného HDP. Súčasná výška štátneho dlhu Zeme Františka Jozefa (ZFJ) je 7% HDP, výška ročnej úrokovej miery dlhu je 5%, predpokladaný ročný nárast HDP je 8%. Akú relatívnu ročnú výšku deficitu (resp. prebytku) štátneho rozpočtu si ZFJ môže dovoliť, aby splnila normu AÚ?
Návod: Napíšte si diferenčnú rovnicu pre *relatívny* (k HDP) deficit.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

6. Suppose we can get a 30 year mortgage at 10 per cent interest. We can afford to make monthly payments of 800 dollars. How much can we afford to borrow? (mortgage = hypotéka)
7. Ponuka Slovenskej sporiteňe z roku 1997(?):
   "Vážená klientka, vážený klient,
   Slovenská sporiteľňa a. s. pre vás pripravila výnimočnú formu pravidelného sporenia určenú pre fyzické osoby - Rentové sporenie. Skladá sa z dvoch samsostatných , rovnako dlhých trojročných etáp"
   1. etapy sporenia
   2. etapy pravidelného vyplácania renty.
      Minimálna výška vkladu je 1000 Sk mesačne. Po ukončení etapy sporenia bude klientovi pravidelne vyplácaná renta. Pri trojročnej etape sporenia sa výška mesačne vyplácanej renty rovná 50% mesačnej sumy sporenia. Po ukončení etáp sporenia a vyplácanej renty bude klientovi ešte jednorazovo vyplatená celá naporená suma."

Predpokladajme, že alternatívne si počas etapy sporenia môžete ukladať vklad na termínované účty s priemernou úrokovou sadzbou 10% p. a., kým počas etapy vyplácania renty si môžete vklad uložiť na bežný účet so sadzbou 3% p. a. a vyberať si prostriedky vo výške renty vyplácanej SlSp. Oplatí sa vám využiť ponuku SlSp?

Odsek 2.1

8. Nájdite funkciu f s pevným bodom $\hat{x}$, v ktorom platí $f'(\hat{x}) = 1$ a bod $\hat{x}$ je a) asymptoticky stabilný b) nestabilný c) stabilný, ale nie asymptoticky.

Odsek 2.3

9. V "pavučinovom" modeli s funkciami ponuky resp. spotreby $S(p) = 4p - p^2$ a $D(p) = 5 - \frac{2}{3}p$ nájdite rovnováhy a určite ich stabilitu.

Odseky 3.1, 3.4

10. Predpokladajme, že máme možnosť mesačne investovať do aktíva, ktoré počnúc druhým mesiacom od investovania prinesie výnos vo výške 10% investície.a) Ak výnos z investície opäť investujeme do toho istého aktíva, koľkonásobne sa nám po troch rokoch zhodnotí počiatočná investícia ? b) ako sa budú v dlhodobom priemere investície mesačne zhodnocovať?

Odsek 3.2

11. Nájdite trajektóriu lineárneho dynamického systému

$$x_1(t+1) = -\frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) + 1$$
$$x_2(t+1) = -\frac{1}{2}x_1(t) + x_2(t) - 1,$$

vyhovujúcu podmienkam

$$x_1(0) = 2, \qquad x_2(0) = 5.$$

Odsek 3.3

12. V modeli dynamiky vekovo štruktúrovanej populácie s dátami z prednášky a) nájdite najnižšiu pôrodnosť, pri ktorej populácia dlhodobo prežije b) pri takejto hodnote pôrodnosti nájdite asymptotický vekový profil tejto populácie

Odsek 3.4

13. Postupnosť $\{y(t)\}$ vyhovuje rovniciam
$$y(t+1) + y(t)/2 + y(t-1)/4 = 2,$$
$y(0) = y(1) = 0$. Vypočítajte numerickú hodnotu $y(10)$.
14. Nájdite riešenie diferenčnej rovnice
$$y(t+1) = -2y(t) - 2y(t-1) + 1,$$
vyhovujúcu podmienkam
$$y(0) = 1, \qquad y(1) = 0.$$

Odsek 3.6

15. Vypočítajte, aká je pravdepodobnosť bankrotu hráča rulety (stavajúceho na červené alebo čierne), ak má $n = 10$ denárov a $N = 20$ ($p = \frac{18}{37}$).
16. Čo, ak n, N sú ako v úlohe 4. a hádžeme mincou ($p = \frac{1}{2}$)?
[Problém je, že charakteristická rovnica má dvojnásobný koreň; treba maticu A zodpovedajúceho dynamického systému previesť do Jordanovho kánonického tvaru, alebo riešiť úlohu na kolene]

Odsek 3.7

17. Nájdite pevný bod diskrétneho dynamického systému
$$x_1(t+1) = \frac{1}{2}x_1(t) + x_2(t) - 1$$
$$x_2(t+1) = -x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) + 1$$
a určite jeho stabilitné vlastnosti.
18. Overte, že charakteristický polynóm "sprievodnej" matice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$
je
$$(-1)^n[\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_1\lambda - a_0]$$
(keď nie inak, tak aspoň pre $n = 2, 3$).
Návod pre úplný dôkaz: použite matematickú indukciu

Časť II

Odsek 2.1

19. (*O. Levenspiel*) Snake-Eyes Magoo je človek pevných zvykov. Napríklad piatkové večery trávi všetky rovnako. S týždennou mzdou 180 dolárov ide najprv do herne, hrá 2 hodiny na rulete, prehrá 45 dolárov a potom ide domov. Spôsob hrania je rovnako stály: stavia vždy čiastky úmerné hotovosti, ktorú má v ruke. Aj jeho prehry sú predpovedateľné, ich rýchlosť je úmerná jeho hotovosti. Tento týždeň dostal pridané a hral preto 3 hodiny, domov však išiel ako inokedy so 135 dolármi. Koľko dostal pridané?

Odsek 2.2

20. Dokonale miešaným prietokovým chemickým,reaktorom o objeme 2 m^3 preteká objemovým prietokom 1 $m^3/hod.$ látka A, z ktorej 80% za hodinu zreaguje na látku B.
a) Ak sú na začiatku v reaktore látky A a B prítomné v pomere 1:1, v akom pomere budú po 5 hodinách?
b) Na aký pomer sa ustáli prítomnosť látok A a B v reaktore?
21. (*O. Levenspiel*) Hromadu štrku o objeme 20000 t treba premiestniť, a to použitím lopatového rýpadla, plniaceho zásobník, z ktorého sa ďalej dopravným pásom štrk dopraví na nové miesto. Spočiatku hromadí rýpadlo veľké množstvá štrku, s ubúdaním zásoby štrku však klesá dopravná rýchlosť rýpadla, pretože k ceste od zásobníka po náklad a s ním treba viac času. V hrubom odhade môžeme preto počítať, že rýchlosť, akou rýpadlo dopravuje štrk je úmerná veľkosti hromady, ktorú ešte treba previezť, pričom jeho počiatočná rýchlosť je 10 t/min. Naproti tomu dopravuje transportný pás štrk rovnomerne rýchlosťou 5 t/min. Spočiatku bude rýpadlo pracovať rýchlejšie než dopravník, neskôr pomalšie, v zásobníku sa teda materiál bude sprvu hromadiť a potom ho bude ubúdať.
a) Aké bude najväčšie množstvo štrku v zásobníku?
b) Kedy sa toto maximum dosiahne?
c) Kedy sa bude rýchlosť dopĺňania zásobníka rovnať rýchlosti jeho vyprázdňovania?
d) Kedy sa zásobník vyprázdni?

Odsek 2.3

22. Načrtnite riešenia diferenciálnej rovnice
$$dx/dt = x(1-x)(x+2).$$
23. Pre $\alpha \in \mathbb{R}$ nájdite riešenie diferenciálnej rovnice
$$\frac{dx}{dt} = x^\alpha,$$
spĺňajúce a) $x(1) = 1$, b)$x(1) = 0$, c) $x(1) = -1$.
24. Sformulujte a odôvodnite analógiu tvrdenia (iv) Vety z 2.1 pre jeden z prípadov a) $f(x_0) < 0, t \to \infty$, b) $f(x_0) > 0, t \to -\infty$, c) $f(x_0) < 0, t \to -\infty$.
[Návod: Použite transformácie $t \mapsto -t$ resp. $x \mapsto -x$]

25. Dokážte: Ak $x(t)$ je riešením rovnice $dx/dt = f(x)$, prechádzjúce bodom (t_0, x_0), potom $\tilde{x}(t) = x(t-\tau)$ je riešením tejto rovnice, prechádzajúcim bodom $(t_0 + \tau, x_0)$.
26. Predpokladajme, že mesto rastie tak, že si zachováva zhruba kruhový pôdorys. Maximálny čas cestovania v meste je úmerný jeho priemeru, kým počet jeho obyvateľov je úmerný jeho ploche. Rýchlosť rastu mesta je úmerná maximálnej cestovnej dobe. Ak malo mesto 5000 obyvateľov v roku 1980 a 20000 obyvateľov v roku 1990, koľko obyvateľov by malo mať v roku 2010?

Odsek 2.6

27. Nájdite riešenia diferenciálnej rovnice

$$\dot{x} = \frac{t - t^2}{2x + 1}$$

prechádzajúce bodom t_0, x_0 pri a) $t_0 = 0, x_0 = 2$, b) $t_0 = 1, x_0 = -1$. Načrtnite riešenia a určite ich interval existencie
28. Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$\dot{x} = a(t)x.$$

29. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)$$

prechádzajúce bodom (t_0, x_0).
[Návod: riešte diferenciálnu rovnicu pre $e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} x(t)$]
30. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice *o rovnakých rozmeroch*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x + t}{2x + 3t}$$

prechádzajúce bodom $(1, 1)$. Určite jeho interval existencie a načrtnite ho.
[Návod: použite substitúciu $x = tu$ a riešte diferenciálnu rovnicu pre u.]
31. Rýchlosť v pohybu snehovej frézy je určená formulou $v = \frac{20}{1+h}$ km/h, kde h je výška snehu na vozovke v m. Fréza má za úlohu odstrániť sneh z 10 km stúpajúcej horskej cesty, na ktorej začiatku má sneh výšku 10 cm a jeho výška rovnomerne narastá o 3 cm na kilometri. Za akú dobu ukončí fréza svoju úlohu?
32. Určte tvar zrkadla, ktoré sústreďuje rovnobežné lúče do jedného bodu.
[Návod: nech dopadajúce lúče sú rovnobežné s osou x a spomenutý bod nech je v počiatku súradnicového systému. Zo symetrie je zrejmé, že zrkadlo má tvar rotačnej plochy opísanej nejakou krivkou. Použite geometrickú interpretáciu derivácie a fakt, že uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu.]

Odsek 3.1

33. Nájdite riešenie systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= 3x + 4y, \end{aligned}$$

spĺňajúce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$.

34. Nájdite riešenie systému

$$\dot{x} = x + y$$
$$\dot{y} = -2x + 3y,$$

spĺňajúce $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

35. *(O. Levenspiel)* Práve mala začať veľká námorná bitka, neskoršie známa ako bitka pri Trafalgare (1805). Admirál Villeneuve si pyšne prezeral svoje mocné loďstvo v počte 33 lodí, ktoré sa majestátne plavilo v zástupe v ľahkom vetríku. Britské loďstvo, ktorému velil lord Nelson a tvorilo ho 27 lodí už bolo na dohľad. Villeneuve však odhadol, že bude trvať ešte dve hodiny, než bitka začne, otvoril ďalšiu fľašu burgundského a bod za bodom opäť preberal svoju starostlivo pripravenú bojovú stratégiu. Ako bolo v tých dobách v námorných bitkách zvykom, obidve loďstvá sa budú plaviť v zástupe, rovnobežne jedno s druhým rovnakým smerom a budú na seba zúrivo strielať z diel. Podľa dlhoročných skúseností z vtedajších námorných bitiek bolo dobre známe, že stupeň poškodenia jedného loďstva je priamo úmerný intenzite paľby loďstva druhého. Villeneuve, vychádzajúc z predpokladu, že každá z jeho lodí bude stáť proti jednej britskej, veril vo svoje víťazstvo. Pozrel na svoje slnečné hodiny, vzdychol si "C'est la vie", keď videl, že vanie ľahký vetrík - tá bitka určite neskončí včas, aby stihol v televízii svoju obľúbenú kovbojku. V duchu už videl titulky v zajtrajších novinách: "Britské loďstvo je zničené, straty Villeneuvea sú …". Villeneuve sa zarazil. Koľko lodí stratí? Zavolal svojho vrchného vincúra pána Duboisa a položil mu túto otázku. Akú dostal odpoveď? *(koniec prvej časti)*
Práve v tom okamžiku sa Nelson, ktorý si vychutnával svieži vzduch na zadnej palube lode Victory zdesil pri myšlienke, že je všetko pripravené, až na jednu maličkosť - zabudol zostaviť svoj bojový plán. V rýchlosti povolal na poradu veliteľa loďstva Archibalda Forsytha-Smytha, najspoľahlivejšieho zo spoľahlivých. Keďže bol oboznámený so zákonom o sile paľby, pociťoval Nelson nechuť bojovať s celým francúzskym loďstvom (aj on už videl titulky v zajtrajších novinách). Napokon, nebolo by žiadnou hanbou pre Nelsona, ak by bol porazený v bitke so silnejším súperom, pokiaľ by urobil čo sa dalo a zachoval pravidlá hry; zdalo sa mu však, že by sa dal vyparatiť malý úskok. I keď ho hrýzlo svedomie, či to smie považovať za fair-play, skúmal túto možnosť bližšie. Bolo možné "preraziť líniu", inými slovami, vyplávať rovnobežne s francúzskym loďstvom, ale potom do neho vbehnúť a rozdeliť ho na dve časti. Zadná časť môže byť prinútená k boju a zmetená skôr, než sa predná časť stihne otočiť a dostať sa späť do bitky. Rozhodujúca otázka znie: má rozštiepiť francúzske loďstvo a ak áno, v ktorom bode sa to má stať a s koľkými svojimi loďami sa má stretnúť s prednou a s koľkými so zadnou časťou loďstva nepriateľa? Veliteľ Forsyth-Smyth, ktorý bol tak bezohľadne odvolaný od svojho grogu, nevrlo súhlasil s tým, že túto otázku zváži a že Nelsonovi poradí, v ktorom bode má francúzske loďstvo rozštiepiť, aby ich nádej na úspech bola čo najväčšia. Súhlasil tiež, že predpovie výsledok bitky vedenej použitím tejto stratégie. Čo poradil Forsyth-Smyth Nelsonovi?

Odsek 3.2

36. Dokážte, že korene polynómu 2. stupňa majú reálne časti záporné práve vtedy, ak sú všetky koeficienty polynómu rovnakého znamienka.

37. Nájdite polynóm 3.stupňa s koeficientmi rovnakého znamienka, a ktorého nie všetky korene majú zápornú reálnu časť

Odsek 4.4

38. Vypočítajte riešenie systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= -y + e^{-2t}, \end{aligned}$$

spľňajúce $x(0) = 0,\ y(0) = -2.$

Odsek 4.5

39. Nájdite riešenie rovnice

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = e^{-2t}$$

spĺňajúce $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$.

40. Nájdite riešenie rovnice

$$\ddot{y} - y = e^{t},$$

spĺňajúce $y(1) = 0$, $\dot{y}(1) = 2$.

41. Nájdite riešenie rovnice

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = \cos t,$$

spĺňajúce $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 3$.

42. Nájdite riešenie rovnice

$$\ddot{y} + y = \sin(t - \pi) + 2\sin 2(t - \pi),$$

spĺňajúce $y(\pi) = 0$, $\dot{y}(\pi) = 1$.

43. Nájdite riešenie rovnice

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 2e^{-3t},$$

spľňajúce $y(-1) = -2,\ \dot{y}(-1) = 2.$

44. Vypočítajte riešenie rovnice

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 2e^{-t} + 3e^{-t}\sin 2t,$$

spľňajúce $y(0) = 1, \dot{y}(0) = -1.$

Odsek 4.7

45. Vypočítajte všeobecné riešenie rovnice budeného elektrického obvodu v prípadoch

a) $b = 0$, $\omega = \omega_0$, b) $b \geq \omega_0$.

Odsek 5.6

46. Vypočítajte hodnotu $x(0.2)$ riešenia $x(t)$ rovnice

$$\dot{x} = x^2 - 2t,$$

spĺňajúceho $x(0) = 1$ s presnosťou 0.1.

47. Vypočítajte približne hodnotu $x(0.8)$ riešenia $x(t)$ rovnice

$$\ddot{x} = tx,$$

spĺňajúceho $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 0$.

Odsek 6.2

48. Vyšetrite stabilitu v pavučinovom modeli za predpokladu, že dodávateľ určuje cenu a spotrebiteľ množstvo.

Odsek 7.1

49. Dokážte, že ak C je diferencovateľná krivka v $\mathbb{R}^n$, potom ku každému bodu $x \in C$ existuje jeho okolie V, index i a diferencovateľné funkcie h_j, $j \neq i$ také, že $C \cap V = \{x : x_j = h_j(x_i)\}$.
Poznámka: Množinu C nazývame diferencovateľnou krivkou, ake $C = \phi(I)$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $\phi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ spĺňa $\phi'(t) \neq 0$ pre všetky t.
50. Vhodnou metódou (separáciou premenných, metódou izoklín…) buď vypočítajte, alebo načrtnite trajektórie nasledovných rovníc:
a) $\dot{x} = y,\ \dot{y} = x$
b) $\dot{x} = (1-y)x,\ \dot{y} = (-4+2x)y$
c) $\dot{x} = (3-3x-y)x,\ \dot{y} = (2-x-y)y$

Odseky 7.2 - 7.5

51. Určte typ a načrtnite fázový portrét systému diferenciálnych rovníc
a)
$$\dot{x} = 2x + 3y,\ \dot{y} = x + y$$
b)
$$\dot{x} = 2x + 3y,\ \dot{y} = -x + y$$
c)
$$\dot{x} = 2x + y,\ \dot{y} = x + y$$

Odseky 7.8, 7.9

52. Určte charakter stacionárnych bodov systémov
a)
$$\dot{y} = (3-3x-y)x,\ \dot{x} = (2-x-y)y$$
(iba bodu C, ktorý sme nerobili na prednáške)
b)
$$\dot{x} = (3-3x-y)x,\ \dot{y} = (2-x-y)y$$
a doplňte ich fázový portrét v kvadrante $x \geq 0, y \geq 0$.
53. Určte charakter stacionárnych bodov a načrtnite fázový portrét systému, ktorý vznikne z "pavučinovej" úlohy na 16. 4. pri
$$S(p) = 4p - p^2$$
$$D(p) = 4 - p$$
v oblasti $0 \leq p \leq 4,\ q \geq 0$.

54. Načrtnite fázový portrét konzervatívnych systémov s jedným stupňom voľnosti

a) $\ddot{x} = x^3 - 4x^2 + 3x$
b) $\ddot{x} = -x^3 + 4x^2 - 3x.$