$= -\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \ln x\right) dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n \ln x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$; rovnomerná konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \ln x$ na $(0,1]$ vyplýva z Weierstrassovho kritéria$\Big)$ [36];

$\boxed{\mathbf{405}}$ $\pi = 3.141\,592\,654 \pm 10^{-9}$, pri dôkaze rovnosti (4.19) sme použili vzorce $2\,\mathrm{arctg}\,\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ pre $\alpha^2 < 1$, $\mathrm{arctg}\,\alpha - \mathrm{arctg}\,\beta = \mathrm{arctg}\,\frac{\alpha - \beta}{1+\alpha\beta}$ pre $\alpha\beta > 0$ (pozri riešenie pr. I.87.1);

$\boxed{\mathbf{406}}$ $\ln 2 = 0.693\,147\,2 \pm 10^{-7}$, $\ln 3 = 1.098\,612\,3 \pm 10^{-7}$, $\ln 5 = 1.609\,437\,9 \pm 10^{-7}$, $\ln 6 = 1.791\,760 \pm 10^{-6}$, $\ln 10 = 2.302\,585 \pm 10^{-6}$ $\Bigg($inverzná matica k matici $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ je $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \\ -16 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\ln \frac{9}{10} = -0.105\,360\,516 \pm 10^{-9}$, $\ln \frac{24}{25} = -0.040\,821\,995 \pm 10^{-9}$, $\ln \frac{81}{80} = 0.012\,422\,520 \pm 10^{-9}\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{407}}$ **1**. $2.835\,4 \pm 10^{-4}$ $\left(\int_2^4 e^{1/x}\, dx = \int_2^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, x^n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \int_2^4 \frac{dx}{x^n}\right)\right.$, približnú hodnotu $\ln 2$ pozri v riešení pr. 357$\Big)$; **2**. $8.040\,5 \pm 10^{-4}$ $\left(\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+1/x) + \ln x}{x}\, dx = \int_{10}^{100} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx^{n+1}}\right) dx + \int_{10}^{100} \frac{\ln x}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \int_{10}^{100} \frac{dx}{x^{n+1}}\right) + \frac{3}{2} \ln^2 10\right.$, približnú hodnotu $\ln 10$ pozri v riešení pr. 406; treba si uvedomiť, že Maclaurinov rad funkcie $\ln(1+x)$ nekonverguje v žiadnom bode intervalu $[10, 100]$, preto sme použili uvedené úpravy$\Big)$;

Dodatok. Krivky a funkcie dané parametricky

$\boxed{\mathbf{408}}$ **1**. $\varrho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ $\big($ak v danej rovnici položíme $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, $\varphi \ge 0$, dostaneme $\varrho^4 = \varrho^2 a^2 \sin 2\varphi$, odtiaľ $\varrho = 0$ (a φ je ľubovoľné) alebo $\varrho^2 = a^2 \sin 2\varphi$; pretože $\varrho \ge 0$, je druhá z týchto rovníc ekvivalentná s rovnicou $\varrho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$; rovnicou $\varrho = 0$ je popísaná množina obsahujúca len bod s pravouhlými súradnicami $x = y = 0$, tento bod je obsiahnutý aj v množine popísanej rovnicou $\varrho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$ (stačí položiť $\varphi = 0$), preto na popis našej krivky stačí rovnica $\varrho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, pritom — pretože body s polárnymi súradnicami (ϱ, φ) a $(\varrho, \varphi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, sú totožné a pretože jednou z periód funkcie $a\sqrt{\sin 2\varphi}$ je číslo 2π — sa stačí obmedziť na $\varphi \in [0, 2\pi]$ také, že $\sin 2\varphi \ge 0$, porovnaj tiež s poznámkou [6] k pr. 410.4$\big)$; **2**. $\varrho = a\sqrt{\sin 4\varphi}$ [1]; **3**. $\varrho = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sin 2\varphi}}{\sqrt{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi}} = \frac{a\sqrt{\sin 2\varphi}}{\sqrt{1 + \cos^2 2\varphi}}$ [1];

4. krivka je zjednotením polpriamok $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, krivky $\varrho = 0$ $\big($tj. jednobodovej množiny $\{0, 0)\}\big)$ a krivky $\varrho = \frac{1}{a(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}$ $\left(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi = \sqrt{2}\, \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \left(\sin^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)\right)$;

$\boxed{\mathbf{409}}$ **1.** daná krivka je zjednotením jednobodovej množiny $\{(0, -a)\}$ a krivky s parametrickým vy-

---

[36] dosadením $x = \pi$ do rovnosti z poznámky [37] k pr. 249 možno dokázať rovnosť $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\big($ iný spôsob dôkazu tejto rovnosti pozri v [10, odsek 440, pr. 7, alebo odsek 511, pr. 4]$\big)$

[1] k definičnému oboru pozri poznámku [6] k pr. 410.4

jadrením $x = \dfrac{a(1-t)}{(1+t)^2}$, $y = \dfrac{at(1-t)}{(1+t)^2}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ $\Big($pre každý bod $X \equiv (x,y)$ okrem bodov tvaru $(0,b)$, $b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, existuje usporiadaná dvojica (x,t) tak, že $X \equiv (x,tx)$; bod tvaru (x,tx), $x \neq 0$, leží na našej krivke práve vtedy, keď $(x+tx)^2 = a(x-tx)$, odtiaľ $x(1+t)^2 = a(1-t)$ (využili sme predpoklad $x \neq 0$) a — pretože pre $t=-1$ neexistuje x riešiace poslednú rovnicu — $x = \dfrac{a(1-t)}{(1+t)^2}$, potom $y = xt = \dfrac{at(1-t)}{(1+t)^2}$; zostáva nájsť body tvaru $(0,b)$ ležiace na našej krivke: dosadením $x=0$ do pôvodnej rovnice dostávame $y^2 = -ay$, teda $y=0$ alebo $y=-a$, z bodov $(0,0)$, $(0,-a)$ len bod $(0,-a)$ nie je popísaný predtým získanými parametrickými rovnicami [2]; **2.** $x = \dfrac{at}{1+t^4}$, $y = \dfrac{at^2}{1+t^4}$, $t \in \mathbf{R}$ $\Big($položili sme $y = tx$; parametrické vyjadrenie danej krivky možno tiež odvodiť z jej rovnice v polárnych súradniciach, ktorá má tvar $\varrho = \dfrac{a\cos^2\varphi \sin\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$, odtiaľ $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, a ak získané zlomky rozšírime $\dfrac{1}{\cos^4\varphi}$, je $x = \dfrac{a\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1+\mathrm{tg}^4\varphi}$, $y = \dfrac{a\,\mathrm{tg}^2\varphi}{1+\mathrm{tg}^4\varphi}\Big)$; **3.** $x = 4t(t-1)$, $y = 16t^3(t-1)^2$, $t \in \mathbf{R}$; **4.** $x = \sqrt[7]{\dfrac{(t-1)^3}{t^5}}$, $y = \sqrt[7]{\dfrac{t-1}{t^4}}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ (položili sme $x = ty^3$);

$\boxed{410}$ **1.** elipsa (pre $b \neq d$), resp. kružnica (pre $b = d$): $\dfrac{(x-a)^2}{b^2} + \dfrac{(y-c)^2}{d^2} = 1$; **2.** vetva hyperboly: $x = \sqrt{y^2+1}$ $\Big($inverznou funkciou k funkcii sh je funkcia $\mathrm{Arsh}\,t := \ln\big(t + \sqrt{t^2+1}\big)\Big)$; **3.** úsečka $y = \dfrac{\pi}{2} - x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\Big(y = \mathrm{arcctg}\,(\mathrm{tg}\,x)$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, ďalej použite rovnosť $\mathrm{arcctg}\,\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\alpha$ [3]$\Big)$; **4.** priamka p : $y\cos\varphi_0 - x\sin\varphi_0 = d$ $\Big($podľa poznámky [6] k zadaniu stačí uvažovať $\varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + \pi)$; daná rovnica je ekvivalentná s rovnicou $d = \varrho\sin(\varphi - \varphi_0) = \varrho\sin\varphi\cos\varphi_0 - \varrho\cos\varphi\sin\varphi_0$, $\varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + \pi)$, ktorá — pretože podľa definície polárnych súradníc je $\varrho\cos\varphi = x$, $\varrho\sin\varphi = y$ — popisuje tie body priamky p, ktoré ležia vnútri uhla s vrcholom $(0,0)$, ktorého počiatočné (koncové) rameno zviera s kladným smerom osi Ox uhol φ_0 $(\varphi_0 + \pi)$; ľahko zistíme, že vnútri tohto uhla ležia všetky body priamky $p\Big)$; **5.** parabola $y^2 = -4a(x-a)$ $\Big($využite vzťahy $\cos^2\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{1}{2}(1+\cos\varphi)$, $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varrho\cos\varphi = x\Big)$; **6.** parabola $y^2 = 4a(x+a)$;

$\boxed{411}$ **2.** $x = 2r\cos^4\varphi$, $y = 2r\cos^3\varphi\sin\varphi$, $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\Big($rovnica krivky K v polárnych súradniciach je $\varrho = 2r\cos^3\varphi$, $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$: označme φ veľkosť orientovaného uhla AOB; bod B leží na kružnici $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ a na priamke $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$, odtiaľ $B \equiv (2r\cos^2\varphi, r\sin 2\varphi)$, $C \equiv (2r\cos^2\varphi, 0)$; z pravouhlého $\triangle$–a OCM, v ktorom poznáme dĺžku prepony, vypočítame veľkosť $|OM|$, polárne súradnice bodu M sú potom $\big(|OM|, \varphi\big)\Big)$;

3. $x = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi + b\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, $\varphi \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$; krivka K je zjednotením grafov funkcií $x = \dfrac{(a+y)\sqrt{b^2-y^2}}{y}$ a $x = -\dfrac{(a+y)\sqrt{b^2-y^2}}{y}$ $\Big($zvoľme novú súradnicovú sústavu s osami Ox' a Oy' tak, aby platilo $x' = x$, $y' = y + a$; potom os Ox je daná rovnicou $y' = a$; ak φ je smerový uhol priamky p, tak $p \equiv y' = \dfrac{a}{\mathrm{ctg}\,\varphi}$, priesečník priamok Ox a p má súradnice $x' = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi$, $y' = a$ a polárne súradnice (vzhľadom na novú súradnicovú sústavu) $\varrho = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \dfrac{a}{\sin\varphi}$ a φ; polárne súradnice bodu M sú potom $(\varrho + b, \varphi)$ alebo $(\varrho - b, \varphi)$, odtiaľ $x' = (\varrho + b)\cos\varphi = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi + b\cos\varphi$, $y' = (\varrho + b)\sin\varphi = a + b\sin\varphi$, $\varphi \in (0,\pi)$ alebo $x' = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi - b\cos\varphi$, $y' = a - b\sin\varphi$, $\varphi \in (0,\pi)$; ak využijeme rovnosti $\mathrm{ctg}\,(\varphi + \pi) = \mathrm{ctg}\,\varphi$, $\cos(\varphi + \pi) = -\cos\varphi$, $\sin(\varphi + \pi) = -\sin\varphi$, môžeme písať $x' = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi + b\cos\varphi$, $y' = a + b\sin\varphi$, $\varphi \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$, odtiaľ $x = x' = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi + b\cos\varphi$, $y =$

---

[2] pokiaľ by sme položili $x = ty$, dostali by sme parametrické vyjadrenie, ktorým by bol popísaný bod $(0,-a)$, ale nebol by ním popísaný bod $(a,0)$ ležiaci tiež na našej krivke

[3] na jej dôkaz stačí na obidve strany aplikovať funkciu ctg

$y' - a = b \sin\varphi$, $\varphi \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$; pre $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, resp. $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ je týmito rovnicami parametricky daná funkcia $x = \frac{(a+y)\sqrt{b^2-y^2}}{y}$, resp. $x = -\frac{(a+y)\sqrt{b^2-y^2}}{y}$; k predpisom týchto funkcií možno prísť aj nasledovne: ak $M_1 \equiv (x_1, y_1)$, $M_2 \equiv (x_2, y_2)$ sú body krivky K, pričom $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, tak (pozri obr. 12) $|M_2B| = |M_1B| = b$, $|BD_1| = y_1$, $|D_2M_2| = |y_2|$, odtiaľ $|M_1D_1| =$

obr. 12.

$\sqrt{b^2 - y_1^2}$, $|BD_2| = \sqrt{b^2 - y_2^2}$, ďalej $|AC_1| = a + y_1$, $|AC_2| = a + y_2$, $|C_2M_2| = |x_1|$, $|C_1M_1| = |x_2|$; z podobnosti $\triangle AC_2M_2 \sim \triangle M_2D_2B$, $\triangle AC_1M_1 \sim \triangle BD_1M_1$ vyplýva $\frac{|AC_2|}{|M_2D_2|} = \frac{|C_2M_2|}{|D_2B|}$ a $\frac{|AC_1|}{|BD_1|} = \frac{|C_1M_1|}{|D_1M_1|}$, odtiaľ $\frac{a+y_i}{|y_i|} = \frac{|x_i|}{\sqrt{b^2-y_i^2}}$, $i = 1, 2$; teda pre súradnice x, y bodu M ležiaceho na krivke K platí $(a+y)\sqrt{b^2-y^2} = |xy|$, tj. $(a+y)^2(b^2-y^2) = x^2y^2\Big)$;

$\boxed{412}$ **1.** ak cykloida vznikla pri kotúľaní sa kružnice s polomerom a po osi Ox a leží na nej bod $(0,0)$, tak jej parametrické vyjadrenie je $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1-\cos\varphi)$ $\Big($nech S je stred kružnice, M ten jej bod, ktorého pohyb sledujeme, nech φ je uhol, ktorý zviera polomer SM s polomerom SD, kde D je bod dotyku kružnice a osi Ox; potom $S \equiv (a\varphi, a)$, $\vec{u} := M - S \equiv \left(a\cos\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right), a\sin\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)$, $M = S + \vec{u}\Big)$;

3. nech $S \equiv (0,0)$ je stred kružnice, M je koniec nite, D je bod, v ktorom sa napnutá niť dotýka kružnice; ak je niť namotaná v smere pohybu hodinových ručičiek a pred začatím rozmotávania platí $M = D \equiv (R, 0)$, tak parametrické vyjadrenie evolventy kruhu je $x = R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$, $y = R(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$, $\varphi \geq 0$ $\Big($ak úsečka MS zviera s kladným smerom osi Ox uhol φ, tak $D \equiv (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$, dĺžka rozmotanej nite je $R\varphi$, potom pre $\vec{u} := M - D$ platí $\vec{u} = R\varphi \cdot (\sin\varphi, -\cos\varphi)$ $\big($vektor $(\sin\varphi, -\cos\varphi)$ dĺžky 1 je zrejme kolmý na vektor $M - S \equiv (R\cos\varphi, R\sin\varphi)\big)\Big)$;

$\boxed{413}$ **1.** $\varphi(u) = \varphi(v) \Longrightarrow \psi(u) = \psi(v)$, $u, v \in I$; **2.** nutná a postačujúca podmienka je $\varphi\big(\chi(J)\big) = \varphi(I)$ spolu s podmienkou z pr. 413.1, podmienka $\chi(J) = I$ spolu s podmienkou z pr. 413.1 je len postačujúca;

$\boxed{414}$ **1.** dôkaz urobíme pre rastúcu funkciu φ; keďže $f = \psi \circ \varphi^{-1}$, stačí dokázať implikáciu $x \to a- \Longrightarrow \varphi^{-1}(x) \to \beta-$ a využiť vetu o limite zloženej funkcie; z rýdzej monotónnosti funkcie φ a z rovnosti $\lim\limits_{t \to \beta-} \varphi(t) = a$ vyplýva, že a je hromadný bod množiny $\varphi(I)$, tj množiny $D(\varphi^{-1})$ $\big($pritom $a \notin D(\varphi^{-1})\big)$; nech je dané ľavé okolie (ε, β) bodu β, nech $\delta = \varphi(\varepsilon)$, potom — keďže φ aj φ^{-1} sú rastúce funkcie — je $\delta < a$ a platí $x \in (\delta, a) \cap D(\varphi^{-1}) \Longrightarrow \varphi^{-1}(x) \in (\varepsilon, \beta)$, čo bolo treba dokázať;
2. $f = \psi \circ \varphi^{-1}$, pri dôkaze spojitosti funkcie φ^{-1} možno postupovať podobne ako pri riešení pr. 414.1;
3. nech φ je nekonštantná funkcia (pre konštantnú funkciu φ je tvrdenie zrejmé); nech a je vnútorný

bod množiny $D(f)$, tj. intervalu $\varphi(I)$, nech $M := \{t \in I\,;\, \varphi(t) = a$ a φ je nekonštantná na každej množine $O(t) \cap I$, kde $O(t)$ je okolie bodu $t\}$, nech M_1 (M_2) je množina tých $t \in M$, pre ktoré existuje okolie $O(t)$ tak, že $\forall x \in I \cap O(t) : \varphi(x) \geq a$ $\bigl(\forall x \in I \cap O(t) : \varphi(x) \leq a\bigr)$, nech $M_3 := M \setminus (M_1 \cup M_2)$; ak $M_3 \neq \emptyset$, zvoľme $\alpha \in M_3$ pevne; nech je dané $\varepsilon > 0$, zo spojitosti funkcie φ vyplýva $\exists \eta > 0$ $\forall t \in (\alpha-\eta, \alpha+\eta) \cap I : \bigl|\psi(t) - \psi(\alpha)\bigr| < \varepsilon$; množina $\varphi\bigl((\alpha-\eta, \alpha+\eta) \cap I\bigr)$ obsahuje niektoré δ–okolie bodu a, potom $|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$; ak $M_3 = \emptyset$, zvolíme $\alpha_1 \in M_1$ a $\alpha_2 \in M_2$ a predchádzajúcim postupom dokážeme spojitosť funkcie f v bode a sprava a zľava; podobne možno postupovať, ak bod $a \in \varphi(I)$ nie je vnútorný bod intervalu $\varphi(I)$;

4. nie;

$\boxed{415}$ funkcia $y = f'(x)$ je daná parametricky rovnicami **1.** $x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)\, e^t$, $y = \dfrac{t^2}{t^2-1}$, $t \in (1, \infty)$; **2.** $x = \operatorname{ctg} 2t$, $y = \sin^3 t \cdot (4\cos^2 t + 3)$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

$\boxed{416}$ body cykloidy ležiace na osi Ox zodpovedajú hodnotám parametra $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; pre $\varphi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, má rovnica dotyčnice v bode $\bigl(a(\varphi - \sin\varphi), a(1-\cos\varphi)\bigr)$ parametrické rovnice $x = a(\varphi - \sin\varphi) + ta(1-\cos\varphi)$, $y = a(1-\cos\varphi) + ta\sin\varphi$, $t \in \mathbf{R}$ $\left(\text{odtiaľ } y = a(1-\cos\varphi) + \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2} \cdot \bigl(x - a(\varphi - \sin\varphi)\bigr)\right)$; pre dané φ má stred vytvárajúcej kružnice cykloidy súradnice $(a\varphi, a)$ (pozri riešenie pr. 412.1), preto najvyšším (najnižším) bodom tejto kružnice je bod $(a\varphi, 2a)$ $\bigl(\text{bod } (a\varphi, 0)\bigr)$;

$\boxed{417}$ **1.** krivku možno zadať parametrickými rovnicami $x = \alpha(\varphi) := f(\varphi)\cos\varphi$, $y = \beta(\varphi) := f(\varphi)\sin\varphi$; smerový vektor dotyčnice v bode $\bigl(\alpha(\varphi), \beta(\varphi)\bigr)$ $\Bigl(\text{spojnice bodov } (0,0) \text{ a } \bigl(\alpha(\varphi), \beta(\varphi)\bigr)\Bigr)$ je $u \equiv (u_1, u_2) = \bigl(\alpha'(\varphi), \beta'(\varphi)\bigr)$ $\bigl(v \equiv (v_1, v_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi)\bigr)$, potom $\cos\omega = \dfrac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$;

2. treba nájsť uhol, ktorý zvierajú dotyčnice daných kriviek v priesečníku týchto kriviek; smerové vektory týchto dotyčníc sú $(\cos 1 - \sin 1, \cos 1 + \sin 1)$, $(-\cos 1 - \sin 1, \cos 1 - \sin 1)$; uvedené krivky sa pretínajú pod pravým uhlom;

$\boxed{418}$ funkcia $y = f'(x)$ je daná parametricky rovnicami **2.** $x = e^t \sin t$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}\, e^t \sin^3(t + \pi/4)}$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$; **3.** $x = \dfrac{t^2 - 2t - 5}{(t+5)^2}$, $y = \dfrac{(55-t)(t+5)^3}{36(t+1)^3 t}$, $t \in (1, \infty)$; **4.** $x = f'(t)$, $y = \dfrac{1}{f''(t)}$, $t \in I$;

$\boxed{419}$ **1.** uvedenými rovnicami je parametricky daná funkcia $f(x) = x^2$; funkcie $\varphi(t) = 2t + |t|$, $\psi(t) = 5t^2 + 4t|t|$ nie sú diferencovateľné v bode 0 (v tomto prípade možno vetu 1 pou ziť na výpočet jednostranných derivácií $f'_+(0)$, $f'_-(0)$, pretože funkcia $f|[0,\infty)$, resp. $f|(-\infty, 0]$ je daná parametricky rovnicami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \geq 0$, resp. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \leq 0$);

2. pre $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ je funkcia f' daná parametricky rovnicami $x = \varphi(t) := t - \dfrac{t}{1+t^2}$, $y = \psi(t) := \dfrac{3+t^2}{1+t^2}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; funkcia $\varphi(t) = t - \dfrac{t}{1+t^2}$ je rastúca a spojitá, preto φ^{-1} je tiež rastúca a spojitá, a teda $\lim\limits_{x\to 0} \varphi^{-1}(x) = 0$; potom $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \psi\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr) = \lim\limits_{t\to 0} \psi(t) = 3$, preto podľa pr. I.384.1 je $f'(0) = 3$;

3. $f'(0) = 3$, argumentácia je rovnaká ako v pr. 419.2;

$\boxed{420}$ **1.** celý dôkaz urobíme pre $\varphi'(a) > 0$; najprv dokážeme túto lemu: *nech J je interval, $\varphi : J \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia, a je vnútorný bod intervalu J; nech existuje vlastná $\varphi'(a) > 0$, nech existujú rastúce funkcie $r, s : J \to \mathbf{R}$ spojité v bode a také, že $b := r(a) = \varphi(a) = s(a)$ a $\forall t \in I : s(t) \leq \varphi(t) \leq r(t)$, nech Φ je pravé inverzné zobrazenie k funkcii φ* [4]*, potom funkcia Φ má v bode b deriváciu a platí $\Phi'(b) = \dfrac{1}{\varphi'(a)}$* $\Biggl($dôkaz: dokážeme, že $\lim\limits_{\tau\to b} \Phi(\tau) = a$: pre $\tau \in \varphi(J)$ je $r^{-1}(\tau) \leq \Phi(\tau) \leq s^{-1}(\tau)$, inverzné funkcie r^{-1}, s^{-1} k rýdzomonotónnym funkciám r, s sú spojité a bod b je hromadný bod ich definičného oboru (vyplýva to zo spojitosti funkcií r, s v bode a), preto $\lim\limits_{\tau\to b} r^{-1}(\tau) = r^{-1}(b) = a = \lim\limits_{\tau\to b} s^{-1}(\tau)$, a teda aj $\lim\limits_{\tau\to b} \Phi(\tau) = a$; ak na výpočet $\lim\limits_{\tau\to b} \dfrac{\Phi(\tau) - \Phi(b)}{\tau - b}$ použijeme substitúciu $\Phi(\tau) = t$, dostaneme $\Phi'(b) = \lim\limits_{\tau\to b} \dfrac{\Phi(\tau) - \Phi(b)}{\tau - b} = \lim\limits_{t\to a} \dfrac{t-a}{\varphi(t) - \varphi(a)} = \dfrac{1}{\varphi'(a)}\Biggr)$; z definície derivácie vyplýva $\exists O_1(a)$ $\forall t \in$

[4] tj. $\forall \tau \in \varphi(J) : \varphi\bigl(\Phi(\tau)\bigr) = \tau$

$O_1(a) \setminus \{a\}\ :\ \left|\dfrac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a} - \varphi'(a)\right| \le \dfrac{\varphi'(a)}{2}$, odtiaľ $(*)$ $\exists O_1(a)\ \ \forall t \in O_1(a)\ :\ \varphi(a) + \varphi'(a)(t-a) - \dfrac{\varphi'(a)}{2}\,|t-a| \le \varphi(t) \le \varphi(a) + \varphi'(a)(t-a) + \dfrac{\varphi'(a)}{2}\,|t-a|$; nech $O_2(a) := O_1(a) \cap O(a)$, potom interval $\varphi\big(O_2(a)\big) \subset D(f)$ obsahuje niektoré okolie bodu $\varphi(a)$ $\big($z nerovností $(*)$ vyplýva, že v $O_2(a)$ nadobúda φ hodnoty väčšie než $\varphi(a)$ aj menšie než $\varphi(a)$, pritom φ je spojitá, a teda darbouxovská na $O_2(a)\big)$, pritom $\Big(f|\varphi\big(O_2(a)\big)\Big)(x) = \psi\big(\Phi(x)\big)$, kde Φ je pravé inverzné zobrazenie k funkcii $\varphi|O_2(a)$; pre funkciu $\varphi|O_2(a)$ sú splnené predpoklady našej lemy $\left(\text{stačí položiť } r(t) = \begin{cases} \varphi(a) + \dfrac{3}{2}\,\varphi'(a)(t-a)\,, & \text{ak} \quad t \in O_2(a)\,,\ t \ge a \\ \varphi(a) + \dfrac{1}{2}\varphi'(a)(t-a)\,, & \text{ak} \quad t \in O_2(a)\,,\ t \le a \end{cases}\right.$, podobne pre $s(t)$, pozri nerovnosti $\left.(*)\right)$, potom podľa vety o derivácii zloženej funkcie je $f'\big(\varphi(a)\big) = \Big(f|\varphi\big(O_2(a)\big)\Big)'\big(\varphi(a)\big) = \psi'\Big(\Phi\big(\varphi(a)\big)\Big) \cdot \Phi'\big(\varphi(a)\big) = \dfrac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}$;

2. nech $A := \left\{\dfrac{1}{n}\ ;\ n = 3,4,5,\dots\right\}$, $B := \left\{1 - \dfrac{1}{n}\ ;\ n = 3,4,5,\dots\right\}$, položme

$$\varphi(t) = \begin{cases} t\,, & \text{ak} \quad t \in (-1,1) \setminus (A \cup B) \\ t^2 + t\,, & \text{ak} \quad t \in A \\ 1 - t\,, & \text{ak} \quad t \in B \end{cases}, \qquad \psi(t) = \begin{cases} t\,, & \text{ak} \quad t \in (-1,1) \setminus (A \cup B) \\ t^2 + t\,, & \text{ak} \quad t \in A \\ t - 1\,, & \text{ak} \quad t \in B \end{cases},$$

potom $f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{ak} \quad x \in (-1,1) \setminus (A \cup B) \\ -x\,, & \text{ak} \quad x \in A \end{cases}$ $\Big($pri overovaní tohto príkladu využite, že žiadny prvok $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, nepatrí do A, z rovnosti $\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n}$ vyplýva totiž $m = n - 1 + \dfrac{1}{n+1} \notin \mathbf{N}\Big)$;

$\boxed{\textbf{421}}$ **1.** obr.13 [5]; **2.** obr. 14; **4.** obr.15; **5.** obr. 16, rovnica v polárnych súradniciach je $\varrho = a|\cos 2\varphi|$; **6.** obr. 17, daná krivka je zjednotením priamok $x = 0$, $y = x$, $y = -x$ $\Big($teda v polárnych súradniciach polpriamok $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ — hodnoty φ sme našli riešením rovníc $\cos\varphi = 0$ a $\cos 2\varphi = 0\Big)$ a krivky $\varrho = \dfrac{a}{\cos\varphi\cos 2\varphi}$, uvedené priamky sú pritom asymptotami tejto krivky;

obr. 13. $\varrho = \varphi$ (*Archimedova špirála*)

[5] v obr. 13-30 sú jednotky dĺžky na osiach Ox a Oy rovnaké a sú vyznačené len na osi Ox; k priamkam, ktoré sú asymptotami zobrazených kriviek, je pripísaná ich rovnica

obr. 14. $\varrho = \dfrac{1}{\varphi}$ (*hyperbolická špirála*)

obr. 15. $\varrho^2 = 2\cos 2\varphi$ (*Bernoulliho lemniskáta*)

obr. 16. $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^2-y^2)^2$

$\boxed{\textbf{422}}$ [6] **1.**

t	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$	$\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$	$[0,1]$	$[1,\infty)$
x	$-\infty \quad -\frac{21}{16}$	$-\frac{21}{16} \quad 0$	$0 \quad -3$	$-3 \quad \infty$
y	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad 0$	$0 \quad -1$	$-1 \quad \infty$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

grafy funkcií f_2 a f_3 (f_3 a f_4) majú spoločnú jednostrannú dotyčnicu v bode $(0,0)$ $\big($v bode $(-3,-1)\big)$, obr. 18;

---

[6] nasledujúce tabuľky sú zostavené takto: nech parametrické vyjadrenie danej krivky je $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$; potom v prvom riadku tabuľky sú jednotlivé intervaly, v ktorých funkcie φ', ψ' ani $\left(\dfrac{\varphi'}{\psi'}\right)'$ nemenia znamienko (v riešení pr. 422.4 a 422.7 intervaly, v ktorých funkcie φ', ψ' nemenia znamienko), v druhom (treťom) riadku sú funkčné hodnoty, resp. príslušné jednostranné limity funkcie $x=\varphi(t)$ $\big($funkcie $y=\psi(t)\big)$ v krajných bodoch týchto intervalov; rýdzomonotónnu funkciu danú parametrickými rovnicami $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, kde t prebieha i–ty z týchto intervalov, budeme označovať f_i; symbol $\cup$ $(\cap)$ v poslednom riadku hovorí, že funkcia f_i je konvexná (konkávna)

obr. 17. $x(x^2 - y^2) = a(x^2 + y^2)$

obr. 18. $x = 5t^2 + 2t^5$, $y = 3t^2 + 2t^3$

2.

t	$(-\infty, 0]$		$[0, 1]$		$\left[1, \frac{4}{3}\right]$		$\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$	
x	$-\infty$	0	0	1	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$-\infty$
y	$+\infty$	0	0	1	1	$\frac{32}{27}$	$\frac{32}{27}$	$-\infty$
	$\cup$		$\cup$		$\cap$		$\cap$	

obr. 19;

3. z rovností $\varphi(-t) = -\varphi(t)$, $\psi(-t) = \psi(t)$ vyplýva, že krivka je súmerná podľa osi Oy , stačí sa preto obmedziť na $t \in [0, \infty)$;

t	$\left[0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$		$\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right]$		$[1, \infty)$	
x	0	$\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	$\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	2	2	$-\infty$
y	0	$\frac{16}{9}$	$\frac{16}{9}$	2	2	$-\infty$
	$\cup$		$\cap$		$\cap$	

obr. 20;

obr. 19. $x = 2t - t^2\,,\ y = 2t^2 - t^3$

obr. 20. $x^4 + 2y^3 = 4x^2y$

4.

t	$(-\infty, 0)$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$	$\left[\frac{3}{5}, 1\right]$	$[1, \infty)$
x	$\infty \quad 0$	$0 \quad -1$	$-1 \quad -\frac{24}{25}$	$-\frac{24}{25} \quad 0$	$0 \quad \infty$
y	$-\infty \quad 0$	$0 \quad \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \quad \frac{1728}{3125}$	$\frac{1728}{3125} \quad 0$	$0 \quad \infty$

obr. 21;

6. položili sme $y = tx$;

t	$(-\infty, 0]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\left[1, \frac{3}{2}\right]$	$\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$
x	$+\infty \quad 0$	$0 \quad \infty$	$-\infty \quad -\frac{18}{16}$	$-\frac{18}{16} \quad -1$	$-1 \quad -\frac{9}{8}$	$-\frac{9}{8} \quad -\infty$
y	$-\infty \quad 0$	$0 \quad \infty$	$-\infty \quad -\frac{54}{64}$	$-\frac{54}{64} \quad -1$	$-1 \quad -\frac{27}{16}$	$-\frac{27}{16} \quad -\infty$
	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

grafy funkcií f_1 a f_2 majú spoločnú jednostrannú dotyčnicu v bode $(0,0)$, obr. 22;

7.

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1]$	$\left[1, \frac{4}{3}\right]$	$\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right]$	$\left[\frac{5}{2}, \infty\right)$
x	$0 \quad \infty$	$-\infty \quad 0$	$0 \quad \sqrt[7]{\frac{9}{1024}}$	$\sqrt[7]{\frac{9}{1024}} \quad \sqrt[7]{\frac{108}{3125}}$	$\sqrt[7]{\frac{108}{3125}} \quad 0$
y	$0 \quad -\infty$	$-\infty \quad 0$	$0 \quad \sqrt[7]{\frac{27}{256}}$	$\sqrt[7]{\frac{27}{256}} \quad \sqrt[7]{\frac{24}{625}}$	$\sqrt[7]{\frac{24}{625}} \quad 0$

na výpočet $(f_2)'_-(0)$, $(f_3)'_+(0)$, $(\overline{f}_1)'_+(0)$, $(\overline{f}_5)'_+(0)$, kde $\overline{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{ak } x \in D(f_1) \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, $\overline{f}_5(x) = \begin{cases} f_5(x), & \text{ak } x \in D(f_5) \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, použijeme jednostranné verzie tvrdenia z pr. I.384.1: $(f_2)'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} f_2'(x) = \lim\limits_{t\to 1-} \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \infty$, $(f_3)'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f_3'(x) = \lim\limits_{t\to 1+} \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \infty$, $(\overline{f}_1)'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \overline{f}\,'_1(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f_1'(x) =$

obr. 21. $4y^2 = 4x^2y + x^5$ obr. 22. $x^3 - 2x^2y - y^2 = 0$

$\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = 0\,,\ (\overline{f}_5)'_+(0) = \lim\limits_{x\to0+} \overline{f}\,'_5(x) = \lim\limits_{x\to0+} f'_5(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = 0$ (spojitosť funkcií $\overline{f}_1$ a $\overline{f}_5$ v bode 0, ktorá je jedným z predpokladov tvrdenia z pr. I.384.1, vyplýva z pr. 414.1); obr. 23;

8. daná krivka K je súmerná podľa bodu $(0,0)$ $\big((x,y)\in K \Longrightarrow (-x,-y)\in K\big)$, stačí preto skúmať krivku $x^5 + y^5 = xy^2$, $x \ge 0$; ak položíme $y = tx$, dostaneme $x = \varphi(t) = \dfrac{|t|}{\sqrt{1+t^5}}$, $y = \psi(t) = \dfrac{t|t|}{\sqrt{1+t^5}}$; čísla v druhom a treťom riadku tabuľky sú zaokrúhlené na 3 desatinné miesta;

t	$\left(-1, -\sqrt[5]{6-\frac{10}{\sqrt3}}\right]$		$\left[-\sqrt[5]{6-\frac{10}{\sqrt3}}, 0\right]$		$\left[0, \sqrt[5]{\frac23}\right]$		$\left[\sqrt[5]{\frac23}, \sqrt[5]{4}\right]$		$\left[\sqrt[5]{4}, \infty\right)$	
x	∞	0.845	0.845	0	0	0.714	0.714	0.590	0.590	0
y	$-\infty$	-0.628	-0.628	0	0	0.659	0.659	0.779	0.779	0
	$\cup$		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cap$	

všimnite si, že hoci $\varphi'(0)$ ani $\psi'(0)$ neexistujú, možno rovnosť $(f_2)'_+(0) = 0$ odvodiť z vety 1 $\big($na výpočet $(f_2)'_+(0)$ totiž stačí existencia $\varphi'_+(0) \ne 0$ a $\psi'_+(0)\big)$, rovnako z vety 1 vyplýva rovnosť $(f_3)'_+(0) = 0$; podobne ako v riešení pr. 422.7 možno dokázať, že $(\overline{f}_5)'_+(0) = \infty$, kde $\overline{f}_5(x) = \begin{cases} f_5(x)\,, & \text{ak } x \in D(f_5) \\ 0\,, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$; obr. 24;

9. daná krivka K je súmerná podľa priamky $y = x$ $\big((x,y)\in K \Longrightarrow (y,x)\in K\big)$, položili sme $y = tx$;

t	$(-\infty,-1)$		$(-1,0]$		$\left[0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$		$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}\right]$		$\left[\sqrt[3]{2}, \infty\right)$	
x	0	∞	$-\infty$	0	0	$\sqrt[3]{4}\,a$	$\sqrt[3]{4}\,a$	$\sqrt[3]{2}\,a$	$\sqrt[3]{2}\,a$	0
y	0	$-\infty$	∞	0	0	$\sqrt[3]{2}\,a$	$\sqrt[3]{2}\,a$	$\sqrt[3]{4}\,a$	$\sqrt[3]{4}\,a$	0
	$\cup$		$\cup$		$\cup$		$\cap$		$\cap$	

podobne ako v riešení pr. 422.7 možno dokázať rovnosti $(\overline{f}_1)'_+(0) = -\infty$, $(\overline{f}_5)'_+(0) = +\infty$, kde $\overline{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x)\,, & \text{ak } x \in D(f_i) \\ 0\,, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, $i = 1, 5$; tieto rovnosti možno odvodiť aj zo symetrie krivky K podľa priamky $y = x$, z ktorej vyplýva, že $\overline{f}_1$ $(\overline{f}_5)$ je inverzná funkcia k funkcii f_2 (f_3); obr. 25;

obr. 23. $y^5 + x^4 = xy^2$

obr. 24. $x^5 + y^5 = xy^2$

<u>10</u>. daná krivka K je súmerná podľa osi Ox $\big((x,y) \in K \Longrightarrow (x,-y) \in K\big)$ a podľa osi Oy $\big((x,y) \in K \Longrightarrow (-x,y) \in K\big)$ — a teda aj podľa bodu $(0,0)$ — a podľa osi $y = x$ $\big((x,y) \in K \Longrightarrow (y,x) \in K\big)$; stačí teda skúmať krivku danú parametrickými rovnicami $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (pozri aj pr. 411.1);

t	$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$	
x	a	0
y	0	a
	$\cup$	

obr. 26;

obr. 25. $x^3 + y^3 = 3xy$ (*Descartesov list*)

obr. 26. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (*asteroida*)

<u>11</u>. týmito rovnicami je parametricky daná funkcia $y = f(x)$ $\big($funkcia $\varphi(t) = a(t - \sin t)$ je rastúca$\big)$, ktorá má periódu $2\pi a$ $\big($vyplýva to z geometrického popisu cykloidy — pozri pr. 412.1 — a z rovností

$\varphi(t+2\pi)=\varphi(t)+2\pi a\,,\ \psi(t+2\pi)=\psi(t)\big)$; stačí uvažovať $t\in[0,2\pi]$, táto krivka je súmerná podľa priamky $x=a\pi$;

t	$[0,\pi]$		$[\pi,2\pi]$	
x	0	$a\pi$	$a\pi$	$2a\pi$
y	0	$2a$	$2a$	0
	$\cap$		$\cap$	

$f'_+(2ka\pi)=+\infty\,,\ f'_-(2ka\pi)=-\infty\,,\ k\in\mathbf{Z}$; obr. 27;

<u>12</u>. daná krivka je súmerná podľa osi Ox $\big($funkcia $\varrho=a(1+\cos\varphi)$ je nepárna$\big)$; pretože $\varrho=a(1+\cos\varphi)$ je nepárna funkcia a jej periódou je číslo 2π , stačí skúmať krivku $\varrho=a(1+\cos\varphi)\,,\varphi\in[0,\pi]$, jej parametrické rovnice sú $x=\alpha(\varphi):=\varrho\cos\varphi=a(\cos\varphi+\cos^2\varphi)$, $y=\beta(\varphi):=\varrho\sin\varphi=a\sin\varphi(1+\cos\varphi)$, $\varphi\in[0,\pi]$, potom $\alpha'(\varphi)=-2a\sin\dfrac{3\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}$, $\beta'(\varphi)=2a\cos\dfrac{3\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}$; $\left(\dfrac{\alpha'(\varphi)}{\beta'(\varphi)}\right)'=\dfrac{3(1+\cos\varphi)}{(\sin\varphi+\sin2\varphi)^2}$;

φ	$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$		$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$		$\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$	
x	$2a$	$\frac{3a}{4}$	$\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{4}$	0
y	0	$\frac{3\sqrt{3}\,a}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}\,a}{4}$	$\frac{\sqrt{3}\,a}{4}$	$\frac{\sqrt{3}\,a}{4}$	0
	$\cap$		$\cap$		$\cup$	

obr. 28;

obr. 27. $x=t-\sin t\,,\ y=1-\cos t$ (*cykloida*)

obr.28. $\varrho=1+\cos\varphi$ (*kardioida*)

<u>13</u>. z rovnakých príčin ako v pr. 422.12 je daná krivka súmerná podľa osi Ox a stačí uvažovať krivku $\varrho=1+2\cos\varphi\,,\ \varphi\in[0,\pi]$;

φ	$[0,a]$		$[a,b]$		$[b,c]$		$[c,\pi]$	
x	3	a_1	a_1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	c_1	c_1	1
y	0	a_2	a_2	b_2	b_2	c_2	c_2	0
	$\cap$		$\cap$		$\cup$		$\cup$	

kde $a=\arccos\dfrac{\sqrt{33}-1}{8}\approx0.936$, $b=\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)\approx1.823$, $c=\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{33}+1}{8}\right)\approx2.574$, $a_1=\dfrac{\sqrt{33}+15}{16}\approx1.297$, $c_1=\dfrac{15-\sqrt{33}}{16}\approx0.578$, $a_2=\dfrac{\big(3+\sqrt{33}\big)\sqrt{15+\sqrt{33}}}{16\sqrt{2}}\approx1.760$, $b_2=\dfrac{\sqrt{15}}{8}\approx0.484$, $c_2=$

$\dfrac{(3-\sqrt{33})\sqrt{15-\sqrt{33}}}{16\sqrt{2}} \approx -0.369$; obr. 29;

14.

t	$(-\infty, 0]$	$[0, \infty)$
x	$\infty \quad 1$	$1 \quad \infty$
y	$\infty \quad 1$	$1 \quad \infty$
	$\cup$	$\cap$

funkcie f_1 a f_2 majú spoločnú jednostrannú dotyčnicu v bode $(1,1)$, obr. 30;

obr. 29.
$\varrho = 1 + 2\cos\varphi$
(*Pascalova závitnica*)

obr. 30.
$x = t + e^{-t}$,
$y = 2t + e^{-2t}$

423 **1**. $2a\pi^2$; **2**. $6a$ $\Big($zvolili sme parametrické vyjadrenie $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} 3a|\sin t \cos t|\, dt = 12a\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\, dt\Big)$; **3**. $\dfrac{\operatorname{ch}^{3/2} 2T - 1}{2}$ $\Big(= \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^T \operatorname{sh} 2t\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\; dt\Big)$; **4**. 8 $\Big(= \displaystyle\int_{-1}^{1} 2t^2(3+5t^2)\, dt\Big)$; **5**. $\ln\pi$ $\Big(= \displaystyle\int_1^{\pi} \frac{dt}{t}\Big)$; **6**. $8a$ $\Big(= 2a\displaystyle\int_0^{2\pi} \Big|\cos\frac{\varphi}{2}\Big|\; d\varphi\Big)$; **7**. $\dfrac{3}{2}a\pi$ $\Big(= \displaystyle\int_0^{3\pi} a\sin^2\frac{\varphi}{3}\; d\varphi\Big)$; **8**. $\dfrac{1}{2}(4 + \ln 3)$ $\Big(= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^3 \Big(\varrho + \frac{1}{\varrho}\Big)\, d\varrho$; parametrické vyjadrenie je $x = \varrho\cos\varphi(\varrho)$, $y = \varrho\sin\varphi(\varrho)$, odtiaľ $x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = \varrho^2\varphi'^2(\varrho) + 1\Big)$; **9**. $\operatorname{sh} R$ $\big(1 + \operatorname{sh}^2\varrho = \operatorname{ch}^2\varrho\big)$; **10**. T $\Big($parametrické vyjadrenie je $x = \varrho(t)\cos\varphi(t)$, $y = \varrho(t)\sin\varphi(t)$, odtiaľ $x'^2(t) + y'^2(t) = \varrho'^2(t) + \varrho^2(t)\varphi'^2(t)$; $2\cos^2\dfrac{t}{2} = 1 + \cos t\Big)$;

424 bod $\left(\dfrac{a(4\pi - 3\sqrt{3})}{6}, \dfrac{3a}{2}\right)$ $\Big($prvý oblúk cykloidy zodpovedá hodnotám $t \in [0, 2\pi]$; treba nájsť $T \in [0, 2\pi]$, pre ktoré $\dfrac{F(T) - F(0)}{F(2\pi) - F(T)} = \dfrac{1}{3}$, kde $F(t) := \displaystyle\int_0^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = 2a\int_0^t \sin\frac{t}{2}\, dt$, $t \in [0, 2\pi]\Big)$;

425 zvoľme $t > 0$, nech $M \equiv \left(t, \dfrac{t^2}{4a}\right)$, zrejme $M \in p$; nech $p(t)$ je obraz kotúľajúcej sa paraboly p v okamihu, keď sa jej os Ox dotýka v bode M; parabolu $p(t)$ možno získať z paraboly p nasledujúcou postupnosťou transformácií: posunutie o vektor $\left(0, \frac{t^2}{4a}\right)$ $\Bigg($ bod $\left(0, -\frac{t^2}{4a}\right)$ je priesečník dotyčnice d k parabole $x^2 = 4ay$ v bode $\left(t, \frac{t^2}{4a}\right)$ s osou $Oy\Bigg)$, otočenie o uhol $\operatorname{arctg}\frac{t}{2a}$ okolo bodu $(0,0)$ v smere hodinových ručičiek $\Bigg($tento uhol zviera dotyčnica d s osou Ox; pri tejto transformácii je obrazom bodu s polárnymi súradnicami (ϱ, φ) bod $\left(\varrho, \varphi - \operatorname{arctg}\frac{t}{2a}\right)$, preto — pozri aj riešenie pr. 428.4 — obrazom bodu (x,y) je bod (x_1, y_1), kde $x_1 = \varrho\cos\left(\varphi - \operatorname{arctg}\frac{t}{2a}\right) = \frac{2ax}{\sqrt{t^2+4a^2}} + \frac{yt}{\sqrt{t^2+4a^2}}$, $y_1 = \varrho\sin\left(\varphi - \operatorname{arctg}\frac{t}{2a}\right) = \frac{2ay}{\sqrt{t^2+4a^2}} - \frac{tx}{\sqrt{t^2+4a^2}}\Bigg)$, posunutie o vektor $\left(s - \frac{t\sqrt{t^2+4a^2}}{2a}, 0\right)$, kde s je dĺžka oblúka paraboly $x^2 = 4ay$ medzi bodmi $(0,0)$ a $\left(t, \frac{t^2}{4a}\right)$ $\Bigg(\frac{t\sqrt{t^2+4a^2}}{2a}$ je dĺžka úseku dotyčnice d medzi bodom dotyku a priesečníkom s osou $Oy\Bigg)$; obrazom bodu $(0,a)$ pri týchto transformáciách je bod $\big(x(t), y(t)\big)$, kde $x(t) = a\ln\frac{t+\sqrt{t^2+4a^2}}{2a}$, $y(t) = \frac{\sqrt{t^2+4a^2}}{2}$, $t > 0$, tieto rovnice parametricky popisujú pohyb ohniska pri kotúľaní sa paraboly ,,doprava“, pri kotúľaní sa ,,doľava“ vznikne krivka súmerná s našou podľa osi Oy; inverzná funkcia k funkcii $x = a\ln\frac{t+\sqrt{t^2+4a^2}}{2a}$ je funkcia $t = a\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right)$;

$\boxed{\textbf{426}}$ **1**. $\frac{8}{15}$ $\left(= \int_1^2 |x'(t)|y(t)\,dt - \int_0^1 |x'(t)|y(t)\,dt = -\int_0^2 x'(t)y(t)\,dt\right.$; daný útvar je ,,zhora“, resp. ,,zdola“ ohraničený grafom funkcie danej parametricky rovnicami $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$, $t \in [1,2]$, resp. $t \in [0,1]$, pozri riešenie pr. 422.2 a obr. 19$\Big)$;

2. $1 - \frac{\pi}{4}$ $\Bigg(= -2\int_0^1 x'(t)y(t)\,dt$; pre naše potreby postačujúci náčrtok krivky K získame, ak využijeme, že K je súmerná podľa osi Ox, pre $t \geq 0$ je funkcia $x = \frac{1}{1+t^2}$ klesajúca, a ak zistíme, kedy funkcia $y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$ nadobúda kladné, nulové a záporné hodnoty; pri výpočte uvedeného integrálu možno dvakrát použiť metódu per partes: najprv $u' = 2t\frac{1-t^2}{(1+t^2)^3}$ (na nájdenie funkcie u použijeme substitúciu $z = 1+t^2$) a $v = 2t$, potom $u' = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ a $v = t\Bigg)$;

3. $\frac{a^2\pi(4\pi^2+3)}{3}$ $\Bigg(= -\int_0^{2\pi} x'(t)y(t)\,dt$; ak si načrtneme danú krivku, zistíme, že náš útvar pozostáva z útvaru ohraničeného grafmi funkcií f_1 a f_2 a z útvaru ohraničeného grafmi funkcií f_3 a f_4, kde $f_1, \ldots, f_4$ sú funkcie dané parametricky rovnicami $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, pričom t postupne prebieha intervaly $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, c\right]$, $\left[c, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, kde $c \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ je riešenie rovnice $\varphi(c) = a$; potom $\int_a^{\pi a/2} \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx + \int_{-3\pi a/2}^{a} \big(f_3(x) - f_4(x)\big)\,dx = \left(-\int_0^{\pi/2} x'(t)y(t)\,dt - \int_{\pi/2}^{c} x'(t)y(t)\,dt\right) + \left(-\int_c^{3\pi/2} x'(t)y(t)\,dt - \int_{3\pi/2}^{2\pi} x'(t)y(t)\,dt\right)\Bigg)$;

4. $\frac{3\pi a^2}{8}$ $\left(= 4\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)\,dt\right)$;

5. $\dfrac{3\pi a^2}{2}$ $\left(= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \big(a(1+\cos\varphi)\big)^2\,d\varphi\right)$;

6. $\dfrac{\pi a^2}{4}$ $\left(= n\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n} (a\sin n\varphi)^2\,d\varphi\right),\ \text{pre } a=1,\ n=5 \text{ je daná krivka znázornená na obr. 16}\right)$;

7. $\dfrac{a^2(\pi-1)}{4}$ $\Big(= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} (a\cos\varphi)^2 d\varphi + \dfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{0} \big(a(\cos\varphi+\sin\varphi)\big)^2\,d\varphi$; $\cos\varphi+\sin\varphi = \sqrt{2}\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)$, teda krivka $\varrho = a(\cos\varphi+\sin\varphi)$ vznikne otočením krivky $\varrho=\sqrt{2}\,a\cos\varphi$ okolo bodu $(0,0)$ o uhol $\dfrac{\pi}{4}$ proti smeru hodinových ručičiek$\Big)$;

8. $\dfrac{3+\sqrt{3}\,\pi-\ln 4}{6}$ $\Big(= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/3} \big(f^{-1}(\varphi)\big)^2\,d\varphi = \dfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} r^2 f'(r)\,dr$ (použili sme substitúciu $f^{-1}(\varphi) = r$, odtiaľ $\varphi = f(r)$)$\Big)$;

9. $\dfrac{a^2}{4}\left(\operatorname{arctg} t_0 - \dfrac{t_0}{1+t_0^2}\right)$ $\Big($funkcia $\alpha(t) := t - \operatorname{arctg} t$ je rastúca, preto rovnicami $\varrho = \beta(t) := \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $\varphi = \alpha(t)$ je parametricky daná kladná funkcia $\varrho = f(\varphi) = \beta\big(\alpha^{-1}(\varphi)\big)$, potom $P = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\alpha(t_0)} f^2(\varphi)d\varphi = \dfrac{1}{2}\int_0^{\alpha(t_0)} \beta^2\big(\alpha^{-1}(\varphi)\big)\,d\varphi = \dfrac{1}{2}\int_0^{t_0} \beta^2(t)\alpha'(t)\,dt = \dfrac{a^2}{4}\int_0^{t_0} t\cdot\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt\Big)$;

10. $\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$ $\Big(= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{a^2\,d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} = a^2\int_0^{\pi} \dfrac{d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} = a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$, pozri pr. 93.2 a 45.21$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{427}}$ $a^2\left(\dfrac{\pi}{6}+1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(= 4\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/6} \dfrac{a^2}{2}\,d\varphi + \dfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi\right)\right)$;

$\boxed{\mathbf{428}}$ **1a**) $\dfrac{32\pi ab^2}{105}$; **1b**) $\dfrac{32\pi a^2 b}{105}$; **2a**) $\dfrac{3\pi a^3}{4}$; **2b**) $\dfrac{768\pi a^3}{35\sqrt{3}}$ $\left(= 2\left(2\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x(t)y(t)x'(t)\,dt\right)\right)$; **3a**) $\dfrac{64\pi}{35}$ $\Big($daný útvar je ohraničený grafmi funkcií f_1, f_2 daných parametrickymi rovnicami $x = \alpha(t) := 2t-t^2$, $y = \beta(t) := 4t-t^3$, kde $t\in[0,1]$, resp. $t\in[1,2]$; $V = \pi\displaystyle\int_{\alpha(2)}^{\alpha(1)} f_2^2(x)\,dx - \pi\int_{\alpha(0)}^{\alpha(1)} f_1^2(x)\,dx = \pi\left(\int_1^2 \beta^2(t)\alpha'(t)\,dt - \int_0^1 \beta^2(t)\alpha'(t)\,dt\right)\Big)$; **3b**) $\dfrac{64\pi}{105}$ $\left(= \pi\left(\displaystyle\int_0^{2/\sqrt{3}} \alpha^2(t)\beta'(t)\,dt - \int_2^{2/\sqrt{3}} \alpha^2(t)\beta'(t)\,dt\right)\right)$; **5**. $\dfrac{8\pi a^3}{3}$ $\left(= \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi} \big(a(1+\cos\varphi)\big)^3\sin\varphi\,d\varphi\right)$; **6**. $\dfrac{\pi^2 a^3}{4}$ $\Big(= 2\dfrac{2\pi}{3}\cdot\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(a\sqrt{\cos 2\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)}\right)^3\sin\varphi\,d\varphi =^{7} \dfrac{8\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\left(1-2\sin^2 t\right)\cos t\,dt$; **7**. $\pi a^3\left(\dfrac{14}{3}-\ln 4\right)$ $\Big($vyjadrite danú krivku najprv v polárnych súradniciach (pozri pr. 421.6), potom $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$; hľadané V je objemom telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi Ox útvaru ohraničeného osou Ox, priamkou $x=3a$ a krivkou danou parametricky rovnicami $x=\dfrac{a}{\cos 2\varphi}$, $y=\dfrac{a\operatorname{tg}\varphi}{\cos 2\varphi}$, $\varphi\in\left[0,\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3}\right]$; $V = \pi\displaystyle\int_0^{[\arccos(1/3)]/2} y^2(t)x'(t)\,dt = \pi a^3\int_{1/3}^{1}\dfrac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}\cdot\dfrac{1}{\cos^4 2\varphi}\cdot 2\sin 2\varphi\,d\varphi$, ďalej použite substitúcie $\cos 2\varphi =$

---

[7] $= \dfrac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^{3/2}2t\,(\sin t+\cos t)\,dt = \dfrac{8\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\cos^{3/2}2t\cos t\,dt = \dfrac{8\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\left(1-2\sin^2 t\right)\cos t\,dt$, použili sme substitúciu $\varphi-\dfrac{\pi}{4}=t$ a pr. 93.1

$u\,,\ u=\dfrac{1}{t}\,,\ t+1=z\Big)\,;$

$\boxed{\mathbf{429}}$ $\underline{\mathbf{1a}}$) $\dfrac{12\pi a^2}{5}$; $\underline{\mathbf{1b}}$) $\dfrac{3}{5}\,\pi a^2\big(4\sqrt{2}-1\big)$ $\Big($hľadané S je plošný obsah plochy vytvorenej rotáciou krivky $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a\big(\sin^3 t+\cos^3 t\big)\,,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a\big(\sin^3 t-\cos^3 t\big)$ okolo osi $Ox\Big)$; $\underline{\mathbf{2a}}$) $\dfrac{64\pi a^2}{3}$ $\Big(=8\pi a^2\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\cos^3\frac{t}{2}\right|dt=16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^3\frac{t}{2}\,dt\Big)$; $\underline{\mathbf{2b}}$) $16\pi^2a^2$ $\Big(=2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=4\pi a^2\cdot\int_0^{2\pi}\Big(t\left|\cos\frac{t}{2}\right|-\sin t\left|\cos\frac{t}{2}\right|\Big)\,dt$, pritom $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin t\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=0$ (pozri pr. 93.1,2); $\displaystyle\int_0^{2\pi}t\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=$[8] $2\pi\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\frac{z}{2}\,dz\Big)$; $\underline{\mathbf{3}}$. $\dfrac{32\pi a^2}{5}$ $\Big(=2\pi\displaystyle\int_0^{\pi}\varrho(\varphi)\sin\varphi\,\sqrt{\varrho'^2(\varphi)+\varrho^2(\varphi)}\,d\varphi\Big)$; $\underline{\mathbf{4}}$. $\dfrac{\pi p^2}{12\sqrt{5}}\cdot\Big(7\sqrt{2}-8+3\ln\big(1+\sqrt{2}\big)\Big)$ $\Big($otočenie okolo bodu $(0,0)$ o uhol $\operatorname{arctg}2$ v smere hodinových ručičiek je popísnaé rovnicami $\overline{x}=\dfrac{x}{\sqrt{5}}+\dfrac{2y}{\sqrt{5}}\,,\ \overline{y}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}-\dfrac{2x}{\sqrt{5}}$, kde $(\overline{x},\overline{y})$ je obraz bodu (x,y); obrazom oblúka paraboly $y^2=2px\,,\ y\in[0,p]$, je krivka $x=\dfrac{t^2}{2\sqrt{5}\,p}+\dfrac{2t}{\sqrt{5}}\,,\ y=\dfrac{t}{\sqrt{5}}-\dfrac{t^2}{\sqrt{5}\,p}\,,\ t\in[0,p]\Big)$;

$\boxed{\mathbf{430}}$ $\dfrac{\pi a^2}{6}\Big(4+\sqrt{2}+\ln\big(1+\sqrt{2}\big)\Big)$ $\Big($nech diagonála D je spojnicou bodov $A\equiv(0,0,a)$ a $B\equiv(a,a,0)$, nech $P\subset\mathbf{R}^3$ je plášť kocky, nech K_x je rovina kolmá na D prechádzajúca daným bodom $x\in D$; treba vypočítať plošný obsah plochy, ktorá vznikne rotáciou okolo osi Ox grafu funkcie danej parametricky rovnicami $x(t)=|XA|=\sqrt{3}\,at\,,\ y(t)=\max\big\{|XY|;Y\in P\cap K_x\big\}=\begin{cases}\sqrt{6}\,at\,, & \text{ak}\quad t\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]\\ a\sqrt{6t^2-6t+2}\,, & \text{ak}\quad t\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]\\ \sqrt{6}\,a(1-t)\,, & \text{ak}\quad t\in\left[\dfrac{2}{3},1\right]\end{cases}$:

ak $|XM|=\max\big\{|XY|\,;\,Y\in P\cap K_x\big\}$, tak M je priesečníkom niektorej z hrán kocky s rovinou K_x; ak $X\equiv\big(ta,ta,(1-t)a\big)\,,\ t\in[0,1]$, tak $K_x\equiv x+y-z+a(1-3t)=0$, priesečníky roviny K_x s hranami kocky sú: pre $t\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$: $\big(0,0,(1-3t)a\big)\,,\ (3ta,0,a)\,,\ (0,3ta,a)$; pre $t\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$: $\big((3t-1)a,0,0\big)\,,\ \big(a,0,(2-3t)a\big)\,,\ \big(a,(3t-1)a,a\big)\,,\ \big((3t-1)a,a,a\big)\,,\ \big(0,a,(2-3t)a\big)\,,\ \big(0,(3t-1)a,0\big)$; pre $t\in\left[\dfrac{2}{3},1\right]$: $\big(a,(3t-2)a,0\big)\,,\ \big(a,a,(3-3t)a\big)\,,\ \big((3t-2)a,a,0\big)\Big)$.

---

[8] $=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(z+\pi)\left|\cos\frac{z+\pi}{2}\right|dz=\int_{-\pi}^{\pi}z\left|\sin\frac{z}{2}\right|dz+\pi\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{z}{2}\right|dz=$