Chapter 3

Číselné rady

3. Číselné rady

3.1 Základné pojmy

Ak je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ $(k \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, tak symbol $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ (alebo $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n + \cdots$ [1]) nazývame *(nekonečný číselný) rad*. Symboly $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=m}^{\infty} a_{n+k-m}$ považujeme za totožné, preto — keďže každý rad $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ možno zapísať v podobe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k-1}$ — budú nasledujúce definície a vety formulované spravidla pre rady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Číslo a_k, resp.

$$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k\,, \quad k \in \mathbf{N}\,,$$

sa nazýva *k–ty člen*, resp. *k–ty čiastočný súčet radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ [2]. Hovoríme, že *rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* (*je konvergentný*), ak existuje konečná $\lim_{n\to\infty} S_n$, číslo $\lim_{n\to\infty} S_n$ sa potom nazýva *súčet radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a označuje sa spravidla tým istým symbolom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots)$. Ak neexistuje konečná $\lim_{n\to\infty} S_n$, hovoríme, že *rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje* (*je divergentný*), vtedy možno rozlíšiť tri prípady:

1. ak $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, hovoríme, že *rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje k* $+\infty$;
2. ak $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$, hovoríme, že *rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje k* $-\infty$;
3. ak $\lim_{n\to\infty} S_n$ neexistuje, hovoríme, že *rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *osciluje*.

Hovoríme, že *rady* $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ *a* $\sum_{n=m}^{\infty} c_n$ *majú rovnaký charakter*, ak obidva súčasne konvergujú alebo obidva oscilujú alebo obidva divergujú k $+\infty$ alebo obidva divergujú k $-\infty$.

k–tym zvyškom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva rad $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. *Súčtom radov* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (*k–násobkom radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) sa nazýva rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n := \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ $(k\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \sum_{n=1}^{\infty}(ka_n))$.

Rad

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots\,,$$

kde $a, q \in \mathbf{R}$ sú dané, sa nazýva *geometrický rad (s kvocientom q)*. Tento rad konverguje, ak $a = 0$ alebo $|q| < 1$; diverguje k $+\infty$ (k $-\infty$), ak $a > 0$ a $q \geq 1$ (ak $a < 0$ a $q \geq 1$); osciluje, ak $a \neq 0$ a $q \leq -1$.

Pre $q \neq 1$ platí

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a\,\frac{1-q^n}{1-q}\;;$$

[1] niekedy použijeme aj „zmiešané“ označenie, napr. $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

[2] rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa niekedy definuje ako postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ alebo ako usporiadaná dvojica postupností $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})$

ak $|q| < 1$, tak

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-q} \ .$$

Veta 1. *Nech je daná postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Potom rady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ *majú rovnaký charakter.*

Veta 2 (*Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie*). *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje práve vtedy, keď platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \in \mathbf{N}, n > n_0 \ \forall p \in \mathbf{N} \ : \ |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon \ .$$

Veta 3 (*nutná podmienka konvergencie*). *Ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, tak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

204. Napíšte jedno z možných vyjadrení n–tého člena a_n radu, ak poznáte niekoľko prvých členov[3]:

1. $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \cdots$;
2. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$;
3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42} + \cdots$;
4. $1 - \frac{1\cdot 3}{1\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10} + \cdots$;
5. $2 + \frac{2^2}{1\cdot 2} + \frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$;
6. $\frac{2}{2} - \frac{5}{6} + \frac{8}{18} - \frac{11}{54} + \cdots$.

205. Nájdite n–tý člen a_n a súčet S radu, ak poznáte postupnosť jeho čiastočných súčtov:

1. $S_n = \dfrac{n+1}{n}$;
2. $S_n = \dfrac{-1+2^n}{2^n}$;
3. $S_n = \sin\left(\dfrac{n+1}{n}\,\pi\right)$;
4. $S_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

206. Nájdite n–tý čiastočný súčet S_n nasledujúcich radov, na základe toho rozhodnite, ktoré z nich konvergujú:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} + (-2)^n)$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$;
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$;
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$;
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$;
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$;
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$;
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$;
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\alpha}{2^{n+1}} \cos\frac{3\alpha}{2^{n+1}}$;
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n!\,\pi}{720}$.

---

[3]to, že hľadáme len „jedno z možných vyjadrení“, je úplne namieste: v prípade $1+2+3+4+\cdots$ môže byť napr. $a_n = n$, $a_n = n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, $a_n = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } \ n = 4k-3\,, \quad k \in \mathbf{N} \\ 2\,, & \text{ak } \ n = 4k-2\,, \quad k \in \mathbf{N} \\ 3\,, & \text{ak } \ n = 4k-1\,, \quad k \in \mathbf{N} \\ 4\,, & \text{ak } \ n = 4k \,, \quad k \in \mathbf{N} \end{cases}$ atď; preto v ďalšom budeme pri takomto zápise radu uvádzať spravidla okrem niekoľkých prvých aj n–tý člen

207. Ktoré z nasledujúcich radov možno na základe vety 3 vyhlásiť za divergentné?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{n}{n^2+3}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\cos \frac{1}{n}\right)^n$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{1000n^2+3}$.

208. Nech je daná rastúca postupnosť $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel a postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; označme $A_n := \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$, $n = 1, 2, \ldots$.

1. Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ [4]. Dokážte!

2. Ak $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konverguje, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Dokážte!

3. Uveďte príklad postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konverguje.

209. Aký musí byť kvocient q geometrického radu $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, aby rad $\sum_{n=1}^{\infty} R_n$, kde R_n je súčet n–tého zvyšku radu $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, mal súčet $5/4$?

210. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad, nech R_n je súčet jeho n–tého zvyšku. Ak $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť, tak $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ je geometrický rad. Dokážte!

211. 1. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$. Dokážte! Na základe tohto tvrdenia dokážte divergenciu radov $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^p)$ pre $p \leq 1$.

2. Zostane tvrdenie z pr. 211.1 v platnosti, ak v ňom vynecháme predpoklad „$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť“?

212. Konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak

1. pre každé $p \in \mathbf{N}$ je $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) = 0$?

2. pre každé $n \in \mathbf{N}$ je $\lim_{p\to\infty}(a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) = 0$?

3.2 Rady s nezápornými (nekladnými) členmi

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva *radom s kladnými* (*zápornými*, *nezápornými*, *nekladnými*) *členmi*, ak počínajúc niektorým n_0 [5] je $a_n > 0$ ($a_n < 0$, $a_n \geq 0$, $a_n \leq 0$).

Nasledujúce kritériá (vety 4, 6, 7, 9 a 10) formulované pre rady s nezápornými členmi možno využívať aj pri vyšetrovaní konvergencie radov s nekladnými členmi; na vyšetrenie konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nekladnými členmi totiž stačí vyšetriť konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$ s nezápornými členmi.

Veta 4 (*porovnávacie kritérium*). **a)** *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú rady s nezápornými členmi, nech počínajúc niektorým n_0 platí $a_n \leq b_n$. Potom z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; z divergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vyplýva divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

b) *Špeciálne, nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ rad s kladnými členmi, nech existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =: K$. Potom*

α) ak $K \in (0, \infty)$, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ majú rovnaký charakter;

β) ak $K = 0$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

---

[4] rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ teda vznikne „uzátvorkovaním“ radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

[5] Nech V je výroková forma. Hovoríme, že *počínajúc niektorým n_0 (platí) $V(n)$*, ak existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbf{N}$, $n > n_0$ platí $V(n)$ (namiesto „počínajúc niektorým n_0“ sa používa tiež spojenie *pre skoro všetky $n \in \mathbf{N}$*).

γ) *ak* $K=\infty$ *a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje, tak diverguje aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Veta 5[6]. *Rad* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ [7] *konverguje, ak* $p>1$, *a diverguje, ak* $p \le 1$.

213. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(2^n-1)}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n+1}}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt[3]{2n-1}}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n^3}{n+5n^5}$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{3+(-1)^n}{n^2}\right)$;

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\ln n}$;

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$;

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$;

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n}-1\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}-n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$;

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}-n\sin\frac{1}{n^3}\right)$;

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}{n-\ln^2 n}$.

Riešenie. Ak chceme pri vyšetrovaní konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ s nezápornými členmi použiť porovnávacie kritérium, snažíme sa

- nájsť konvergentný rad, ktorého členy počínajúc niektorým sú všetky väčšie alebo rovné ako zodpovedajúce členy radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$:

  1. $\displaystyle\frac{1}{n5^{n-1}} \le \frac{1}{5^{n-1}}$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a geometrický rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ konverguje, preto podľa vety 4a) konverguje aj rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^{n-1}}$;

- alebo nájsť divergentný rad, ktorého členy niektorým počínajúc sú všetky nezáporné a menšie alebo rovné ako zodpovedajúce členy radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$:

  2. $\displaystyle\frac{5^n}{2^n(2^n-1)} \ge \frac{5^n}{4^n}$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a geometrický rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^{n}$ diverguje, preto podľa vety 4a) diverguje aj rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n(2^n-1)}$;

[6] pozri tiež pr. 211.1, 227.2 a poznámku k pr. 234.1d)

[7] tieto rady sa nazývajú *Riemannove*, špeciálne rad $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ sa nazýva *harmonický*, rady $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^p)$ pre $p \ne 1$ sa niekedy nazývajú *zovšeobecnené harmonické rady*

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/\ln^2 n}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln^2 n} = \infty$ [8], teda (ako vyplýva z definície limity) počínajúc niektorým n_0 platí $\dfrac{n}{\ln^2 n} \geq 1$, tj. $\dfrac{1}{\ln^2 n} \geq \dfrac{1}{n}$ [9]. Rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverguje (vyplýva to z divergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ a vety 1), preto podľa vety 4a)[10] diverguje aj rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^2 n}$;

- alebo nájsť rad $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, ktorý má rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, pričom konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ vieme vyšetriť:

14. Pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}$ je nenulová a konečná, majú podľa tvrdenia α) vety 4b) rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ rovnaký charakter. O rade $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ vieme, že konverguje (veta 5), preto konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$;

16. Aby sme mohli použiť vetu 4b), hľadáme rad $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ s kladnými členmi taký, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2} - n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{d_n}$ je konečná a nenulová (a taký, ktorého konvergenciu vieme vyšetriť); na to použijeme myšlienku výpočtu limít pomocou Taylorových polynómov (pozri pr. I.390):
Pretože

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \qquad \text{pre} \quad u \to 0$$

a pretože $\lim_{n\to\infty}(1/2n) = 0$, je

$$\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{pre} \quad n\to\infty\,,$$

$$\frac{1}{2} - n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} - n\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad [11].$$

Z tohto vyjadrenia vidno, že za rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ môžeme zvoliť harmonický rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} - n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8} + \frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{8}\,, \tag{3.1}$$

teda rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2} - n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\right)$ majú podľa tvrdenia α) vety 4b) rovnaký charakter, pritom o harmonickom rade $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ vieme, že diverguje. Preto diverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2} - n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\right)$.

---

[8] využili sme rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln^2 n} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln^2 x}$ $(x \in \mathbf{R}^+)$, na výpočet $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln^2 x}$ sme použili l'Hospitalovo pravidlo

[9] táto úvaha kopíruje myšlienku dôkazu tvrdenia γ) vety 4b)

[10] znova pripomeňme, že všetky kritériá z tejto kapitoly (hoci sú formulované pre rady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$) možno použiť pri vyšetrovaní konvergencie radov tvaru $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$

[11] pri úpravách sme využili, že $o((1/2n)^2) = o(1/n^2)$, $no(1/n^2) = o(1/n)$ a $-o(1/n) = o(1/n)$

Poznámka. Čitateľovi by sa mohlo zdať, že pri riešení pr. 213.16 sme zabudli preveriť, či rad $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2 - n\ln(1+1/2n))$ je radom s nezápornými (prípadne nekladnými) členmi (inak by sme neboli oprávnení použiť vetu 4). Toto preverenie je zahrnuté vo výpočte limity (3.1): ak totiž $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ je rad s kladnými členmi a $\lim_{n\to\infty}(c_n/d_n)$ je kladná (záporná), tak $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je rad s kladnými (zápornými) členmi.

214. Nájdite všetky hodnoty α, pre ktoré rad $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konverguje, ak:

1. $a_n = n^{\alpha}(\ln(n^2+1) - \ln n^2)$;
2. $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\alpha} \ln \dfrac{2n+1}{2n-1}$;
3. $a_n = \left(1 - n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}$;
4. $a_n = \left|\ln\dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{2}{n-1}\right|^{\alpha}$;
5. $a_n = \alpha^{1/n} + \alpha^{-1/n} - 2\,, \quad \alpha > 0$;
6. $a_n = \alpha^{1/n} - \alpha^{1/(n+1)}\,, \quad \alpha > 0$;
7. $a_n = \dfrac{\ln^{\alpha} n}{n^2}$;
8. $a_n = \dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}$.

215. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & , \quad \text{ak} \quad n \in \{m^2\,;\, m \in \mathbf{N}\} \\[2ex] \dfrac{1}{n^2} & , \quad \text{ak} \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{m^2\,;\, m \in \mathbf{N}\} \end{cases} .$$

216. Ak $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a postupnosť $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje. Dokážte!

217. Ak rady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergujú a platí $b_n \leq a_n \leq c_n$, $n \in \mathbf{N}$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dokážte[12]!

218. Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členmi, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Dokážte! Platí aj obrátená implikácia?

219. Ak konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, tak konvergujú aj rady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|/n)$. Dokážte!

220. Dokážte konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$; na základe toho dokážte, že existuje číslo C také, že

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + \varepsilon_n \,, \tag{3.2}$$

kde $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. (Číslo C sa nazýva *Eulerova konštanta*, $C \approx 0.577216$).

Veta 6 (*d'Alembertovo kritérium*). *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi. Potom*

a) *ak $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;*

b) *ak počínajúc niektorým n_0 platí $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Špeciálne, nech existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} =: k$. Ak $k < 1$ ($k > 1$), tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).

(Tento špeciálny prípad sa nazýva *limitný tvar d'Alembertovho kritéria.*)

[12]veta 4a) je špeciálnym prípadom tohto tvrdenia (stačí zvoliť $b_n \equiv 0$, $n \in \mathbf{N}$)

Veta 7 (*Cauchyho kritérium*). *Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s nezápornými členmi. Potom*

a) *ak* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*

b) *ak pre nekonečne veľa* $n \in \mathbf{N}$ *platí* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Špeciálne, nech existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =: k$. *Ak* $k < 1$ $(k > 1)$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje (diverguje).*

(Tento špeciálny prípad sa nazýva *limitný tvar Cauchyho kritéria.*)

Veta 8. *Ak* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť kladných čísel, tak*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

Dôsledok. *Ak* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť kladných čísel a existuje (vlastná alebo nevlastná)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, *tak existuje aj* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\,.$$

221. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n^2(n-1)}$;
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, $\quad a > 0$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$;
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^2 4^{3n}}$;
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 6\cdots(3n)}{(n+1)!} \arcsin\frac{1}{2^n}$;
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

Riešenie. 5.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{a^n n!}{n^n}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = \frac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\,,$$

preto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{e}\,.$$

Ak použijeme d'Alembertovo kritérium v limitnom tvare, dostaneme:

ak $0 < a < e$ (tj. ak $\frac{a}{e} < 1$), tak rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ konverguje;

ak $a > e$, tak rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ diverguje.

Zostáva vyšetriť prípad $a = e$.

Hoci v prípade $a = e$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ (a limitný tvar d'Alembertovho kritéria nedáva teda žiadnu informáciu o konvergencii radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n n!}{n^n}$), možno aj tu použiť vetu 6: postupnosť $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca [13] a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, preto pre všetky $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} > 1\,,$$

podľa tvrdenia b) vety 6 je teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n n!}{n^n}$ divergentný.

6. Pre všetky $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\frac{n^5}{2^n + 3^n} < \frac{n^5}{3^n}\,.$$

Na dôkaz konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{3^n}$ použijeme limitný tvar Cauchyho kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^5}{3} = \frac{1}{3} \quad ^{14}.$$

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{3^n}$ teda podľa Cauchyho kritéria konverguje, z porovnávacieho kritéria potom vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{2^n+3^n}$.

Poznámky. 1. Limitný tvar Cauchyho kritéria sme mohli aplikovať aj priamo na rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{2^n+3^n}$, výpočet $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^5}{2^n+3^n}}$ $\left(=\dfrac{1}{3}\right)$ by však bol trocha komplikovanejší.

2. Na dôkaz konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{3^n}$ sme mohli rovnako dobre použiť aj d'Alembertovo kritérium.

222[15]**.** Na základe konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dokážte rovnosť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ak

1_0. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$;

2_0. $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$;

3. $a_n = \dfrac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

223. Zostrojte postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel takú, aby $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

224. Zostrojte divergentný[16] rad s kladnými členmi, konvergenciu ktorého možno vyšetriť pomocou d'Alembertovho kritéria, ale nemožno o nej rozhodnúť na základe Cauchyho kritéria.

---

[13] pripomeňme, že dôkaz monotónnosti postupnosti $(1 + 1/n)^n$ je súčasťou dôkazu existencie konečnej $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$, pozri [23, str. 85]

[14] $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (pozri pr. I.135.2, I.380.1)

[15] porovnaj s pr. I.133.1 a I.185.1

[16] ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad s kladnými členmi, tak z vety 8 vyplýva: ak o konvergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ možno rozhodnúť použitím d'Alembertovho kritéria, tak o nej možno rozhodnúť aj na základe Cauchyho kritéria

Poznámka. Dôsledok vety 8, ktorá umožňuje porovnať „silu" Cauchyho a d'Alembertovho kritéria (pozri poznámku k pr. 224), možno využiť pri výpočte limít: vyplývajú z neho napr. rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ [17].

Veta 9 (*Raabeho kritérium*). *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi. Potom*

a) *ak* $\liminf\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*

b) *ak počínajúc niektorým n_0 platí* $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Špeciálne, nech existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) =: k$. *Ak* $k > 1$ $(k < 1)$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje (diverguje).*

(Tento špeciálny prípad sa nazýva *limitný tvar Raabeho kritéria.*)

225. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^{n+2}}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)(b+2d)\cdots(b+nd)}$, $\quad a>0$, $b>0$, $d>0$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln(n+1)}{\ln(2+p)\cdot\ln(3+p)\cdots\ln(n+1+p)}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)\cdot 2\cdot 5\cdots(3n+2)}{n!(n+1)!}\operatorname{tg}\frac{1}{9^n}$.

Riešenie. 2.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\, e^n}{n^{n+2}} \cdot \frac{(n+1)^{n+3}}{(n+1)!\, e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} ,$$

teda

$$\begin{aligned} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= n\left(\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} - 1\right) = n\left(\frac{1}{e}\cdot e^{(n+2)\ln(1+1/n)} - 1\right) = \\ &= n\left(e^{(n+2)\ln(1+1/n)-1} - 1\right) . \end{aligned}$$

Pri ďalších úpravách si pomôžeme Taylorovými polynómami:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{pre} \quad x \to 0 ,$$

preto

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{pre} \quad n\to\infty .$$

[17] uvedené rovnosti možno dokázať aj na základe tvrdenia „ak $b_n \ge 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbf{R}^*$, tak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} = b$", ak zvolíme $b_n = 1/n$, resp. $b_n = (1+1/n)^n$; toto tvrdenie vyplýva z pr. I.171 ($\sqrt[n]{b_1\cdots b_n} = e^{(\ln b_1 + \cdots + \ln b_n)/n}$) a možno pomocou neho dokázať aj dôsledok vety 8 (stačí položiť $b_1 = a_1$, $b_n = a_n/a_{n-1}$ pre $n \ge 2$)

Odtiaľ

$$\begin{aligned}(n+2)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 &= (n+2)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1=\\ &= \left(1-\frac{1}{2n}+no\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+2o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1=\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \quad ^{18}.\end{aligned}$$

Ak teraz využijeme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=0$ a $\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$, dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(e^{(n+2)\ln(1+1/n)-1}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(e^{3/2n+o(1/n)}-1\right)=\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{e^{3/2n+o(1/n)}-1}{3/2n+o(1/n))}=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

Podľa limitného tvaru Raabeho kritéria teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^{n+2}}$ konverguje.

Poznámka. D'Alembertovo kritérium je špeciálnym prípadom Raabeho kritéria[19], teda ak konvergenciu radu možno vyšetriť použitím vety 6, tak sa o nej dá rozhodnúť aj na základe vety 9. Opačná implikácia neplatí; napr. konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^{n+2}}$, skúmaného v pr. 225.2, nemožno vyšetriť použitím d'Alembertovho kritéria[20]: predpoklady tvrdenia b) tohto kritéria zrejme nemôžu byť v tomto prípade splnené, pretože — ako už vieme — náš rad konverguje; na základe tvrdenia a) vety 6 však o jeho konvergencii nevieme rozhodnúť, pretože

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{e}{(1+1/n)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{(1+1/n)^n(1+1/n)^2}=1\,.$$

Poznamenajme, že konvergenciu uvedeného radu nemožno vyšetriť ani použitím Cauchyho kritéria, pretože

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!\,e^n}{n^{n+2}}}=e\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=1$$

(k výpočtu $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n!}/n)$ pozri poznámku za pr. 224).

226. Uveďte príklad radu, ktorého konvergenciu

1. možno vyšetriť pomocou Cauchyho, ale nie pomocou Raabeho kritéria;
2. možno vyšetriť pomocou Raabeho, ale nie pomocou Cauchyho kritéria.

Veta 10 (*integrálne kritérium*). *Nech* $f:[1,\infty)\to\mathbf{R}$ *je nezáporná nerastúca funkcia. Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ *konverguje (diverguje) práve vtedy, keď* $\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt$ [21] *je vlastná (nevlastná).*

Špeciálne, ak funkcia f *je naviac spojitá, tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ *konverguje (diverguje), ak* $\lim_{x\to\infty}F(x)$, *kde* F *je primitívna funkcia k funkcii* f, *je vlastná (nevlastná).*

---

[18] využili sme, že $no(1/n^2)=o(1/n)$, $-1/n^2=o(1/n)$, $2o(1/n^2)=o(1/n)$ a $o(1/n)+o(1/n)+o(1/n)==o(1/n)$

[19] ak $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, tj. ak pre niektoré $q\in(0,1)$ platí $\exists n_0\in\mathbf{N}\ \forall n\in\mathbf{N},\ n\geq n_0\ :\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\infty$; ak počínajúc niektorým n_0 je $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$, tak počínajúc tým istým n_0 platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 0<1$

[20] možno samozrejme nájsť aj jednoduchšie príklady dokumentujúce neplatnosť opačnej implikácie

[21] pomocou tejto limity sa definuje *nevlastný Riemannov integrál* $\int_1^{\infty}f(t)\,dt$ (pozri napr. [1])

227. Použitím integrálneho kritéria vyšetrite konvergenciu radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p>0$;

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}, \quad p>0$;

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^p}, \quad p>0$;

5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n \ln^2(n+1)}$;

7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln^2 n}$.

Riešenie. 6. Pretože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n\ln^2(n+1)}}{\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}} = \frac{\pi}{2} ,$$

má podľa tvrdenia α) vety 4b) rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n \ln^2(n+1)}$ rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$, ktorého konvergenciu možno vyšetriť použitím integrálneho kritéria: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, kde $f : [1,\infty) \to \mathbf{R}$ je funkcia daná predpisom $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$. Funkcia f je zrejme spojitá, nezáporná a nerastúca; jednou z funkcií k nej primitívnych je funkcia $F(x) = -\frac{1}{\ln(x+1)}$. Pretože $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ podľa vety 10 konverguje. Pretože rady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n\ln^2(n+1)}$ majú rovnaký charakter, konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n\ln^2(n+1)}$.

228. Nech $f:[1,\infty)\to \mathbf{R}$ je nezáporná nerastúca funkcia. Potom
1. existuje konečná $\lim_{n\to\infty}(S_n - \int_1^{n+1} f(x)\,dx)$, kde $S_n := f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ [22];
2. ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje, tak platia nasledujúce odhady:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \le S \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx + f(1) ,$$

$$\int_{k+1}^{\infty} f(x)\,dx \le R_k \le \int_{k+1}^{\infty} f(x)\,dx + f(k+1) ,$$

kde $\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$, S je súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ a R_k súčet jeho k–teho zvyšku. Dokážte!

229. Koľko prvých členov radu treba sčítať, aby sme našli súčet radu

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ s chybou menšou než 0.1 ?

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^6 n}$ s chybou menšou než 0.01 ?

---

[22] z tohto tvrdenia priamo vyplýva veta 10; na jeho základe možno opätovne dokázať rovnosť (3.2) z pr. 220

230. Uveďte príklad nezápornej spojitej funkcie $f:[1,\infty)\to\mathbf{R}$ takej, že
1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje a $\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt=\infty$;
2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ diverguje a $\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt$ je konečná.

---

231. Vyšetrite konvergenciu radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{n/2}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n/3}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{(\ln(n+1))^{n/2}}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^{2n}$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{q(q+1)\cdots(q+n)}$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n+\sin n}{n^2+2\ln n}$;

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}\,(3+2(-1)^n)}{\sqrt{n}}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$;

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^3\left(3-2\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)}$;

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$;

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log_{b^n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$, $\quad b>0\,,\ b\neq 1\,,\ a>0$;

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$;

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+3}{n^2+4}$;

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$;

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+k/\ln n}}$;

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$;

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$;

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\sin(1/n)}$;

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^{\alpha}}-1\right)$;

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$;

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n!}{n^{\alpha}}$;

27. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}$;

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(1+n^{\alpha})}$.

232. Nech $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Čo možno povedať o konvergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, ak

a) $c_n = \max\{a_n, b_n\}$;

b) $c_n = \min\{a_n, b_n\}$

a

1. rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergujú;
2. rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergujú;
3. jeden z radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje a druhý diverguje?

233. 1_0. Dokážte *logaritmické kritérium*: Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi. Potom ak $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} > 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

ak počínajúc niektorým n_0 platí $\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \leq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

2. Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{3^{n^{4/3}}}$.

234. 1. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má rovnaký charakter ako rady:

a_0) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_{n^2}$;

c_0) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3}$;

d_0) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ [23].

Dokážte!

2. Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-\sqrt{n})^{\sqrt{n}}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^{\ln n}}$.

235. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť kladných čísel a existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{2n}}{a_n} =: q$. Potom platí: ak $q < 1/2$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje; ak $q > 1/2$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Dokážte!

3.3 Absolútne a relatívne konvergentné rady

Veta 11. *Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva *absolútne* (*relatívne*) *konvergentný*, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje (diverguje).

Poznámka. Pri vyšetrovaní konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (tj. pri vyšetrovaní absolútnej konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) možno použiť kritériá z odseku 3.2. Pretože rady vyhovujúce predpokladom tvrdení b) vety 6 alebo 7 nespĺňajú nutnú podmienku konvergencie[24], možno d'Alembertovo a Cauchyho kritérium sformulovať nasledovne[25]:

[23] rovnaký charakter radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ možno využiť napr. na vyšetrenie konvergencie Riemannových radov $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^p)$, $p \geq 0$

[24] pozri tiež poznámku k riešeniu pr. 207

[25] tvrdenie b) Raabeho kritéria takto preformulovať nemožno; výrok „ak počínajúc niektorým n_0 je $a_n > 0$ a $n(|a_n|/|a_{n+1}| - 1) \leq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje" totiž neplatí (stačí uvažovať $a_n = (-1)^n/n^p$, $p \in (0,1]$, pozri pr. 239.1)

Veta 6'. *Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s nenulovými členmi. Potom*

a) *ak* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konverguje;*

b) *ak počínajúc niektorým* n_0 *platí* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Veta 7'. *Nech je daná postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Potom*

a) *ak* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konverguje;*

b) *ak pre nekonečne veľa* $n \in \mathbf{N}$ *platí* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

236. Dokážte, že nasledujúce rady absolútne konvergujú:

$1_0.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{2^n}$;

$2.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^3+2}$;

$3.\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$;

$4.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$;

$5_0.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}$;

$6.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \sin(1/n)} - \cos\frac{1}{n}\right) \cos \pi n$.

237. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, definujme postupnosti $\{a_n^+\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ nasledovne

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n\,, & \text{ak} \quad a_n \geq 0 \\ 0\;, & \text{ak} \quad a_n < 0 \end{cases} \quad , \quad a_n^- := \begin{cases} -a_n\,, & \text{ak} \quad a_n \leq 0 \\ 0\;, & \text{ak} \quad a_n > 0 \end{cases} \quad .$$

Potom

1. ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergujú;
2. ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergujú a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^+}{S_n^-} = 1\,, \tag{3.3}$$

kde S_n^+ (S_n^-) je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$);

3. ak konverguje práve jeden z radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Dokážte!

238. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný práve vtedy, keď pre každú ohraničenú postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Dokážte!

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde $a_n > 0$ počínajúc niektorým n_0 alebo $a_n < 0$ počínajúc niektorým n_0, sa nazýva *rad so striedavými znamienkami.*

Veta 12 (*Leibnizovo kritérium*). *Nech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je rýdzomonotónna*[26] *postupnosť a* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ (ktorý je zrejme radom so striedavými znamienkami) *konverguje a pre súčet* R_n *jeho* n*–tého zvyšku platí odhad*

$$|R_n| < a_{n+1}\,, \quad n \in \mathbf{N}\,. \tag{3.4}$$

[26] tvrdenie zostane v platnosti, aj keď slovo „rýdzomonotónna“ nahradíme slovom „monotónna“, v (3.4) treba v tom prípade ostrú nerovnosť nahradiť neostrou

Poznámka. Z vety 1 vyplýva, že Leibnizovo kritérium možno vysloviť aj v nasledujúcej podobe:

Veta 12'. *Nech postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *vyhovuje nasledujúcim podmienkam:*
1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;
2. *existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *tak, že* $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ *je rýdzomonotónna postupnosť.*
Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

Podobne možno upraviť formulácie dvoch nasledujúcich kritérií — Abelovho a Dirichletovho (vety 13, 14) aj formuláciu integrálneho kritéria.

239. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)\sin\frac{1}{n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$;
5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n+(-1)^n}}$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}\,)$;
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$.

Riešenie. 2. Pretože $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} > 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$, je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$ rad so striedavými znamienkami, preto na vyšetrenie jeho konvergencie skúsime použiť Leibnizovo kritérium. Musíme teda preveriť splnenie predpokladov vety 12':

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = 0$ [27] (na výpočet $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ sme použili l'Hospitalovo pravidlo);

2. ak pomocou prvej derivácie vyšetríme rast a klesanie funkcie $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$\left(f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}\,, \quad f'(x) > 0 \quad \text{pre} \quad x \in (0, e^2)\,, \quad f'(x) < 0 \quad \text{pre} \quad x \in (e^2, \infty)\ \right),$$

zistíme, že funkcia f je klesajúca na intervale $[e^2, \infty)$; preto $\left\{\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right\}_{n=8}^{\infty}$ [28] je klesajúca postupnosť.

Rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$ teda podľa Leibnizovho kritéria konverguje.

240. Ukážte, že postupnosť $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ má limitu 0. (Návod: dokážte, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$ diverguje k $-\infty$ [29].) Na základe toho vyšetrite konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

---

[27] pripomeňme, že podmienka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je súčasne nutnou podmienkou konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ (pozri aj poznámku k riešeniu pr. 207), preto z jej nesplnenia by vyplývala divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

[28] $e^2 \approx 7.389$

[29] keby rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konvergoval, existovala by konečná nenulová $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$

241. Koľko prvých členov radu treba sčítať, aby sme našli súčet radu

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{7/2}}$ s chybou menšou než 10^{-7}?
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{5/2}2^n}$ s chybou menšou než 10^{-6}?

242. Rozhodnite o platnosti tvrdenia „ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných čísel a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje“!

Veta 13 (*Abelovo kritérium*)[30]. *Nech*
1. *rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*
2. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónna ohraničená postupnosť*[31].

Potom konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Veta 14 (*Dirichletovo kritérium*)[32]. *Nech*
1. *postupnosť* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *čiastočných súčtov radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je ohraničená;*
2. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónna postupnosť a* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Skutočnosť, že existuje $k \in \mathbf{N}$ také, že $\{b_n\}_{n=k}^{\infty}$ je nerastúca (neklesajúca) postupnosť s limitou $a \in \mathbf{R}^*$, budeme v ďalšom zapisovať $b_n \searrow a$ ($b_n \nearrow a$)[33].

243. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(\pi/n)}{n}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin\frac{n\pi}{4}$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$;
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+\pi/4)}{\ln^2(n+1)}$;
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln\ln(n+2)} \cos\frac{1}{n}$;
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$;
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

Riešenie. 4. Ukážeme najprv, že postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ (kde $x \in \mathbf{R}$ je dané) je ohraničená. Pre $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) je zrejme $S_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$. Pre $x \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) použitím vzorca $\sin\alpha\sin\beta = (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))/2$ dostaneme

$$\begin{aligned} S_n &= \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin x \sin\frac{x}{2} + \sin 2x \sin\frac{x}{2} + \cdots + \sin nx \sin\frac{x}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$ [34].

[30] pozri tiež pr. 275 a 277

[31] tento výrok je zrejme ekvivalentný s výrokom „$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna konvergentná postupnosť“

[32] pozri tiež pr. 275 a 276

[33] v súvislosti s týmto označením odporúčame čitateľovi sformulovať Abelovo a Dirichletovo kritérium tak, ako formuluje veta 12' Leibnizovo kritérium (pozri poznámku za vetou 12)

Teda $S_n = 0$ pre $x = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, $|S_n| \le \dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}$ pre $x \ne k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Teraz už môžeme použiť Dirichletovo kritérium: Nech je dané $x \in \mathbf{R}$; potom podľa predchádzjúceho je postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ ohraničená. Súčasne $\dfrac{1}{n} \searrow 0$, preto podľa vety 14 rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje.

6. Podľa pr. 243.4 rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje, súčasne $b_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \nearrow e$ [35], preto podľa Abelovho kritéria rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konverguje.

Poznámka. Podobne, ako sme v riešení pr. 243.6 od konvergentného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ dospeli ku konvergentnému radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, mohli by sme teraz na základe Abelovho kritéria vo vytváraní konvergentných radov pokračovať:

ak $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna ohraničená postupnosť, tak z vety 13 vyplýva konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n b_n$;

ak $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna ohraničená postupnosť, tak opäť z vety 13 vyplýva konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n b_n c_n$, atď.

Ukážeme teraz navyše, že pre $x \ne k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ konverguje rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ relatívne. Konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ sme dokázali v pr. 243.4, stačí teda dokázať, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$ diverguje. Využijeme pritom výsledok pr. 243.5, podľa ktorého rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos ny}{n}$ konverguje pre každé $y \ne 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Pretože $|\sin\alpha| \ge \sin^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, je

$$\frac{1}{n}|\sin nx| \ge \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}\,. \tag{3.5}$$

Pre $x \ne k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ je $2x \ne 2k\pi$, preto podľa pr. 243.5 rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(2x)}{n}$ — a teda aj rad $\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ — konverguje. Odtiaľ vyplýva, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}\right)$ — ktorý je súčtom divergentného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ a konvergentného radu $\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ — diverguje.

---

[34] 1. snaživý čitateľ sa môže presvedčiť, že v prípade $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, kedy — ako už vieme — je $S_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$, skutočne platí $\left(\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x\right) / \left(2\sin\dfrac{x}{2}\right) = 0$;

2. z rovnosti $S_n = \dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\,\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2\sin(x/2)}\cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x$ vyplýva, že pre $x \ne k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ osciluje (neexistencia limity $\lim_{n\to\infty} \cos(n + 1/2)x$ pre $x \ne k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, sa dokáže rovnako ako v pr. I.178)

[35] opätovne pripomíname, že dôkaz monotónnosti postupnosti $(1 + 1/n)^n$ je súčasťou dôkazu existencie konečnej $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$

Z rovnosti $\dfrac{1-\cos 2nx}{2} = \sin^2 nx$ vyplýva, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{\cos 2nx}{2n}\right)$ je rad s nezápornými členmi; môžeme preto použiť porovnávacie kritérium, podľa ktorého z divergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{\cos 2nx}{2n}\right)$ a z nerovnosti (3.5) vyplýva divergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin nx|}{n}$.

244. 1. Ukážte, že Leibnizovo a Abelovo kritérium možno odvodiť z Dirichletovho kritéria!

2_0. Nech $k \in \mathbf{N}$. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť s limitou 0, tak rad $\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^{k[n/k]}a_n$ konverguje ([.] tu označuje celú časť). Dokážte!

245. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$;
2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{2^n}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^n\sin^{2n}x}{n}$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin 3n}{n\ln(n+1)\ln^2(n+2)}$;
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\left(n\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$;
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$;
9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$;
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$;
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$;
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^3 n}{\sqrt{n}}$;
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^4 n - 3/8}{\sqrt{n+1}}$;
15. $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{3^n}+\cdots$.

246. Zistite, ktoré z nasledujúcich radov konvergujú relatívne a ktoré absolútne:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1/n}}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(2n+1)!!}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\,\dfrac{n^{100}}{2^n}$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln^2 n}{n^p}$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$;
7. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}-\cdots$;
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}}\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^p}, \quad p>0$;
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^p}, \quad p>0$;
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^4 n}{n}$;
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\cdot\cos(1/n)}{\sqrt[4]{n}}$;
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}$;

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\sin 2n}{n^2 - \ln n}$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/12)}{\ln n}$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n \cdot \ln^2 n}{n^p}$, $\quad p > 0$.

Hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je (vznikne) prerovnaním radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, ak existuje bijekcia $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ taká, že $b_n = a_{p(n)}$, $n \in \mathbf{N}$.

Veta 15 (*Riemannova veta o prerovnaní*). *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný rad; nech $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a \leq b$. Potom existuje prerovnanie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ také, že*

$$a = \liminf_{n\to\infty} S_n \ , \quad b = \limsup_{n\to\infty} S_n \ ,$$

kde $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Veta 16. *Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný práve vtedy, keď každé jeho prerovnanie konverguje k tomu istému súčtu.*

247. 1. Zo vzťahu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + \varepsilon_n \ ,$$

kde $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ a C je Eulerova konštanta (pozri pr. 220 a poznámku k pr. 228.1), odvoďte vzťah

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \ln\sqrt{4n} + \frac{C}{2} + \eta_n \ ,$$

kde $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$.

2. Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ a súčty nasledujúcich radov, ktoré vzniknú jeho prerovnaním:

a) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$;

b) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$;

c) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots$.

3_0. Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vznikne prerovnaním radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ tak, že za každou skupinou p za sebou nasledujúcich kladných členov dáme skupinu m za sebou nasledujúcich záporných členov. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{m} \ .$$

Dokážte!

248. 1. Z rovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \quad [36]$$

odvoďte vzťahy

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{4k-3} \quad &= \quad \ln\sqrt[4]{8k} + \frac{\pi}{8} + \frac{C}{4} + \vartheta_k \ , \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{4k-1} \quad &= \quad \ln\sqrt[4]{8k} - \frac{\pi}{8} + \frac{C}{4} + \tau_k \ , \end{aligned}$$

[36] túto rovnosť dokážeme v pr. 344.2

kde $\lim_{k\to\infty}\vartheta_k = 0$, $\lim_{k\to\infty}\tau_k = 0$ a C je Eulerova konštanta.

2. Nájdite súčty nasledujúcich radov, ktoré vznikli prerovnaním radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$:

a) $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\frac{1}{9}-\cdots$;

b) $1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}-\frac{1}{7}+\cdots$.

249. Pomocou rovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\ [37]$$

nájdite súčty radov

1. $1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots$;

2. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$.

250. Dokážte, že rad

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots,$$

ktorý vznikne prerovnaním konvergentného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, je divergentný.

251. Vyšetrite konvergenciu radu

$$1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots$$

(pre $p=1,2,1/2$ ide o rady z pr. 247.2a), 249.1 a 250).

251. 1. Nech $c\in\mathbf{N}$ a nech $p:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ je bijekcia taká, že $|p(n)-n|\le c$, $n\in\mathbf{N}$. Ak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergentný rad, tak jeho prerovnanie $\sum_{n=1}^{\infty}a_{p(n)}$ [38] konverguje k tomu istému súčtu ako rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Dokážte!

2. Nájdite súčet radu $-\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2(-1)^n}$.

3.4 Cauchyho súčin radov

Cauchyho súčinom radov $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ nazývame rad $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$, kde $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$. Rad $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ budeme označovať symbolom $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n$.

Veta 17. a) *Ak aspoň jeden z konvergentných radov $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ konverguje absolútne, tak ich Cauchyho súčin konverguje a jeho súčtom je číslo $(\sum_{n=0}^{\infty}a_n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_n)$.*

b) *Ak rady $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ konvergujú absolútne, tak ich Cauchyho súčin konverguje absolútne.*

[37] odvodenie uvedenej rovnosti presahuje rámec tohto textu (dokazuje sa spravidla dosadením $x=0$ do rovnosti $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$, $x\in[-\pi,\pi]$, ktorá vyplýva z teórie *Fourierových radov* (pozri napr. [1, str. 40, pr. 2.4])

[38] rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ teda prerovnáme tak, aby sa žiadny jeho člen „nevzdialil“ zo svojho pôvodného miesta viac ako o c miest

253. Nájdite Cauchyho súčin radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, kde

a) $a_n = a^n$, $b_n = b^n$, $a \neq b$;

b) $a_n = \dfrac{q^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$, $b_n = q^n$;

c) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$, $b_n = \dfrac{3^n}{n!}$;

d) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$, $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ [39].

2. Dokážte rovnosti

a) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}\right) = 1$;

b) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$.

254. Nech $a_n > 0$, $b_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Potom Cauchyho súčin týchto radov diverguje. Dokážte!

255. Dokážte, že druhá mocnina konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ (tj. jeho Cauchyho súčin so sebou samým) diverguje.

256. Dokážte, že Cauchyho súčin divergentných radov

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad \text{a} \qquad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$$

je absolútne konvergentný rad.

257. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú absolútne konvergentné rady, nech $p : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je bijekcia; nech $c_n := a_j b_k$, ak $p(n) = (j,k)$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je absolútne konvergentný rad, ktorého súčtom je číslo $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$. Dokážte!

3.5 Ďalšie príklady

258. Nájdite súčet radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \left[\dfrac{\ln n}{n - \ln n}\right]$ [40];
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}$;
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \dfrac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$;
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!\,(n+2)}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{2n(2n-1)}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2n^2}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \cos \dfrac{x}{2^n}$, $x \in (-\pi, \pi)$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2^n}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

259. Nech $m \in \mathbf{N}$, nech $a_k := \dfrac{1}{u_k u_{k+1} \cdots u_{k+m}}$ $(k \in \mathbf{N})$, kde $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická postupnosť nenulových čísel s diferenciou $d \neq 0$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{1}{m d u_1 u_2 \cdots u_m}$. Dokážte!

260. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť reálnych čísel; definujme funkciu $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x) = \begin{cases} a_n\,, & \text{ak } x \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] \\ 0\,, & \text{ak } x = 0 \end{cases}.$$

[39] pritom kladieme $(-1)^0 := 1$

[40] $[.]$ tu označuje celú časť

Potom $f \in \mathcal{R}[0,1]$ a $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$. Dokážte!

261. Ak $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $c_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$ a rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^3$ konvergujú, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$. Dokážte!

262. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel a rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ konverguje, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Dokážte! (Návod: využite pr. 211.1.)

263. *Fibonacciho postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná nasledovne: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Dokážte, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ konverguje.

264. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n/3}\sqrt[3]{n!+1}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!\,\mathrm{arctg}\,(1/3^n)}{n!}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)!)^n}{2!\,4!\cdots(2n)!}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \frac{1}{n^q}$, $\quad q \leq 1$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\right)^p$, $\quad q > 0$;

8. $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots$
(návod: $\sqrt{2} = 2\sin(\pi/4) = 2\cos(\pi/4)$) ;

9. $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} + \cdots$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n^2}{2(n^2+\alpha n+\beta)}$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\left(\cos\frac{1}{n^p}\right)^n\right)$, $\quad p > 0$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$;

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right)$;

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arccos\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}$;

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n}{n+1}\right)$;

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{pn+q}\right)^{n\ln n}$, $\quad p > 0$, $q > 0$;

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b})$;

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/(n^2+1)} - 1\right)$;

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{(a\ln n+b)/(c\ln n+d)}$;

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{1/n} - \frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}\right)$, $\quad a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\frac{1}{n^p} - \ln\sin\frac{1}{n^p}\right)$, $\quad p > 0$;

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{(n+b)}(n+b)^{(n+a)}}$;

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$, $\quad a > 0$;

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$;

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$;

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$;

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx$;

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi/n}\frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx$;

29. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n(\ln\ln n)^r}$;

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\ln n)}{\sqrt[4]{n^4+3n^2+1}\,\ln^3(n+2)}$;

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(e^n+n^2)}{n^2\ln^2(n+1)}$;

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n^2-n+1)}{\arcsin^p(e^{1/\sqrt{n}}-1)}$

33. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln 2)^2+(\ln 3)^2+\cdots+(\ln n)^2}$;

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$;

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}$;

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^p}$.

265. Nájdite postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel takú, že $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$ diverguje pre každé $p\ge 1$.

266. Dokážte nerovnosti:

1. $\displaystyle -\frac{\pi}{2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}<\frac{\pi}{2}\,,\quad x\in\mathbf{R}$;

2. $\displaystyle \frac{\pi}{2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}<\frac{1}{2}(\pi+1)$.

267. Na základe porovnania radu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ s radom $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ odvoďte *Bertrandovo kritérium*: Nech $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je rad s kladnými členmi. Potom

1. ak existuje $p>1$ tak, že počínajúc niektorým n_0 platí

$$\ln n\cdot\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)\ge p\,, \tag{3.6}$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje:

2. ak počínajúc niektorým n_0 platí $\ln n\cdot\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)\le 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje.

268. Nech $f:[1,\infty)\to\mathbf{R}$ je kladná nerastúca funkcia a $\varphi:[1,\infty)\to\mathbf{R}$ je kladná diferencovateľná rastúca funkcia vyhovujúca podmienke $\varphi(x)>x$. Nech existuje $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(\varphi(x))\,\varphi'(x)}{f(x)}=:A\ (\in\mathbf{R}^*)$. Potom

1. ak $A<1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ konverguje;

2_0. ak $A>1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ diverguje.

Dokážte!

269. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť s limitou 0. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ má rovnaký charakter ako rad $\sum_{m=1}^{\infty}p_m2^{-m}$, kde p_m je počet prvkov množiny $\{a_n\,;\,a_n\ge 2^{-m}\}$ (pritom $\emptyset$ pokladáme za 0–prvkovú množinu). Dokážte!

270. Zistite, ktoré z nasledujúcich radov konvergujú absolútne a ktoré relatívne:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n+1}}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\sqrt{n}+(-1)^{n+1})^p}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/4)}{n^p+\sin(n\pi/4)}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^p}\right)$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\ln^p(n+1)}\,,\quad x\in(0,\pi)$;

9. $\displaystyle\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots$.

271. Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ spĺňa nutnú podmienku konvergencie a nech $c \in \mathbf{N}$. Nech $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel taká, že $p_1 = 1$ a $p_{n+1} - p_n \le c$, $n \in \mathbf{N}$. Potom rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_n := \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$ [41], majú rovnaký charakter. Dokážte!

272. „Uzátvorkujme" rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby žiadna zátvorka neobsahovala členy s opačnými znamienkami. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a uzátvorkovaný rad majú rovnaký charakter. (Korektnejšiu formuláciu zadania prenechávame čitatelovi.) Dokážte!

273. Relatívne konvergentný rad možno „uzátvorkovať" tak, aby vznikol absolútne konvergentný rad. (Aj v tomto prípade prenechávame presnú formuláciu čitateľovi.) Dokážte!

274. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right)$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$;

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos\frac{\pi n^2}{n+1}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+(-1)^n}}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1\right)$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n+\sin n}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+1/n)}{\ln\ln n}$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi(2+\sqrt{3})^n$ (návod: vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi(2-\sqrt{3})^n$) ;

10. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{n\ln(n+1)}$, kde $a_n = \begin{cases} 1, & \text{ak } n = 5k+1,\ 5k+2 \\ -1, & \text{ak } n = 5k,\ 5k-1,\ 5k-2 \end{cases}$, $k \in \mathbf{N}$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

275. Nech S_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, nech $\lim_{n\to\infty} a_n S_n = 0$. Dokážte, že ak konverguje jeden z radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})S_n$, tak konverguje aj druhý z nich a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})S_n$. Dokážte!

276. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

(i) postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čistočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je ohraničená;

(ii) rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ absolútne konverguje;

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

277. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

(i) rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje;

(ii) rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ konverguje absolútne.

278. Dokážte, že pre súčet S_p radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ $(p > 0)$ platí odhad $\dfrac{1}{2} < S_p < 1$.

279. Nech $p, m \in \mathbf{N}$; nemeniac poradie členov harmonického radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, zmeňme ich znamienka tak, aby vždy za skupinou p kladných členov nasledovala skupina m záporných členov. Takto získaný rad diverguje (konverguje), ak $p \ne m$ $(p = m)$. Dokážte!

[41] teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ „uzátvorkujeme" tak, aby žiadna zátvorka neobsahovala viac ako c členov

280. 1. Nájdite také prerovnanie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, ktorého súčet je dvojnásobkom súčtu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

2. Nájdite divergentné prerovnanie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

281. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný rad, $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je také prerovnanie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že $\limsup_{n\to\infty} S_n = b$, $\liminf_{n\to\infty} S_n = a$, kde $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ [42]. Potom aj každé číslo z intervalu (a, b) je hromadnou hodnotou postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dokážte!

282. Nech $a_0 \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, definujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nasledovne: $a_1 = \sin a_0$, $a_{n+1} = \sin a_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

1. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \sin a_n)$ je konvergentný. Na základe toho dokážte konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$.
2. Dokážte, že rady $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(a_{n+1}/a_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ divergujú.
3. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbf{R}$.

283. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

1. $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{2}\right) a_n$, $\quad n \in \mathbf{N}$;
2. $a_1 = \sin\alpha$, $\quad a_{n+1} = (-1)^n \sin a_n$, $\quad n \in \mathbf{N}$;
3. $a_1 = a > 0$, $\quad a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$, $\quad n \in \mathbf{N}$;
4. $a_1 = a \in \mathbf{R}$, $\quad a_{n+1} = a_n - a_n^2$, $\quad n \in \mathbf{N}$.

284. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx_0}$ konverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ konverguje absolútne pre každé $x > x_0$. Dokážte!

285. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-p}$ $(p > 0)$ konverguje, tak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0 .$$

Dokážte!

286. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný rad s kladnými členmi. Potom

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ diverguje;
2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$, kde S_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje pre $p > 1$ a diverguje pre $p \leq 1$.

Dokážte!

287. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad s kladnými členmi, nech $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Potom

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_n}$ diverguje;
2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{R_n}}$ konverguje.

Dokážte!

288. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ majú rovnaký charakter. Dokážte!

289. Uveďte príklad konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takého, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ diverguje.

[42] pozri vetu 15

290. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný rad, pričom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť s limitou 0; nech $c \in \mathbf{N}$ a $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel taká, že $p_{n+1} - p_n \leq c$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ diverguje. Dokážte!

291. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členmi konverguje, tak existuje postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $b_n \nearrow \infty$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. Dokážte!

292. 1_0. Nech S_n , σ_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; pričom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentný rad s kladnými členmi. Ak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{\sigma_n} = k$ ($k \in \mathbf{R}^*$). Dokážte!

2. Dokážte *Stolzovu vetu*: Ak $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca divergentná postupnosť a existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, tak existuje aj $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} .$$

3. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + n^{p-1}}{n^p}$, $\quad p > 1$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\dfrac{1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + n^{p-1}}{n} - \dfrac{1}{p} \right)$, $\quad p > 1$.

4. Nech S_n je n–tý čiastočný súčet divergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členmi; nech $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{S_n} = 0$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k S_k^{-1}}{\ln S_n} = 1 .$$

Dokážte!

293. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená (neohraničená) rastúca postupnosť kladných čísel, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ konverguje (diverguje). Dokážte!

294. Nech $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}_0^+$ je rastúca konkávna funkcia taká, že $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ konverguje. Potom platí: ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad s nezápornými členmi, tak aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f(a_n)}{n}$ konverguje. Dokážte!