

Chapter 4

Postupnosti a rady funkcí

4. Postupnosti a rady funkcí

4.1 Bodová a rovnomerná konvergenca

Nech je daná postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ¹, nech $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$ ($:= \{x \in \mathbf{R}; \forall n \in \mathbf{N} : x \in D(f_n)\}$). Hovoríme, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v bode a , ak existuje konečná $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$. Ak je množina D všetkých tých čísel $x \in \mathbf{R}$, v ktorých postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, neprázdna, nazýva sa funkcia $g: D \rightarrow \mathbf{R}$, daná predpisom $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, (bodová) limita (limitná funkcia) postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označuje sa $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Hovoríme, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (bodove) konverguje na množine M (k funkcii f), ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v každom bode $x \in M$ (a $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n|_M) = f|_M$); funkcia $f|_M$ sa nazýva (bodová) limita (limitná funkcia) postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na množine M . Namiesto $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n|_M) = f|_M$ budeme písať $f_n \rightarrow f$ na M ².

Ak je daná postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=k}^{\infty}$ ($k \in \{0, 1, \dots\}$), pričom $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n) \neq \emptyset$, nazýva sa symbol $\sum_{n=k}^{\infty} f_n$ (alebo $f_k + f_{k+1} + \dots + f_n + \dots$) rad funkcií (funkcionálny rad). Ak je daný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ¹, nazýva sa funkcia f_k , resp.

$$S_k := f_1 + f_2 + \dots + f_k, \quad k \in \mathbf{N},$$

k -ty člen, resp. k -ty čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Ak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, nazýva sa táto funkcia súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a jej definičný obor obor konvergenzie radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ³. Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje v bode a ((bodove) konverguje na množine M , (bodove) konverguje na množine M k funkcii f), ak postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov konverguje v bode a (konverguje na množine M , konverguje na množine M k funkcii f). Zápis $S_n \rightarrow f$ na M budeme spravidla nahrádzať zápisom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightarrow f$ na M .

295. Nájdite funkciu $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, ak:

- | | |
|--|---|
| 1. $f_n(x) = \frac{nx^2}{x + 3n + 2}, \quad x \geq 0;$ | 2. $f_n(x) = x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+3}, \quad x \in [0, 1];$ |
| 3. $f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x;$ | 4. $f_n(x) = n^2 x^4 \sin \frac{x}{n^2 + n};$ |
| 5. $f_n(x) = (x - 1) \operatorname{arctg} x^n, \quad x > 0;$ | 6. $f_n(x) = n \left(x^{1/n} - x^{1/2n} \right), \quad x > 0;$ |

¹z podobných dôvodov ako v kapitole 3 uvádzame definície a vety spravidla len pre postupnosti, resp. rady tvaru $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

²zapíšme tu ešte rovnosť $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n|_M) = f|_M$ pomocou kvantifikátorov:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in M \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

³oborom konvergenzie radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je teda množina všetkých tých $x \in \mathbf{R}$, pre ktoré číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje

7. $f_n(x) = n^3 x^2 e^{-nx}$, $x \geq 0$;

8. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln nx$;

9. $f_n(x) = n \operatorname{arctg} nx^2$, $x > 0$;

10. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $x \geq 0$;

11. $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in [1/n, \infty) \\ -1, & \text{ak } x \in (-\infty, -1/n] \\ nx, & \text{ak } x \in (-1/n, 1/n) \end{cases}$;

12. $f_n(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{ak } x \in [0, 2^{-n}] \\ 0, & \text{ak } x \in (2^{-n}, \infty) \end{cases}$.

296. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale (a, b) , nech $f_n \rightarrow f$ na (a, b) . Potom

1. ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť neklesajúcich funkcií, tak f je neklesajúca funkcia;

2. ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť konvexných funkcií, tak f je konvexná funkcia.

Dokážte!

297. Nájdite obory konvergence nasledujúcich radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-n \sin x}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$, $p > 0$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x^2+1)(x^2+2)\cdots(x^2+n)}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n x}{n \ln^2(n+1)}$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}}$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

298. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť lineárnych⁴ funkcií definovaných na \mathbf{R} ; nech $a \neq b$ a rady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ konvergujú. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je lineárna funkcia definovaná na \mathbf{R} . Dokážte!

Hovoríme, že postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M rovnomerne k funkcii f (a zapisujeme $f_n \rightrightarrows f$ na M), ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n > n_0 \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad ^5.$$

Ak pre postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a neprázdnu množinu $M \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$ existuje funkcia f taká, že $f_n \rightrightarrows f$ na M , hovoríme, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na množine M .

⁴pripomeňme, že funkcia g sa nazýva lineárna, ak jej predpis možno písať v tvare $g(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbf{R}$

⁵ak tento zápis porovnáme so zápisom z poznámky ², vidíme, že v prípade rovnomernej konvergence číslo n_0 závisí len na čísle ε , tj. $n_0 = n_0(\varepsilon)$, zatiaľčo v prípade bodovej konvergence závisí toto číslo navyše aj na x , tj. $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$; ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je špeciálne postupnosť konštantných funkcií, $f_n \equiv c_n, n \in \mathbf{N}, x \in M$, je zrejme rovnomerná konvergencia postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ekvivalentná s existenciou konečnej $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M (k funkcii f), ak postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov konverguje rovnomerne na množine M (k funkcii f)⁶. Zápis $S_n \rightrightarrows f$ na M nahrádzame zápisom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na M .

Veta 1. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M , tak $f_n \rightarrow f$ na M .

Veta 2. Postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M rovnomerne k funkcii f práve vtedy, keď

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad 7.$$

Hovoríme, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ [rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$] konverguje na množine M k funkcii f nerovnomerne (konverguje na množine M nerovnomerne), ak $f_n \rightarrow f$ na M [$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightarrow f$ na M], ale neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na M [$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na M] (ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ [rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$] konverguje na M bodovo, ale nekonverguje tam rovnomerne).

299. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M ; nech pre funkcii $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ a postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel platí $|f_n(x) - f(x)| < c_n$ ($x \in M$, $n \in \mathbf{N}$) a $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na M . Dokážte!

300. Zistite, či postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na množine M , ak:

1. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, $M = (0, \infty)$;
2. $f_n(x) = \frac{\sin n\sqrt{x}}{\ln(n+1)}$, $M = [0, \infty)$;
3. $f_n(x) = \sin \frac{1+nx}{2n}$, $M = \mathbf{R}$;
4. $f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{1+n^2 x^4} \sin \frac{x^2}{\sqrt{n}}$, $M = [1, \infty)$;
5. $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$, $M = \mathbf{R}$;
6. $f_n(x) = n^{3/2} \left(1 - \cos \frac{\sqrt[4]{x}}{n}\right)$, $M = [0, \infty)$;
7. $f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}$, $M = [1, \infty)$;
8. $f_n(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx$ a) $M = [0, 1]$, b) $M = [1, \infty)$;
9. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2 x^2}$ a) $M = [0, 10]$, b) $M = [1, \infty)$;
10. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$, $M = (0, 1)$;
11. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ a) $M = [0, 1 - \delta]$, b) $M = [1 + \delta, \infty)$, c) $M = [1 - \delta, 1 + \delta]$, $1 > \delta > 0$;
12. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$, $M = (0, 1)$;
13. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $M = \mathbf{R}$;
14. $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$, $M = [0, 2]$;
15. $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{ak } x \in [0, 1/n] \\ n^2(2/n - x), & \text{ak } x \in (1/n, 2/n) \\ 0 & \text{ak } x \in [2/n, \infty) \end{cases}$, $M = [0, \infty)$.

⁶z poznámky ⁵ vyplýva: ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je špeciálne postupnosť konštantných funkcií, $f_n \equiv c_n$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in M$, je zrejme konvergencia číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ekvivalentná s rovnomernou konvergenciou funkcionálneho radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množine M

⁷táto rovnosť v sebe „automaticky“ zahŕňa podmienku „počínajúc niektorým n_0 sú funkcie $|f_n - f|$ ohraničené“

Riešenie. 8. Ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M rovnomerne k niektorej funkcii $f: M \rightarrow \mathbf{R}$, tak podľa vety 1 musí platiť $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n|_M$. Zistíme preto najprv, ku ktorej funkcii konverguje postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na množine M bodovo:

Pretože $\lim_{u \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} u = \pi/2$, platia pre každé $x > 0$ rovnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} nx = \pi/2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} 2nx = \pi/2$; pre $x = 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} nx = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} 2nx = 0$; ďalej pre každé $x \in \mathbf{R}$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x$. Preto

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + \pi/2 - \pi/2 = \operatorname{arctg} x, & \text{ak } x > 0 \\ \operatorname{arctg} x + 0 - 0 = \operatorname{arctg} x, & \text{ak } x = 0 \end{cases}.$$

Teda $f_n(x) \rightarrow \operatorname{arctg} x$ na $[0, 1]$ a $f_n(x) \rightarrow \operatorname{arctg} x$ aj na $[1, \infty)$.

Teraz treba zistiť, či postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M k funkcii $\operatorname{arctg} x$ aj rovnomerne; na to použijeme vetu 2. Aby sme našli čísla $\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$ (pokiaľ existujú), vyšetříme pomocou prvej derivácie priebeh funkcií $f_n - f$:

$$(f_n(x) - f(x))' = (\operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx)' = \frac{n(1 - 2n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)(1 + 4n^2x^2)},$$

teda funkcia $f_n - f$ rastie na intervale $[0, 1/\sqrt{2n}]$ a klesá na intervale $[1/\sqrt{2n}, \infty)$. Ak navyše uvažíme, že $(f_n - f)(0) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} (f_n(x) - f(x)) = 0$, vidíme, že funkcia $f_n - f$ je na intervale $(0, \infty)$ kladná.

Zaoberajme sa teraz prípadom a), tj. $M = [0, 1]$. Z priebehu funkcií $f_n - f$ vyplýva, že

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = (f_n - f) \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \operatorname{arctg} \sqrt{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \operatorname{arctg} \sqrt{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

čo podľa vety 2 znamená, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje na intervale $[0, 1]$ k funkcii $f(x) = \operatorname{arctg} x$ rovnomerne. Pretože $f_n \rightarrow f$ na $[0, 1]$, ale neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, konverguje postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na intervale $[0, 1]$ k funkcii $f(x) = \operatorname{arctg} x$ nerovnomerne.

Uvažujme teraz prípad b), tj. $M = [1, \infty)$. Na intervale $[1, \infty)$ je každá z funkcií $f_n - f$ kladná a klesajúca, preto

$$\sup_{x \in [1, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = (f_n - f)(1) = \operatorname{arctg} 2n - \operatorname{arctg} n.$$

Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} 2n - \operatorname{arctg} n) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

čo podľa vety 2 znamená, že $f_n \rightrightarrows \operatorname{arctg} x$ na $[1, \infty)$.

Poznámky. 1. Nerovnosť

$$\forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\forall x \in M : f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon)$$

($\varepsilon > 0$ je dané číslo) „geometricky hovorí“, že graf funkcie $f_n|_M$ „leží medzi“ grafmi funkcií $f(x) - \varepsilon$, $x \in M$, a $f(x) + \varepsilon$, $x \in M$ (hovoríme tiež, že graf funkcie $f_n|_M$ leží v ε -páse okolo (grafu) funkcie $f|_M$). Ak teda $f_n \rightrightarrows f$ na M , znamená to, že pre každý ε -pás okolo funkcie f ($\varepsilon > 0$) vieme nájsť $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že grafy funkcií $f_{n_0+1}|_M$, $f_{n_0+2}|_M$, ... už ležia v tomto ε -páse. Na obr. 1 je znázornený ε -pás okolo funkcie $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [1, \infty)$ pre $\varepsilon = 0.1$ a grafy funkcií $f_n(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx$, $x \in [1, \infty)$, pre $n = 4, 5, 25$, z ktorých prvý neleží v tomto ε -páse a zvyšné dva v ňom ležia.

Ak neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na M (pričom $M \subset D(f)$, $M \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$), teda ak platí negácia tohto tvrdenia, ktorou je výrok

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbf{N} \exists n \in \mathbf{N}, n > n_0 \exists x_0 \in M : |f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon,$$

znamená to, že existuje ε -pás okolo funkcie f ($\varepsilon > 0$) s touto vlastnosťou: akokoľvek veľké $n_0 \in \mathbf{N}$ zvolíme, vždy nájdeme od neho väčšie číslo $n \in \mathbf{N}$ tak, že graf funkcie $f_n|_M$ neleží celý v tomto ε -páse (tj.

obr. 1

„vyskočí“ z neho aspoň v jednom bode $x_0 \in M$). Všimnime si teraz znova pr. 300.8a), v ktorom dokonca platí, že graf ľubovoľnej z funkcií $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ neleží celý v ε -páse okolo funkcie $\arctg x, x \in [0, 1]$, pre $0 < \varepsilon < \arctg \sqrt{2} - \arctg(1/\sqrt{2}) = 0.3398\dots$ (z rovnosti $\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = c$ totiž vyplýva, že graf funkcie $f_n|_M$ leží v ε -páse okolo f pre každé $\varepsilon > c$ a neleží v žiadnom z ε -pásov okolo f pre $0 < \varepsilon < c$ ⁸). Na obr. 2 je znázornený ε -pás okolo funkcie $f(x) = \arctg x, x \in [0, 0.1]$, pre $\varepsilon = 0.1$ a grafy funkcií $f_n(x) = \arctg x + \arctg 2nx - \arctg nx, x \in [0, 0.1]$, pre $n = 25, 50, 100, 250$.

2. Nech je dané $\delta > 0$. Z priebehu funkcií $f_n - f$, ktorý sme vyšetrili pri riešení pr. 300.8, vyplýva, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k funkcii $\arctg x$ nerovnomerne na intervale $[0, \delta]$ a rovnomerne na intervale $[\delta, \infty)$. Dokážeme to nasledovne: Pretože $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/\sqrt{2}n) = 0$, musí existovať $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $1/\sqrt{2}n \in [0, \delta]$ pre $n > n_0$ (pripomeňme, že v bode $1/\sqrt{2}n$ nadobúda funkcia $|f_n(x) - f(x)| = |\arctg 2nx - \arctg nx|, x \geq 0$, svoje maximum). Pre $n > n_0$ je teda

$$\sup_{x \in [0, \delta]} |f_n(x) - f(x)| = (f_n - f) \left(\frac{1}{\sqrt{2}n} \right) ;$$

pre $n > n_0$ funkcia $f_n - f$ klesá na intervale $[\delta, \infty)$ a je tam kladná, preto

$$\sup_{x \in [\delta, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = (f_n - f)(\delta) .$$

Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \delta]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctg \sqrt{2} - \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \arctg \sqrt{2} - \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\delta, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} (\arctg 2n\delta - \arctg n\delta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 .$$

⁸toto je myšlienka dôkazu vety 2

obr. 2

301₀. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M a funkcia g je ohraničená na množine M , tak $f_n g \rightrightarrows fg$ na M . Dokážte!

302. Nech je daná funkcia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, definujme funkcie $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ predpisom $f_n(x) = [nf(x)]/n$, $n \in \mathbf{N}$ (symbol $[.]$ označuje celú časť). Potom $f_n \rightrightarrows f$. Dokážte!

303. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií definovaných na intervale $[0, 1]$. Rozhodnite o platnosti nasledujúcich tvrdení:

1. ak $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$, tak $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0, 1]$;
2. ak $f_n \rightarrow 0$ na $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$, tak $f_n \rightarrow 0$ na $[0, 1]$.

304. Nech pre každú postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na danej neprázdnej množine M platí implikácia „ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na M bodove, tak tam konverguje aj rovnomerne“. Potom M je konečná množina. Dokážte!

305. Zistite, či nasledujúce rady konvergujú rovnomerne na množine M :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ a) $M = [-q, q]$, kde $0 < q < 1$, b) $M = (-1, 1)$;
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$, $M = [0, 1]$;
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x-1}{(2x)^n}$, $M = [1, \infty)$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$, $M = [-1, 1]$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $M = (0, \infty)$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$, $M = (0, \infty)$.

306. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M a funkcia $g : M \rightarrow \mathbf{R}$ je ohraničená, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} g f_n$ konverguje rovnomerne na množine M . Dokážte!

307. Dokážte túto *nutnú podmienku rovnomernej konvergenzie* radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine M , tak $f_n \rightrightarrows 0$ na M .

2. Na základe toho dokážte, že nasledujúce rady konvergujú nerovnomerne na množine M :

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}, \quad M = (0, \infty);$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{n} \right)^2, \quad M = \mathbf{R};$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx}}{1+n^2x^3}, \quad M = [0, \infty);$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}, \quad M = (0, \infty);$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(1+nx)\sqrt{nx}}, \quad M = (0, \pi).$$

3. Uveďte príklad radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, ktorý nekonverguje rovnomerne na intervale $[0, 1]$, ale spĺňa tam nutnú podmienku rovnomernej konvergenencie.

Veta 3 (Cauchyho–Bolzanovo kritérium rovnomernej konvergenencie). Postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na množine M práve vtedy, keď platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n, m \in \mathbf{N}, n > n_0, m > n_0 \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Špeciálne pre funkcionálne rady možno toto tvrdenie sformulovať nasledovne:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M práve vtedy, keď platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n > n_0 \forall p \in \mathbf{N} \forall x \in M : |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon. \quad (4.1)$$

308. Pomocou Cauchyho–Bolzanovho kritéria rovnomernej konvergenencie dokážte, že nasledujúce rady konvergujú na množine M nerovnomerne:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx^2}, \quad M = (0, \infty);$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2n + n^2 x^2}, \quad M = (0, 1);$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{n}, \quad M = (1, \infty);$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{n^2 x}}, \quad M = (0, \infty).$$

Riešenie. 2. Máme dokázať, že daný rad konverguje bodovo na $(0, 1)$, ale nekonverguje tam rovnomerne.

Nech je dané $x \in (0, 1)$, potom z nerovnosti $\left| \frac{\sin nx}{2n + n^2 x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 x^2}$ a z konvergenencie číselného radu

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^2}$ $\left(= \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)$ vyplýva podľa porovnávacieho kritéria (veta 4 z odseku 3.2) konvergenca

radu $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{2n + n^2 x^2} \right|$ a teda (podľa vety 11 z odseku 3.3) aj konvergenca radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2n + n^2 x^2}$. Tým je dokázaná bodová konvergenca nášho radu na intervale $(0, 1)$.

Aby sme ukázali, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2n + n^2 x^2}$ nekonverguje rovnomerne na $(0, 1)$, dokážeme pre $f_n = \frac{\sin nx}{2n + n^2 x^2}$ a $M = (0, 1)$ výrok

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbf{N} \exists n \in \mathbf{N}, n > n_0 \exists p \in \mathbf{N} \exists x \in M : |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| \geq \varepsilon, \quad (4.2)$$

ktorý je negáciou výroku (4.1).

Nech je dané $m \in \mathbf{N}$, označme $g_m(x) := f_m(x) + f_{m+1}(x) + \dots + f_{2m}(x)$. Potom

$$\begin{aligned} g_m \left(\frac{1}{m} \right) &= \frac{\sin 1}{2m+1} + \frac{\sin \left(1 + \frac{1}{m} \right)}{2(m+1) + \left(1 + \frac{1}{m} \right)} + \frac{\sin \left(1 + \frac{2}{m} \right)}{2(m+2) + \left(1 + \frac{2}{m} \right)} + \dots + \\ &\quad + \frac{\sin \left(1 + \frac{m-1}{m} \right)}{2(m+(m-1)) + \left(1 + \frac{m-1}{m} \right)} + \frac{\sin 2}{4m+4}. \end{aligned}$$

Ak využijeme nerovnosti $\sin(1 + k/m) \geq \sin 1 > 0$ a $0 < 2(m+k) + (1 + k/m)^2 \leq 4m + 4$ (odtiaľ $1/[2(m+k) + (1 + k/m)^2] \geq 1/4(m+1)$) pre $k = 0, 1, 2, \dots, m$, dostaneme

$$\frac{\sin\left(1 + \frac{k}{m}\right)}{2(m+k) + \left(1 + \frac{k}{m}\right)^2} \geq \frac{\sin 1}{4(m+1)} \quad \text{pre } k = 0, 1, 2, \dots, m,$$

a preto

$$\left|g_m\left(\frac{1}{m}\right)\right| \geq (m+1) \frac{\sin 1}{4(m+1)} = \frac{\sin 1}{4}.$$

Platí teda

$$\forall m \in \mathbf{N} : \left|f_m\left(\frac{1}{m}\right) + f_{m+1}\left(\frac{1}{m}\right) + \dots + f_{2m}\left(\frac{1}{m}\right)\right| \geq \frac{\sin 1}{4},$$

odkiaľ — ak položíme $m = n + 1$ — dostávame

$$\forall n \in \mathbf{N} : \left|f_{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right) + f_{n+2}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \dots + f_{2n+2}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| \geq \frac{\sin 1}{4}.$$

Z tohto výroku už vyplýva tvrdenie (4.2): stačí zvoliť $\varepsilon = \frac{\sin 1}{4}$ a pre dané n_0 položiť $n = n_0 + 1$, $p = n + 2$, $x = \frac{1}{n+1}$.

309. 1. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií definovaných na intervale $[a, b]$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na (a, b) , tak konverguje rovnomerne aj na $[a, b]$. Dokážte!

2. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin(1/2^n)$ konverguje nerovnomerne na intervale $(-2, 2)$.

310. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ konverguje rovnomerne na množine M , tak na M konverguje rovnomerne aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Dokážte!

Veta 4 (Weierstrassovo kritérium). Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií ohraničených na neprázdnej množine M , nech $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezáporných čísel taká, že $|f_n(x)| \leq c_n$, $x \in M$, $n \in \mathbf{N}$. Ak číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje, tak funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na M .

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ z vety 4 sa nazýva číselný majorantný rad k radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Poznámky. 1. Z predpokladov vety 4 vyplýva aj rovnomerná konvergencia (a teda aj konvergencia) radu $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ na M . Weierstrassovo kritérium teda nemožno použiť na vyšetrenie rovnomernej konvergencie radu, ktorý konverguje relatívne aspoň v jednom bode množiny M .

2. Najmenšie možné číslo c_n vyhovujúce nerovnosti $|f_n(x)| \leq c_n$, $x \in M$, je číslo $\sup_{x \in M} |f_n(x)|$. Ak teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in M} |f_n(x)|$ diverguje, nemožno na vyšetrenie rovnomernej konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množine M použiť Weierstrassovo kritérium.

3. Na základe tvrdenia „ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M a g je funkcia definovaná na M , tak rad $g + \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ⁹ konverguje rovnomerne na M “ možno formuláciu Weierstrassovho kritéria upraviť do tejto podoby:

Veta 4'. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M , nech existuje číslo $n_0 \in \mathbf{N}$ a konvergentný rad $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n$ tak, že $|f_n(x)| \leq c_n$ pre $x \in M$ a $n > n_0$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M .

311. Pomocou Weierstrassovho kritéria dokážte, že nasledujúce rady rovnomerne konvergujú na množine M :

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad M = \mathbf{R}; \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^{3/2}x^2}, \quad M = \mathbf{R};$$

⁹tj. rad $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$, kde $h_1 = g$, $h_n = f_{n-1}$ pre $n > 1$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}, \quad M = [1, \infty);$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{nx} \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right), \quad M = (0, \infty);$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, \quad M = \mathbf{R};$
6. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right), \quad M = [-a, a];$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}, \quad M = \mathbf{R};$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad M = [0, \infty);$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} \left(1 + \frac{1}{n} - x \right)^n, \quad M = [0, 1];$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x e^{-nx^2}}{\sqrt{n \ln^3(n+1)}}, \quad M = \mathbf{R};$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{x}/n)}{\sqrt{x^2 + n^2}}, \quad M = [0, \infty);$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}, \quad M = \mathbf{R}.$

Riešenie. 4. Z nerovností $|\sin u| \leq |u|$ pre $u \in \mathbf{R}$ a $\ln(1+u) \leq u$ pre $u > -1$ (pozri pr. I.353 a riešenie pr. I.352.2) vyplýva $\left| \sin \frac{1}{nx} \right| \leq \frac{1}{nx}$ a $\left| \ln \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right| = \ln \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \leq \frac{x}{\sqrt{n}}$ pre $x \in (0, \infty)$, odtiaľ

$$\left| \sin \frac{1}{nx} \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right| \leq \frac{1}{nx} \cdot \frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad x \in (0, \infty). \quad (4.3)$$

Pretože rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konverguje (pozri vetu 5 z odseku 3.2), vyplýva z nerovnosti (4.3) na základe Weierstrassovho kritéria rovnomerná konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{nx} \ln \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right)$ na intervale $(0, \infty)$.

7. Bude nás zaujímať konvergencia majorantného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \frac{x}{1 + n^4 x^2} \right|$ (pozri tiež poznámku 2 za vetou 4). Pretože funkcie $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^2}$ sú nepárne, platí $\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x)|$, na nájdenie čísla $\sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x)|$ stačí vyšetriť priebeh funkcie f_n na intervale $[0, \infty)$:

$$f'_n(x) = \left(\frac{x}{1 + n^4 x^2} \right)' = \frac{1 - n^4 x^2}{(1 + n^4 x^2)^2},$$

preto f_n rastie na $[0, 1/n^2]$ a klesá na $[1/n^2, \infty)$. Z rovností $f_n(0) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ vyplýva, že f_n je nezáporná na $[0, \infty)$. Preto

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x)| = f_n \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2n^2}.$$

Z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ (pozri vetu 5 z odseku 3.2) a z nerovnosti

$$\left| \frac{x}{1 + n^4 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^2}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N},$$

vyplýva podľa Weierstrassovho kritéria rovnomerná konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$ na \mathbf{R} .

312. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť monotónnych funkcií definovaných na intervale $[a, b]$, nech číselné rady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ absolútne konvergujú. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $[a, b]$. Dokážte!

313₀. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale $[0, 1]$ predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \in [0, 2^{-(n+1)}] \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{ak } x \in (2^{-(n+1)}, 2^{-n}) \\ 0, & \text{ak } x \in [2^{-n}, 1] \end{cases}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $[0, 1]$, ale nemožno ho tam majorizovať konvergentným číselným radom (tj. neexistuje konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ taký, že $|f_n(x)| \leq c_n$ pre $x \in [0, 1]$ a $n \in \mathbf{N}$).

Hovoríme, že postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na množine M ($\emptyset \neq M \subset \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$), ak platí

$$\exists K \geq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in M : |f_n(x)| \leq K.$$

Veta 5 (Abelovo kritérium). Nech postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovujú nasledujúcim podmienkam:

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M ;
2. postupnosť $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na množine M a pre každé $x \in M$ je postupnosť $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónna.

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ rovnomerne konverguje na množine M .

Veta 6 (Dirichletovo kritérium). Nech postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovujú nasledujúcim podmienkam:

1. postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je rovnomerne ohraničená na množine M ;
2. $g_n \rightarrow 0$ na M a pre každé $x \in M$ je postupnosť $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónna.

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ rovnomerne konverguje na množine M .

Poznámky. 1. Z viet 5 a 6 vyplývajú — ak za M zvolíme jednoprvkovú množinu — vety 13 a 14 z odseku 3.3.

2. Formuláciu Abelovho kritéria možno upraviť podobne ako sme upravili formuláciu Weierstrassovho kritéria (pozri vetu 4’):

Veta 5’. Nech postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovujú nasledujúcim podmienkam:

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M ;
2. existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že postupnosť $\{g_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na M a pre každé $x \in M$ je postupnosť $\{g_n(x)\}_{n=n_0}^{\infty}$ monotónna.

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ rovnomerne konverguje na množine M .

Rovnako možno upraviť aj formuláciu Dirichletovho kritéria.

314. Dokážte, že nasledujúce rady konvergujú rovnomerne na množine M :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, $M = (0, \infty)$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt[3]{n^2 + e^x}}$, $M = [-10, 10]$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$, $M = [0, 1]$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n + 1}$, $M = [1, \infty)$.

315. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak *Dirichletov rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n^x)$ konverguje rovnomerne na intervale $[0, \infty)$. Dokážte!

316. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich radov konvergujú rovnomerne a ktoré nerovnomerne na množine M :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n}$, $M = [-1, 3]$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $M = \mathbf{R}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x}\right)^n$, M je obor konvergenzie daného radu;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^2}$, $M = (0, \infty)$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $M = \mathbf{R}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin(1/nx)}{4 + \ln^2 nx}$, $M = (2, \infty)$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-nx}}{n}$, $M = [0, \infty)$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^6x^2} \sin nx$, $M = \mathbf{R}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $M = [0, \infty)$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ a) $M = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, kde $\pi > \varepsilon > 0$, b) $M = [0, 2\pi]$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+x}{n}$ a) $M = (0, 1)$, b) $M = (1, \infty)$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n^2} \sin \frac{x}{n^2}$ a) $M = [0, 1]$, b) $M = [0, \infty)$;
13. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{1}{1+3^n x}$ a) $M = [0, \delta]$, b) $M = (\delta, \infty)$;
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^4} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$, $M = \mathbf{R}$.

4.2 Niektoré vlastnosti rovnomerne konvergentných postupností a radov funkcií

Veta 7. Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod množiny M . Ak $f_n \xrightarrow{\rightrightarrows} f$ na M a pre každé $n \in \mathbf{N}$ ¹⁰ existuje konečná $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) =: A_n$, tak existuje konečná $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

(je teda oprávnená nasledovná zámena poradia limit:

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \text{).}$$

Dôsledok. Ak $f_n \xrightarrow{\rightrightarrows} f$ na M a každá z funkcií f_n , $n \in \mathbf{N}$, je spojitá na množine M , tak je na množine M spojitá aj funkcia f .

V prípade radov funkcií možno tieto tvrdenia sformulovať nasledovne:

Veta 7'. Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod množiny M . Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na M a pre každú z funkcií f_n ($n \in \mathbf{N}$) existuje konečná $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) =: A_n$ ¹¹, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konverguje¹² a

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

¹⁰namiesto „pre každé $n \in \mathbf{N}$ “ sme mohli predpokladať aj „počínajúc niektorým n_0 “

¹¹na rozdiel od vety 7 tu už nestačí predpokladať „počínajúc niektorým n_0 existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ “

¹²konvergenca radu $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ vyplýva napr. aj z úvah použitých pri riešení pr. 309.1

(je teda oprávnená zámena poradia znaku sumácie a limity:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \quad .$$

Dôsledok. Ak každá z funkcií f_n , $n \in \mathbf{N}$, je spojitá na množine M a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na M , tak funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je spojitá na množine M .

317. Nájdite limity:

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} ; & 2. \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n + 1} ; \\ 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n(n+1)x^2} ; & 4. \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) . \end{array}$$

318. Určite definičný obor nasledujúcich funkcií a vyšetrite ich spojitosť:

$$\begin{array}{ll} 1. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2} ; & 2. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x e^{-n^2 x} ; \\ 3. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}} ; & 4. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x^2} \cos nx ; \\ 5. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n} \right)^n ; & 6. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} . \end{array}$$

Riešenie. 5. Na nájdenie definičného oboru funkcie f (tj. na vyšetrenie bodovej konvergenencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} (x+1/n)^n$) použijeme najprv Cauchyho kritérium (veta 7' z odseku 3.3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(x + \frac{1}{n} \right)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x + \frac{1}{n} \right| = |x| ,$$

preto daný rad konverguje pre $x \in (-1, 1)$ a diverguje pre $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Pre $x = 1$ a $x = -1$ nie je splnená nutná podmienka konvergenencie ($\lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^n = e \neq 0$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1+1/n)^n$ neexistuje, pretože pre $a_n = (-1+1/n)^n = (-1)^n (1-1/n)^n$ je $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1/e$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = -1/e$). Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (x+1/n)^n$ teda konverguje len pre $x \in (-1, 1)$, preto $D(f) = (-1, 1)$.

Ukážeme teraz, že funkcia f je spojitá v každom bode $a \in (-1, 1)$ (tj. že f je spojitá). Nech je teda dané $a \in (-1, 1)$; zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $-1 < a - \varepsilon < a + \varepsilon < 1$. Na intervale $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} (x+1/n)^n$ podľa Weierstrassovho kritéria rovnomerne ($|(x+1/n)^n| < (|a| + \varepsilon + 1/n)^n$ pre $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ¹³, rad $\sum_{n=1}^{\infty} (|a| + \varepsilon + 1/n)^n$ konverguje podľa Cauchyho kritéria) a každá z funkcií $f_n(x) = (x+1/n)^n$, $n \in \mathbf{N}$, je tam spojitá, preto podľa dôsledku vety 7' je na intervale $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ spojitá aj funkcia $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Pretože a je vnútorný bod intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, vyplýva zo spojitosti funkcie f na intervale $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ spojitosť funkcie f v bode a ¹⁴.

Uvedená úvaha platí pre každé $a \in (-1, 1)$, preto je funkcia f spojitá v každom bode intervalu $(-1, 1) = D(f)$.

Poznámky 1. Na intervale $(-1, 1)$ konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} (x+1/n)^n$ nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergenencie z pr. 307.1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (-1, 1)} \left| \left(x + \frac{1}{n} \right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \neq 0 \quad ,$$

¹³zrejme $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (-(|a| + \varepsilon), |a| + \varepsilon)$ a pre $x \in (-(|a| + \varepsilon), |a| + \varepsilon)$ — tj. pre $|x| < |a| + \varepsilon$ — iste platí $|(x+1/n)^n| = |x+1/n|^n \leq (|x|+1/n)^n < (|a| + \varepsilon + 1/n)^n$

¹⁴túto úvahu možno sformulovať nasledovne: ak a je vnútorný bod množiny $G \subset D(f)$ a funkcia f je spojitá na množine G , tak f je spojitá v bode a (pozor: hoci toto tvrdenie pôsobí úplne primitívnym dojmom, je v ňom predpoklad „ a je vnútorný bod množiny G “ podstatný)

preto pri vyšetřovaní spojivosti funkcie f nemôžeme použiť dôsledok vety 7' na celom intervale $(-1, 1)$ „naraz“.

2. Na základe myšlienok z riešenia pr. 318.5 možno dôsledok vety 7' zovšeobecniť:

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na množine M , ak pre každý bod $a \in M$ existuje také jeho okolie $O(a)$, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $M \cap O(a)$.

Platí toto tvrdenie: *Ak každá z funkcií f_n , $n \in \mathbf{N}$, je spojitá na množine M a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na M , tak funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je spojitá na množine M .*

319. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií spojitých na intervale $[a, b]$, nech $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Ak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť prvkov z $[a, b]$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$. Dokážte!

320. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií rovnomerne spojitých na množine M . Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M , tak f je rovnomerne spojitá na M . Dokážte!

321. Môže postupnosť nespojitých funkcií rovnomerne konvergovať

1. k spojitaj funkcii?

2. k nespojitaj funkcii?

322₀. 1. Ukážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} (nxe^{-nx} - (n-1)e^{-(n-1)x})$ konverguje nerovnomerne na $[0, 1]$, ale jeho súčet je spojitý na $[0, 1]$.

2. Ukážte, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{x}, & \text{ak } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \\ 0, & \text{ak } x \notin \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \end{cases},$$

je postupnosť spojitých funkcií, ktorá konverguje nerovnomerne na \mathbf{R} , ale jej limita je spojitá funkcia.

323₀. 1. Uveďte príklad postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na intervale $[0, 1]$, ktorá konverguje na $[0, 1]$ nerovnomerne k funkcii f , pričom

a) každá z funkcií f_n , $n \in \mathbf{N}$, je spojitá a funkcia f je nespojitá;

b) každá z funkcií f_n , $n \in \mathbf{N}$, je nespojitá a funkcia f je spojitá;

c) každá z funkcií f_n , $n \in \mathbf{N}$, aj funkcia f sú nespojité.

2. Riešte tú istú úlohu pre prípad radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a jeho súčtu.

Veta 8. Nech $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ a každá z funkcií f_n , $n \in \mathbf{N}$, je riemannovsky integrovateľná na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}[a, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

(teda je oprávnená záměna poradia integrálu a limity:

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad).$$

Veta 8'. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných a riemannovsky integrovateľných na intervale $[a, b]$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $[a, b]$, tak aj funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je riemannovsky integrovateľná na $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right). \quad (4.4)$$

Ak funkcie f_n , $n \in \mathbf{N}$, aj funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sú riemannovsky integrovateľné na $[a, b]$ a platí rovnosť (4.4), hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ možno na intervale $[a, b]$ integrovať člen po člene.

324. Vypočítajte integrály:

$$1. \int_{\ln 2}^{\ln 5} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} dx ; \quad 2. \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)} dx .$$

325. Na základe výpočtu integrálov $\frac{1}{2} \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^2 dt$ nájdite súčet radu

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots .$$

326. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných a riemannovsky integrovateľných na intervale $[a, b]$, nech množina $M \subset [a, b]$ má Jordanovu mieru nula. Ak súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je ohraničená funkcia f a jeho konvergencia je rovnomerná na množine $[a, b] \setminus M$, tak ho možno na intervale $[a, b]$ integrovať člen po člene. Dokážte!

327. 1. Ukážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{2(n+1)} - x^{2n})$ konverguje nerovnomerne na $[-1, 1]$, ale možno ho tam integrovať člen po člene.

2. Ukážte, že hoci všetky členy radu $(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (n(n+1)x^{n-1} - (n-1)nx^{n-2})$ aj jeho súčet sú spojité na intervale $[0, 1]$, nemožno tento rad na intervale $[0, 1]$ integrovať člen po člene.

328₀. Ukážte, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$

1. konverguje na intervale $[0, 1]$ bodovo pre každé $\alpha \in \mathbf{R}$;
2. konverguje na intervale $[0, 1]$ rovnomerne len pre $\alpha < 1$;

ale

3. rovnosť $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$ platí pre všetky $\alpha < 2$.

Veta 9. Nech definičným oborom funkcií f_n , $n \in \mathbf{N}$, aj ich prvých derivácií je ohraničený interval I . Ak

1. postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje aspoň v jednom bode $a \in I$

a

2. postupnosť derivácií $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na I

tak

a) postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na I

a

b) funkcia $g = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ je deriváciou funkcie $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Ak funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a každá z funkcií f_n , $n \in \mathbf{N}$, je diferencovateľná v bode $a \in \mathbf{R}$ (na intervale I) a platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' (a) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(a)$$

$$\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' (x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad x \in I \right)^{15},$$

hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ možno v bode a (na intervale I) derivovať člen po člene.

Pre prípad funkcionálnych radov možno vetu 9 sformulovať nasledovne:

Veta 9[']. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií diferencovateľných na ohraničenom intervale I . Ak

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje aspoň v jednom bode $a \in I$

a

2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ konverguje rovnomerne na I ,

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na I a možno ho tam integrovať člen po člene.

¹⁵ak $I = [c, d]$, $I = [c, d)$ alebo $I = (c, d]$ tak v bode c , resp. d ide o príslušné jednostranné derivácie

329. Dokážte, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na množine M :

10. $f_n(x) = \cos \frac{1}{nx}$, $M = [1, 2]$;

20. $f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right)$, $M = [a, b]$, $a > 0$;

3. $f_n(x) = n \operatorname{arctg} \frac{1}{nx}$, $M = [1, 10]$;

40. $f_n(x) = n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}} \right)$, $M = [0, 1]$.

Riešenie. 3. Využijeme tvrdenie a) vety 9; množina $M = [1, 10]$ je ohraničený interval, postupnosť $\left\{ n \operatorname{arctg} \frac{1}{nx} \right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje iste v bode $x = 1 \in M$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/n)}{1/n} = 1 \quad {}^{16}; \quad (4.5)$$

postupnosť $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj. $\left\{ \frac{n^2 x^2}{1 + n^2 x^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ¹⁷, konverguje podľa vety 2 na intervale $[1, 10]$ rovnomerne k funkcii $g(x) \equiv 1$, $x \in [1, 10]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1, 10]} |f'_n(x) - g(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1, 10]} \frac{1}{1 + n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + n^2} = 0 .$$

Sú teda splnené všetky predpoklady vety 9, podľa jej tvrdenia a) postupnosť $\left\{ n \operatorname{arctg} \frac{1}{nx} \right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na intervale $[1, 10]$.

Poznámka. Podľa tvrdenia b) vety 9 je funkcia $g(x) \equiv 1$, $x \in [1, 10]$, deriváciou funkcie $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n|_{[1, 10]}$, preto predpis funkcie f musí mať tvar $f(x) = x + C$. Pretože — ako vyplýva z rovnosti (4.5) — $f(1) = 1$, je $C = 0$. Teda $n \operatorname{arctg} \frac{1}{nx} \xrightarrow{n} x$ na $[1, 10]$.

330. Dokážte, že nasledujúce funkcie sú diferencovateľné v každom bode svojho definičného oboru a ich derivácia je spojitá funkcia:

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{5/2}}$;

2. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$;

3. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 \ln^2(n+1)}$;

4. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}$.

Riešenie. 4. Definičným oborom funkcie $f_n(x) := \frac{(-1)^n x}{n + x}$ je množina $\mathbf{R} \setminus \{-n\}$, pre každé $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n) = \mathbf{R} \setminus \{-n; n \in \mathbf{N}\}$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}$ konverguje podľa Leibnizovho kritéria¹⁸, preto $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-n; n \in \mathbf{N}\} = (-1, \infty) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n - 1, -n)$.

¹⁶pripomeňme, že $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$

¹⁷keby sme sa chceli striktnie pridržať znenia vety 9, v ktorej je definičným oborom funkcií f_n a f'_n , $n \in \mathbf{N}$, interval I , tj. v našom prípade interval $[1, 10]$, mali by sme vlastne uvažovať postupnosti $\{f_n|_{[1, 10]}\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\{f'_n|_{[1, 10]}\}_{n=1}^{\infty}$

¹⁸pozri vetu 12' z odseku 3.3, pre dané x je postupnosť $\left\{ \frac{n}{n+x} \right\}_{n=n_0}^{\infty}$ monotónna, ak $n_0 + x > 0$

Pomocou vety 9' teraz ukážeme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$ možno derivovať člen po člene v každom bode $a \in D(f)$. Nech je teda dané $a \in D(f)$; zvolíme $\varepsilon > 0$ tak, aby $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset D(f)$. Na ohraničenom intervale $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ sú splnené všetky predpoklady vety 9':

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje dokonca v každom bode intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (pretože $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset D(f)$);
2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{(1+x/n)^2}$ konverguje na $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ rovnomerne podľa Abelovho kritéria

(pozri vetu 5'; rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje rovnomerne na $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ¹⁹ a postupnosť $\left\{ \frac{1}{(1+x/n)^2} \right\}_{n=n_0}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená a monotónna pre každé $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, ak $n_0 > -a - 1$).

Podľa vety 9' možno teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ derivovať na intervale $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ člen po člene:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(x+n)^2}, \quad x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon). \quad (4.6)$$

Z diferencovateľnosti funkcie f na intervale $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ vyplýva jej diferencovateľnosť v bode a ²⁰, hodnotu $f'(a)$ nájdeme dosadením $x = a$ do (4.6). Keďže tieto úvahy platia pre každé $a \in D(f)$, má funkcia f deriváciu v každom bode svojho definičného oboru a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(x+n)^2}. \quad (4.7)$$

Spojitosť funkcie f' dokážeme podobne ako v pr. 318.5: každá z funkcií $f'_n(x) = \frac{(-1)^n n}{(x+n)^2}$ je spojitá na intervale $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (čísla a , ε majú ten istý význam ako predtým) a — ako sme už dokázali — rad $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ konverguje rovnomerne na $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; preto funkcia $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ je podľa dôsledku vety 7' spojitá na $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, a teda iste spojitá v bode a . Keďže a bol ľubovoľný bod množiny $D(f) = D(f')$, je funkcia f' spojitá v každom bode svojho definičného oboru.

Poznámky. 1. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{(1+x/n)^2}$ konverguje rovnomerne na každom z intervalov $(-1, \infty)$, $(-2, -1)$, \dots , $(-n-1, -n)$, \dots (možno to dokázať pomocou Abelovho kritéria rovnako ako v riešení pr. 330.4). Na ohraničených intervaloch $(-2, -1)$, $(-3, -2)$, \dots , $(-n-1, -n)$, \dots sú preto splnené všetky predpoklady vety 9', na každom z týchto intervalov možno teda rovnosť (4.7) dokázať pre všetky jeho prvky „naraz“. Na základe vety 9' však túto rovnosť nemôžeme dokázať „naraz“ pre všetky prvky intervalu $(-1, \infty)$, pretože $(-1, \infty)$ je neohraničená množina.

2. Funkcia $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$ je spojitá (pretože má konečnú deriváciu v každom bode svojho definičného oboru); vyšetříme teraz charakter jej bodov nespojitosti, ktorými sú všetky prvky množiny $\{-n; n \in \mathbf{N}\}$. Nech je dané $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$; napíšme funkciu f ako súčet troch funkcií:

$$f = \sum_{n=1}^{k-1} f_n + f_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n.$$

Každá z funkcií f_n , $n \in \mathbf{N} \setminus \{k\}$, je spojitá na $(-k-1, -k+1)$, preto je na $(-k-1, -k+1)$ spojitá aj funkcia $\sum_{n=1}^{k-1} f_n$ (ako súčet konečného počtu funkcií spojitých na $(-k-1, -k+1)$); zo spojitosti funkcií $f_n|_{(-k-1, -k+1)}$, $n > k$, a z rovnomernej konvergencie radu $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n$ na $(-k-1, -k+1)$ (tá vyplýva z Weierstrassovho kritéria alebo z vety 9') vyplýva podľa dôsledku vety 7' spojitosť funkcie $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n$ na $(-k-1, -k+1)$. Keďže funkcie $\sum_{n=1}^{k-1} f_n$ a $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n$ sú spojité na $(-k-1, -k+1)$, je iste $\lim_{x \rightarrow -k} (\sum_{n=1}^{k-1} f_n(x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x))$ konečná; súčasne

$$\lim_{x \rightarrow -k+} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -k+} \frac{(-1)^k x}{k+x} = \begin{cases} -\infty, & \text{ak } k \text{ je párne} \\ \infty, & \text{ak } k \text{ je nepárne} \end{cases},$$

¹⁹pozri poznámku 6

²⁰pri tejto úvahe využívame, že a je vnútorný bod intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

$$\lim_{x \rightarrow -k-} f_k(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ak } k \text{ je párne} \\ -\infty, & \text{ak } k \text{ je nepárne} \end{cases} .$$

Preto

$$\lim_{x \rightarrow -k+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -k+} \left[\left(\sum_{n=1}^{k-1} f_n(x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right) + f_k(x) \right] = \begin{cases} -\infty, & \text{ak } k \text{ je párne} \\ \infty, & \text{ak } k \text{ je nepárne} \end{cases} ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -k-} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ak } k \text{ je párne} \\ -\infty, & \text{ak } k \text{ je nepárne} \end{cases} ,$$

teda $-k$ je bod nespojitosti 2. druhu. Podobne možno postupovať pre $k = 1$.

331. 1₀. Dokážte nasledujúce tvrdenie: Nech funkcie $f_n, n \in \mathbf{N}$, sú k -krát diferencovateľné na ohraničenom intervale I ($k \in \mathbf{N}$). Ak

(i) každý z radov $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)}$, $m = 0, 1, \dots, k$, konverguje aspoň v jednom bode intervalu I

a

(ii) rad k -tych derivácií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ konverguje rovnomerne na I ,

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na intervale I a možno ho tam k -krát derivovať člen po člene (tj. pre $m = 1, \dots, k$ platí rovnosť $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)}(x)$, $x \in I$; ak $I = [c, d]$, $I = [c, d)$ alebo $I = (c, d]$, ide pre $x = c$, resp. $x = d$ o príslušné jednostranné derivácie).

2. Dokážte, že nasledujúce funkcie sú spojitely diferencovateľné:

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$;

b₀) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.

332. Ak každá z funkcií f_n , $n \in \mathbf{N}$, má primitívnu funkciu na intervale $[a, b]$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$, tak f má tiež primitívnu funkciu na $[a, b]$. Dokážte!

337. Rozhodnite o pravdivosti týchto tvrdení: Nech funkcie $f_n, n \in \mathbf{N}$, sú diferencovateľné na neohraničenom intervale I , nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje rovnomerne na I a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje aspoň v jednom bode $a \in I$. Potom

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na I ;

2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ možno na intervale I derivovať člen po člene.

334. 1₀. Ukážte, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} nx$, konverguje na \mathbf{R} rovnomerne k diferencovateľnej funkcii f , ale $f'(1) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(1)$.

2. Zostrojte postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ diferencovateľných funkcií a funkciu $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ tak, aby $f_n \rightrightarrows f$ na $[-1, 1]$, a pritom neexistovala $f'(0)$.

4.3 Mocninové rady

4.3.1 Polomer a interval konvergenzie mocninového radu. Základné vlastnosti mocninových radov

Rad funkcií (premennej x), ktorý má tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n , \tag{4.8}$$

kde $a \in \mathbf{R}$ a $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel, sa nazýva mocninový (potenčný) rad (so stredom a). Čísla a_n , $n = 0, 1, \dots$, sa nazývajú koefficienty radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ ²¹.

²¹pri niektorých zápisoch členy s nulovými koefficientami „vypadnú“; napr. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n-1}$ je zápis mocninového radu so stredom 0, zodpovedajúceho postupnosti koefficientov $0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, \dots$

Veta 10. Ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ konverguje v bode $t_0 \neq 0$, tak konverguje absolútne v každom bode intervalu $(-|t_0|, |t_0|)$.

Dôsledok. Pre mocninový rad (4.8) nastane práve jedna z nasledujúcich možností:

- existuje $R > 0$ tak, že rad (4.8) konverguje absolútne v každom bode $x \in (a - R, a + R)$ a diverguje pre $x \in (-\infty, a - R) \cup (a + R, \infty)$;
- rad (4.8) konverguje absolútne na \mathbf{R} ;
- rad (4.8) konverguje len v bode a .

Ak nastane prípad a), nazýva sa číslo R polomer konvergence radu (4.8) a interval $(a - R, a + R)$ interval konvergence radu (4.8); v prípade b) sa nazýva polomerom konvergence radu (4.8) číslo $R = \infty$ a jeho intervalom konvergence interval $(-\infty, \infty)$; v prípade c) za polomer konvergence radu (4.8) považujeme číslo $R = 0$ ²².

Pri hľadani polomeru konvergence R sa najčastejšie používajú nasledujúce tvrdenia²³:

Veta 11 (Cauchy, Hadamard). Nech $r := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ($\in \mathbf{R}^*$). Potom pre polomer konvergence R radu (4.8) platí:

$$R = \begin{cases} 1/r, & \text{ak } r \in \mathbf{R}^+ \\ \infty, & \text{ak } r = 0 \\ 0, & \text{ak } r = \infty \end{cases}.$$

Veta 12. Ak počínajúc niektorým n_0 je $a_n \neq 0$ a existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ ($\in \mathbf{R}^*$), tak pre polomer konvergence R mocninového radu (4.8) platí

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

335. Nájdite (pokiaľ existuje) interval konvergence mocninového radu:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x+1)^n$;

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-2)^n}{4^{n+2}}$;

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+5} \right)^{n^2} x^n$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$;

5. $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n$, $a > 0$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n} (x-3)^n$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n} \right)^n$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{4n}}{n^2}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(3\pi n/4)}{n} x^n$;

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin \frac{n^2}{2^n} \right) (x-3)^n$.

336. Nájdite obor konvergence mocninového radu:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$;

4. $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n!}$;

²²v prípade a) sa nemusí obor konvergence D radu (4.8) zhodovať s jeho intervalom konvergence — rad (4.8) môže totiž konvergovať aj v niektorom z bodov $a - R$, $a + R$, prípadne v oboch — vo všeobecnosti platia len inklúzie $(a - R, a + R) \subset D \subset [a - R, a + R]$

²³tie sú odvodené z Cauchyho a d'Alembertovho kritéria (vety 6' a 7' z odseku 3.3), pri hľadaní R možno samozrejme používať aj ďalšie kritériá z kapitoly 3

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n, \quad a > 0;$$

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(x+1)^n;$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2};$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)x^n, \quad a > 1;$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n;$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n;$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n;$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a \geq b > 0;$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n;$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n.$$

337₀. Pre dané $R \in \mathbf{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ zostrojte mocninový rad s polomerom konvergencie R .

338. Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný rad. Nájdite polomer konvergencie R radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

339. 1. Nech polomery konvergencie radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sú R_1 a R_2 . Aký je vzťah medzi R_1 , R_2 a polomerom konvergencie R radu $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$, ak

a) $R_1 > R_2$?

b) $R_1 = R_2$?

2. Nech polomer konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je $R \in \mathbf{R}_0^+ \cup \{\infty\}$. Aký je polomer konvergencie r radu

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k x^n \quad (k \in \mathbf{N})$?

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn} \quad (k \in \mathbf{N})$?

3. Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť nenulových čísel a existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, nech $k, m \in \mathbf{N}$. Potom pre polomer konvergencie R radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn+m}$ platí

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}.$$

Dokážte!

340₀. Uveďte príklad mocninového radu, ktorého oborom konvergencie je interval

1. $(-1, 1)$;

2. $(-1, 1]$;

3. $[-1, 1)$;

4. $[-1, 1]$.

341. 1. Ak pre polomer konvergencie R radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ platí $R > 1$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dokážte!

2. Ak pre polomer konvergencie R radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ platí $R < 1$, tak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená postupnosť. Dokážte!

3₀. Uveďte príklad mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ s polomerom konvergencie $R = 1$ takého, že

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Veta 13. Nech rad (4.8) má nenulový polomer konvergence R , nech $r \in (0, R)$. Potom tento rad konverguje rovnomerne na intervale $[a - r, a + r]$.

Veta 14. Ak rad (4.8) má polomer konvergence $R \in \mathbf{R}^+$ a konverguje v bode $a + R$ (v bode $a - R$), tak konverguje rovnomerne na intervale $[a, a + R]$ (na intervale $[a - R, a]$)²⁴.

Veta 15. Rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ majú rovnaký polomer konvergence.

Z týchto viet možno na základe viet 8', 9' a dôsledku vety 7' odvodiť nasledujúce tvrdenie:

Veta 16. Nech rad (4.8) má nenulový polomer konvergence R . Potom

a) Funkcia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ je spojitá v každom bode oboru konvergence D radu (4.8)²⁵;

b) Rad (4.8) možno integrovať člen po člene na každom intervale $[c, d] \subset D$, špeciálne

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-a)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n(t-a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}, \quad x \in D \quad ^{26},$$

c) V každom bode $x \in I$, kde I je interval konvergence radu (4.8), má funkcia f derivácie všetkých rádov; hodnotu $f^{(k)}(x)$ ($k \in \mathbf{N}$, $x \in I$) možno nájsť k -násobným derivovaním radu (4.8) člen po člene:

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right)' = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x-a)^{n-k}, \quad x \in I, k \in \mathbf{N}. \quad (4.9)$$

Ak $R \in \mathbf{R}^+$ a rad $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x-a)^{n-k}$ konverguje pre $x = a + R$ ($x = a - R$), tak funkcie $f, f', \dots, f^{(k)}$ sú definované aj v bode $a + R$ (v bode $a - R$) a v tomto bode platí tiež rovnosť (4.9).

342. Integrovaním člen po člene nájdite súčty radov:

- | | |
|---|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$; | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$; |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{2^n} x^n$; | 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{3^{n+2}}$. |

Riešenie. 1. Polomer konvergence daného radu je $R = 1$ (na jeho výpočet sme mohli použiť vetu 11 ($R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = 1$) aj vetu 12 ($R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$)); v bodoch $x = 1$ a $x = -1$ (tj. v krajných bodoch intervalu konvergence $(-1, 1)$) rad $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ diverguje (nie je splnená nutná podmienka konvergence). Definičným oborom funkcie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ je teda interval $(-1, 1)$.

Zapíšme predpis funkcie f v tvare

$$f(x) = xg(x),$$

kde

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ nájdeme integrovaním člen po člene: podľa tvrdenia b) vety 16 je funkcia $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ primitívna k funkcii g , pritom súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ (ktorý je geometrický pre každé $x \in \mathbf{R}$) už poznáme:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

²⁴a — ako vyplýva z vety 13 — na každom intervale $[a-r, a+R]$, $-R < r < R$ ($[a-R, a+r]$, $-R < r < R$)

²⁵tj. v každom bode svojho definičného oboru, čo znamená, že f je spojitá funkcia

²⁶pripomeňme, že podľa vety 14 z odseku 2.3 je F primitívna funkcia k funkcii f , pričom $F(a) = 0$

Odtiaľ dostávame

$$g(x) = G'(x) = \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1),$$

a teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xg(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

Poznámka. V uvedenom postupe sme mohli namiesto integrovania člen po člene použiť samozrejme aj derivovanie člen po člene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \stackrel{(*)}{=} x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1),$$

prítom rovnosť $(*)$ vyplýva z tvrdenia c) vety 16.

343. Derivovaním člen po člene nájdite súčty radov:

$$\begin{array}{ll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}; & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+1}x^{4n-1}}{4n+1}; \\ 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n(2n-1)}; & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}. \end{array}$$

Riešenie. 4. Polomer konvergencie daného radu je $R = 1$, pričom v bodoch $x = 1$ a $x = -1$ tento rad konverguje. Definičným oborom funkcie $f(x) = \frac{x^n}{n(n+2)}$ je teda interval $[-1, 1]$.

Aby sme našli súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$, budeme sa podobne ako pri riešení pr. 342.1 snažiť postupnými úpravami dospieť k mocninovému radu, ktorého súčet už poznáme (zatiaľ sú pre nás takými radmi len geometrické rady, neskôr — s Taylorovými radmi — sa počet mocninových radov, ktorých súčty poznáme, zväčší).

Pretože $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$, platí pre $x \in [-1, 1)$ rovnosť

$$f(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) - f_2(x)),$$

kde

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

(uvedená rovnosť nemôže platiť pre $x = 1$, pretože v tomto bode rady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ divergujú).

Súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ už môžeme nájsť derivovaním člen po člene: podľa tvrdenia c) vety 16 pre $x \in (-1, 1)$ ($(-1, 1)$ je interval konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$) platí

$$f_1'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Preto pre $x \in (-1, 1)$ je

$$f_1(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C;$$

pre hľadajú funkciu f_1 platí $f_1(0) = 0$ (hodnotu $f_1(0)$ sme vypočítali dosadením $x = 0$ do radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$),
odtiaľ $C = 0$ a

$$f_1(x) = -\ln(1-x), \quad \text{ak } x \in (-1, 1) \quad 27. \quad (4.10)$$

Teraz hľadáme súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$: pre $x \in [-1, 1)$, $x \neq 0$ platí

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} g(x),$$

kde

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2},$$

a súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$ už môžeme nájsť derivovaním člen po člene: pre $x \in (-1, 1)$ (tento interval je intervalom konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$) platí

$$g'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x} = -x - 1 + \frac{1}{1-x},$$

preto

$$g(x) = \int \left(-x - 1 + \frac{1}{1-x} \right) dx = -\frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x) + C, \quad \text{ak } x \in (-1, 1),$$

a pretože z rovnosti $g(0) = 0$ vyplýva $C = 0$, je

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x), \quad \text{ak } x \in (-1, 1) \quad 28$$

a

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} g(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}, \quad \text{ak } x \in (-1, 1), x \neq 0. \quad (4.11)$$

Pre $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ teda platí

$$f(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) - f_2(x)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{x^2} \right). \quad (4.12)$$

Zostáva nájsť súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ pre $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1$; začnime prípadom $x = -1$. Podľa tvrdenia a) vety 16 je funkcia $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ spojitá v každom bode svojho definičného oboru, ktorým

²⁷mohli sme tiež použiť rovnosť $f_1(x) = f_1(0) + \int_0^x f'(t) dt$, pri hľadaní predpisu funkcie f_1 na $x \in (-1, 1)$ sme mohli rovnako dobre použiť aj integrovanie člen po člene:

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$$

²⁸rovnako aj pri hľadaní predpisu funkcie g pre $x \in (-1, 1)$ sme mohli použiť tvrdenie b) vety 16:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n+1} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1} \right) dt = \int_0^x \frac{t^2}{1-t} dt = -\frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x)$$

je interval $[-1, 1]$, preto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)} = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{(1-x^2) \ln(1-x)}{x^2} \right);$$

pretože elementárna funkcia $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{(1-x^2) \ln(1-x)}{x^2} \right)$ je spojitá v bode -1 , je jej limitou v tomto bode funkčná hodnota; to znamená, že rovnosť (4.12) platí aj pre $x = -1$.

Rovnako zo spojitosti funkcie f v bode 1 vyplýva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right) - \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^2} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x) \right) = \frac{3}{4} - 2 \cdot 0 = \frac{3}{4}$$

(pri výpočte $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x)$ sme použili l'Hospitalovo pravidlo, ostatné limity sa nájdu dosadením)²⁹.

Zostal prípad $x = 0$, v ktorom sa zaoberáme bez výpočtu limity (hoci samozrejme podľa tvrdenia a) vety

16 aj tu platí $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$): dosadením $x = 0$ do radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ dostávame $f(0) = 0$ ³⁰.

Celkovo teda

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{(1-x^2) \ln(1-x)}{x^2} \right), & \text{ak } x \in [-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0, & \text{ak } x = 0 \\ \frac{3}{4}, & \text{ak } x = 1 \end{cases}.$$

Poznámky. 1. Úvahu, ktorú sme použili na dôkaz rovnosti (4.12) v bode $x = -1$, možno sformulovať nasledovne:

Ak pre $x \in (-a, a)$ platí rovnosť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$, pričom funkcia f je spojitá v bode a (v bode $-a$) a rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v bode a (v bode $-a$), tak uvedená rovnosť platí aj pre $x = a$ ($x = -a$).

2. V riešení pr. 343.4 sme uviedli súčty radov $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ (ktoré konvergujú na intervale $[-1, 1)$), len pre $x \in (-1, 1)$ (rovnosť (4.10)), resp. $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ (rovnosť (4.11)). Z tvrdenia uvedeného v poznámke 1 vyplýva, že rovnosti (4.10) a (4.11) platia aj pre $x = -1$, okrem toho zrejme $f_2(0) = 0$.

344. Nájdite súčty číselných radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

²⁹hodnoty $f(1)$ a $f(-1)$ sme v tomto prípade mohli nájsť aj bez použitia vety 16: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$, preto n -tý súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ je $S_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$, $n \in \mathbf{N}$, odtiaľ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{4}$; analogicky možno postupovať pri dôkaze rovnosti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)} = -\frac{1}{4}$

³⁰snaživý čitateľ si môže preveriť platnosť rovnosti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{(1-x^2) \ln(1-x)}{x^2} \right) = 0$

Riešenie. 2. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ konverguje podľa Leibnizovho kritéria a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = g(1),$$

kde funkcia g je daná predpisom

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}.$$

Z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}$ v bode 1 vyplýva podľa vety 10 jeho konvergencia na intervale $(-1, 1)$ ³¹. Na tomto intervale možno súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}$ nájsť na základe vety 16: pre $x \in (-1, 1)$ je

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n+1} t^{2n-2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} t^{2n-2} \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x.$$

Funkcia g je podľa tvrdenia a) vety 16 spojitá v každom bode oboru konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}$, teda aj v bode 1, preto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$$

(na dôkaz rovnosti $g(1) = \operatorname{arctg} 1$ sme mohli použiť aj tvrdenie z poznámky 1 za riešením pr. 343.4).

Poznámka. Postup, ktorý sme použili pri riešení pr. 344.2, sa spravidla formuluje ako samostatné tvrdenie:

Ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

345. 1. Uveďte príklad mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, pre ktorý existuje konečná $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ale rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

2. Nech $a_n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$. Ak existuje konečná $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: S$, tak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$. Dokážte!

346. Nech číselné rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ aj ich Cauchyho súčin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergujú, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$. Potom $C = AB$. Dokážte!

4.3.2 Taylorove rady

Nech funkcia f má v bode $a \in \mathbf{R}$ derivácie všetkých rádov. Potom mocninový rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

sa nazýva Taylorov rad funkcie f v bode a . Ak $a = 0$, používame spravidla názov Maclaurinov rad funkcie f . Funkcia f sa nazýva analytická v bode a , ak jej Taylorov rad konverguje na niektorom okolí $O(a)$ bodu a k funkcii $f|O(a)$.

³¹interval $(-1, 1)$ je v tomto prípade aj intervalom konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}$, vyplýva to z riešenia pr. 338

Veta 17. Ak mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konverguje na niektorom okolí $O(a)$ bodu $a \in \mathbf{R}$ k funkcii $f|O(a)$, tak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ je Taylorov rad funkcie f (a funkcia f je teda analytická v bode a)³².

Platia naledujúce rovnosti:

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty); \quad 2. \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$3. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad {}^{33}, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad {}^{34}; \quad 4. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1];$$

$$5. (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad x \in I,$$

$$\text{kde } I = \begin{cases} (-\infty, \infty), & \text{ak } m \in \mathbf{N} \\ [-1, 1], & \text{ak } m \in (0, \infty) \setminus \mathbf{N} \\ (-1, 1], & \text{ak } m \in (-1, 0) \\ (-1, 1), & \text{ak } m \in (-\infty, -1] \end{cases},$$

špeciálne

$$5.1. \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1);$$

$$5.2. \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad x \in [-1, 1);$$

prítom intervaly, na ktorých rovnosti 1-5 a 5.1,2 platia, sú obormi konvergenie príslušných mocninových radov.

347. 1. Ak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je Maclaurinov rad párnej (nepárnej) funkcie, tak $a_{2n+1} = 0$ ($a_{2n} = 0$) pre všetky $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Dokážte!

2. Ak $\varepsilon > 0$ a pre každé $x \in (0, \varepsilon)$ platí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$, tak $a_n = 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Dokážte!

348. Ukážte, že nasledujúce funkcie sú analytické v bode 0 a určite obor konvergenie ich Maclaurinových radov:

$$1. f(x) = a^x, \quad a > 0, a \neq 1;$$

$$2. f(x) = \operatorname{ch} ax;$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}, & \text{ak } x \neq 0 \\ 1, & \text{ak } x = 0 \end{cases};$$

$$4. f(x) = x \sin 2x \cos 3x;$$

$$5. f(x) = \sin^3 x;$$

$$6. f(x) = \frac{1}{a+bx}, \quad ab \neq 0;$$

$$7. f(x) = \frac{5x-4}{x+2};$$

$$8. f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3};$$

$$9. f(x) = \frac{1}{1+x+x^2};$$

$$10. f(x) = \frac{x}{(1-x^3)^2};$$

$$11. f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad a > 0;$$

$$12. f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

³²Z vety 17 vyplýva, že definíciu funkcie analytickej v bode sme mohli vysloviť v tejto prirodzenejšej podobe: funkcia f sa nazýva analytická v bode a , ak existuje mocninový rad so stredom a , ktorý na niektorom okolí $O(a)$ bodu a konverguje k $f|O(a)$

³³prítom kladieme $(-1)^0 := 1$

³⁴funkcie \sin a \cos sa často definujú práve pomocou rovností 2 a 3

13. $f(x) = \ln(12 - x - x^2)$;

14. $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3)$;

15. $f(x) = (1 + x) \ln(1 + x)$;

16. $f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x + \ln(1 - x^2)}{x^4}, & \text{ak } x \neq 0 \\ -\frac{2}{3}, & \text{ak } x = 0 \end{cases} .$

Riešenie. 16. Použijeme podobné postupy ako pri hľadani Taylorových polynómov v pr. I.387. Podľa vzorca 2 z úvodu k tomuto odseku platí pre všetky $x \in \mathbf{R}$ rovnosť

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1},$$

a teda aj rovnosť

$$x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n}. \quad (4.13)$$

Podľa vzorca 4 platí pre $u \in (-1, 1]$

$$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n}.$$

Odtiaľ vyplýva (stačí položiť $u = -x^2$), že pre všetky $x \in (-1, 1)$ platí

$$\ln(1-x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} x^{2n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}. \quad (4.14)$$

Ak sčítame rovnosti (4.13) a (4.14), vidíme, že pre všetky $x \in (-1, 1)$ (pre tieto x platia totiž rovnosti (4.13) a (4.14) súčasne) platí

$$\begin{aligned} x \sin x + \ln(1-x^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{n} \right) x^{2n} = \\ &= \left(\frac{1}{1!} - 1 \right) x^2 + \left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{2} \right) x^4 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3} \right) x^6 + \dots = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{n} \right) x^{2n}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Vydelením rovnosti (4.15) výrazom x^4 dostávame pre $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$:

$$\frac{x \sin x + \ln(1-x^2)}{x^4} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{n} \right) x^{2n-4} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} - \frac{1}{k+2} \right) x^{2k} \quad (4.16)$$

(pri poslednej úprave sme položili $n-2=k$, pritom $(-1)^{n+1} = (-1)^{k+3} = (-1)^{k+1}$). Pre $x=0$ má súčet radu $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} - \frac{1}{k+2} \right) x^{2k}$ hodnotu $-\frac{1}{3!} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}$.

Na intervale $(-1, 1)$ teda rad $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} - \frac{1}{k+2} \right) x^{2k}$ konverguje k funkcii $f|(-1, 1)$, čo podľa vety 17 znamená, že funkcia f je analytická v bode 0 a uvedený rad je jej Maclaurinovým radom.

Zostáva nájsť obor konvergenzie radu $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} - \frac{1}{k+2} \right) x^{2k}$; využijeme pri tom znalosti oborov konvergenzie radov, z ktorých sme tento rad vytvárali. Rad na pravej strane rovnosti (4.13) konverguje pre každé $x \in \mathbf{R}$, rad z rovnosti (4.14) len pre $x \in (-1, 1)$ ³⁵, preto ich súčet (tj. rad z rovnosti (4.15))

³⁵okrem iného to vyplýva aj z tejto úvahy: rad $-\sum_{n=1}^{\infty} (x^{2n}/n)$ sme získali substitúciou $u = -x^2$ z radu $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n+1}u^n/n)$; keďže druhý z týchto radov konverguje len pre $u \in (-1, 1]$ (pozri vzorec 4 z úvodu k tomuto odseku), konverguje prvý z nich len pre tie $x \in \mathbf{R}$, pre ktoré $-x^2 \in (-1, 1]$

konverguje len pre $x \in (-1, 1)$ ³⁶. Ak konvergentný (divergentný) rad vynásobíme nenulovou konštantou (v našom prípade číslom $1/x^4$), dostaneme konvergentný (divergentný) rad; odtiaľ vyplýva: rad z rovnosti (4.16) iste diverguje pre $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ a konverguje pre $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$; jeho konvergencia v bode 0 (ktorá nevyplyva z tejto úvahy) je zrejmejšia.

Teda oborom konvergence radu $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} - \frac{1}{n+2} \right) x^{2n}$ je interval $(-1, 1)$.

Poznámky. 1. Pri hľadaní oboru konvergence Maclaurinového radu funkcie f sme mohli samozrejme postupovať aj „klasickým“ spôsobom (tj. nájsť polomer konvergence a potom vyšetriť konvergenciu daného radu v krajných bodoch intervalu konvergence); ak chceme na výpočet polomeru konvergence použiť vetu 11, je

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0, & \text{ak } n \text{ je} \\ & \text{nepárne} \\ 2^k \sqrt[k]{\frac{1}{(2k+3)!} + \frac{1}{k+2}} = 2^k \sqrt[k]{\frac{1}{k+2} \left(1 + \frac{k+2}{(2k+3)!}\right)}, & \text{ak } n = 2k \text{ a} \\ & k \text{ je párne} \quad ; \\ 2^k \sqrt[k]{\frac{1}{k+2} - \frac{1}{(2k+3)!}} = 2^k \sqrt[k]{\frac{1}{k+2} \left(1 - \frac{k+2}{(2k+3)!}\right)}, & \text{ak } n = 2k \text{ a} \\ & k \text{ je nepárne} \end{cases}$$

ak využijeme rovnosti $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k+2} = 1$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(2n+3)!} = 0$, dostaneme $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[2m-1]{|a_{2m-1}|} = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[4m]{|a_{4m}|} = 1$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[4m-2]{|a_{4m-2}|} = 1$, odtiaľ $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ (pozri tiež riešenie pr. I.160).

2. Úvaha, ktorú sme použili pri hľadaní oboru konvergence radu z rovnosti (4.15), je vlastne špeciálnym prípadom tohto tvrdenia:

Nech rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ majú navzájom rôzne polomery konvergence. Potom obor konvergence radu $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n$ je prienikom oborov konvergence radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ (pozri tiež riešenie pr. 339.1).

3. Príklad 348.16 „hovorí“ vlastne toto: funkciu $g(x) = \frac{x \sin x + \ln(1-x^2)}{x^4}$ možno „dedefinovať“ v bode 0 tak, že funkcia, ktorú dostaneme, bude analytická v bode 0 (táto poznámka sa vzťahuje aj na pr. 348.3, obdobne možno dedefinovať napr. funkcie $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{1-\cos x}{x^2}$).

349. Ukážte, že nasledujúce funkcie sú analytické v bode 0 a určite obor konvergence ich Maclaurinových radov:

1. $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
2. $f(x) = \arcsin x$;
3. $f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$, $a > 0$;
4. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2+x^2}{2-x^2}$;
5. $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$;
6. $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$;
7. $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$;
8. $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$, $x \in (-1, 1)$.

Riešenie. 2. Nájdeme najprv Maclaurinov rad derivácie funkcie f , tj. funkcie $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

Podľa vzorca 5.2 z úvodu k tomuto odseku pre každé $u \in [-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n ,$$

preto (stačí položiť $u = x^2$) pre každé $x \in (-1, 1)$ je

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} . \quad (4.17)$$

³⁶pri tejto úvahe využívame, že súčet dvoch konvergentných radov je konvergentný rad, súčet konvergentného a divergentného radu je divergentný rad

Integrovaním člen po člene (tvrdenie b) vety 16) dostávame pre $x \in (-1, 1)$ rovnosť

$$\begin{aligned} \arcsin x &= {}^{37} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right) dt = \int_0^x dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} dt = \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

čo podľa vety 17 znamená, že funkcia \arcsin je analytická v bode 0 a rad $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$ je jej Maclaurinovým radom.

Nájďme teraz obor konvergence tohto radu: Rad z rovnosti (4.17) konverguje len pre $x \in (-1, 1)$ (možno to odvodiť podobnými úvahami ako v poznámke ³⁵ k riešeniu pr. 348.16), teda jeho polomer konvergence je $R = 1$. Pretože podľa vety 15 má ľubovoľný mocninový rad rovnaký polomer konvergence ako rad získaný z neho integrovaním člen po člene, je polomer konvergence radu $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$ tiež rovný 1; pritom v bodoch $x = 1$ a $x = -1$ (tj. v krajných bodoch intervalu konvergence $(-1, 1)$) tento rad konverguje podľa Raabeho kritéria ³⁸. Oborom konvergence radu $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$ je teda interval $[-1, 1]$. (Z tvrdenia uvedeného v poznámke 1 za riešením pr. 343.4 potom vyplýva, že rovnosť (4.18) platí aj pre $x = 1$ a $x = -1$.)

Poznámka. Polomer konvergence R radu $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$ môžeme samozrejme nájsť aj priamo (tj. bez úvah o polomere konvergence radu z rovnosti (4.17)), nemožno na to však použiť vetu 12 (rad $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$ totiž nespĺňa podmienku „počínajúc niektorým n_0 je $a_n \neq 0$ “ z tejto vety, pozri tiež poznámku ²¹). Číslo R možno vypočítať napr. na základe tvrdenia z pr. 339.3 alebo pomocou d'Alembertovho kritéria (veta 6' z odseku 3.3), z ktorého je toto tvrdenie odvodené.

350. 1. Nech funkcia f je súčtom radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s nenulovým polomerom konvergence. Nájďte Maclaurinov rad funkcie $\frac{f(x)}{1-x}$!

2. Nájďte Maclaurinove rady funkcií:

a) $f(x) = \ln^2(1-x)$;

b) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$.

351. Nájďte Taylorov rad funkcie f v bode a a určite jeho obor konvergence, ak:

1. $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x + 3)^2}$, $a = 1$;

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 10x + 29}}$, $a = 5$;

3. $f(x) = (2x + 1) \sin x \sin(x + 1)$, $a = -\frac{1}{2}$;

4. $f(x) = \ln(x^2 - 9x + 20)$, $a = 3$.

Návod: Substitúciou $x - a = t$ možno hľadanie Taylorovho radu funkcie f v bode a previesť na hľadanie Maclaurinovho radu funkcie $g(t) := f(t+a)$. Pritom zrejme platí: ak interval I je obor konvergence Maclaurinovho radu funkcie g , tak interval $J = a + I$ ($:= \{x + a ; x \in I\}$) je oborom konvergence Taylorovho radu funkcie f v bode a .

³⁷využívame rovnosť $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$

³⁸konvergencia v bodoch $x = 1$ a $x = -1$ vyplýva aj z pr. 345.2

352. Pomocou derivovania alebo integrovania člen po člene nájdite súčty radov:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!};$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n;$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n}.$$

353. Nájdite súčty číselných radov:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!};$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!};$$

$$5. 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

354. Nech funkcia $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ má derivácie všetkých rádov v každom bode intervalu (a, b) , nech pre niektoré $M > 0$, $c > 0$ platí

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in (a, b) : |f^{(n)}(x)| < Mc^n.$$

Potom Taylorov rad funkcie f v bode x_0 ($x_0 \in (a, b)$) konverguje na intervale (a, b) k funkcii f . Dokážte!³⁹

355. Uveďte príklad funkcie, ktorá má derivácie všetkých rádov v bode 0, ale nie je v tomto bode analytická!

4.4 Niektoré výpočty pomocou radov

356. Vypočítajte nasledujúce hodnoty s uvedenou presnosťou:

$$1. \sqrt[3]{130} \quad (10^{-5});$$

$$2. \sqrt[4]{15} \quad (10^{-4});$$

$$3. \operatorname{arctg} \frac{1}{4} \quad (10^{-4});$$

$$4. \ln 1.2 \quad (10^{-4});$$

$$5. e \quad (10^{-6}).$$

Riešenie. 1. Platí

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{130} &= \sqrt[3]{125+5} = \sqrt[3]{125 \left(1 + \frac{1}{25}\right)} = 5 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{25}} = \\ &= 5 \left[1 + \frac{1}{1!3} \left(\frac{1}{25}\right) - \frac{2}{2!3^2} \left(\frac{1}{25}\right)^2 + \frac{2 \cdot 5}{3!3^3} \left(\frac{1}{25}\right)^3 - \dots \right] \end{aligned}$$

(použili sme vzorec 5 z úvodu odseku 4.3.2 pre $m = 1/3$ a $x = 1/25$), teda

$$\sqrt[3]{130} = 5 + 5 \cdot \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 5^2} - 5 \cdot \frac{2}{2! \cdot 3^2 \cdot 5^4} + 5 \cdot \frac{2 \cdot 5}{3! \cdot 3^3 \cdot 5^6} - \dots$$

Ak číslo b je súčtom radu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, je prirodzené aproximovať ho niektorým čiastočným súčtom tohto radu. Odhadnime absolútnu chybu takejto aproximácie: ak pre n -tý zvyšok $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$ uvedeného

³⁹špeciálne teda (ak $c = 1$) platí: ak postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na (a, b) , tak Taylorov rad funkcie f v bode x_0 ($x_0 \in (a, b)$) konverguje na intervale (a, b) k funkcii f ; na základe tohto tvrdenia možno dokázať napr. vzorce 1-3 z úvodu tohto odseku

radu platí $|R_n| < \varepsilon_1$, ak každé z čísel b_0, b_1, \dots, b_n vypočítame s presnosťou ε_2 (tj. nájdeme aproximácie β_0, \dots, β_n čísel b_0, \dots, b_n také, že $|b_k - \beta_k| < \varepsilon_2$ pre $k = 0, 1, \dots, n$) a ak zaokrúhlením čísla $\sum_{k=0}^n \beta_k$ dostaneme číslo β , pre ktoré platí $|\sum_{k=0}^n \beta_k - \beta| < \varepsilon_3$, tak číslo β je aproximáciou čísla b , pre ktorej absolútnu chybu ε platí

$$\varepsilon \leq \varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3;$$

vyplýva to z nerovností

$$\varepsilon = \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k - \beta \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| + \left| \sum_{k=0}^n (b_k - \beta_k) \right| + \left| \sum_{k=0}^n \beta_k - \beta \right|.$$

Ak presnosť, s ktorou máme vypočítať číslo b , je $\delta = 10^{-m}$ ($m \in \mathbf{N}$), zaokrúhľujeme spravidla číslo $\sum_{k=0}^n \beta_k$ na m desatinných miest; pre chybu ε_3 , ktorej sa tým dopúšťame, platí

$$\varepsilon_3 \leq 0.5 \cdot 10^{-m} = \frac{\delta}{2}.$$

Ak teda chceme, aby platilo $\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \delta = 10^{-m}$, treba zvoliť ε_1 a ε_2 tak, aby bola splnená nerovnosť $\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2 < \delta/2$; položíme preto

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta}{4}$$

a nájdime (čo najmenešie) číslo n , pre ktoré platí

$$|R_n| < \varepsilon_1 = \frac{\delta}{4}$$

(také n existuje, pretože z konvergencie radu $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ vyplýva $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$), potom zrejme stačí položiť

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta}{4(n+1)}.$$

V našom príklade máme počítať s presnosťou $\delta = 10^{-5}$, nájdime teraz čísla n a ε_2 . Rad $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, ktorého súčtom je číslo $\sqrt[3]{130}$, strieda — počínajúc členom b_1 — znamienka, pričom postupnosť $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ rýdzomonotónne konverguje k 0, preto pre jeho n -tý zvyšok R_n ($n \in \mathbf{N}$) platí (pozri vetu 12 z odseku 3.3)

$$\begin{aligned} |R_n| &< |b_{n+1}| = 5 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{(n+1)! 3^{n+1}} \left(\frac{1}{25}\right)^{n+1} \leq \\ &\leq \frac{5}{3(n+1)} \cdot \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}{n! 3^n} \cdot \frac{1}{5^{2n+2}} = \frac{1}{3(n+1)5^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Nerovnosť $|R_n| < \delta/4 = 10^{-5}/4$ bude preto iste splnená pre tie $n \in \mathbf{N}$, ktoré sú riešeniami nerovnice

$$\frac{1}{3(n+1)5^{2n+1}} \leq \frac{1}{4 \cdot 10^5},$$

najmenším takým číslom je $n = 3$; potom

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta}{4(n+1)} = \frac{10^{-5}}{16} = 6.25 \cdot 10^{-7}.$$

Aby sme teda našli číslo $\sqrt[3]{130}$ s presnosťou 10^{-5} , stačí vypočítať každé z čísel b_0, b_1, b_2, b_3 s presnosťou $6.25 \cdot 10^{-7}$, sčítať ich a výsledok zaokrúhliť na 5 desatinných miest:

$$\begin{array}{ll} b_0 = 5, & \beta_0 = 5, \\ b_1 = 5 \cdot \frac{1}{1! 3 \cdot 5^2}, & \beta_1 = 0.066\ 666\ 7, \\ b_2 = -5 \cdot \frac{2}{2! 3^2 5^4}, & \beta_2 = -0.000\ 888\ 9, \\ b_3 = 5 \cdot \frac{2 \cdot 5}{3! 3^3 5^6}, & \beta_3 = 0.000\ 019\ 8, \end{array}$$

potom $\sum_{k=0}^3 \beta_k = 5.065\,797\,6$, zaokrúhlením na 5 desatinných miest dostávame 5.065 80, preto

$$\sqrt[3]{130} = 5.065\,80 \pm 0.000\,01.$$

Poznámky. 1. Pri odhade R_n sme mohli použiť napr. aj Lagrangeov tvar zvyšku Taylorovho polynómu (pozri [23, str. 173, poznámka 2]): pre

$$f(x) = 5(1+x)^{1/3}$$

je

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \cdot 5 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{3^{n+1}} (1+x)^{-(3n+2)/3}, \quad n \in \mathbf{N},$$

preto

$$|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}\left(\vartheta_n \cdot \frac{1}{25}\right)}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{n+1} \right| = 5 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{(n+1)! 3^{n+1}} \left(1 + \vartheta_n \cdot \frac{1}{25}\right)^{-(3n+2)/3} \cdot \frac{1}{25^{n+1}},$$

kde $\vartheta_n \in (0,1)$, odtiaľ (ak použijeme rovnaké úpravy ako v riešení pr. 356.1 a nerovnosť $(1 + \vartheta_n/25)^{-(3n+2)/3} < 1$)

$$|R_n| < \frac{1}{3(n+1)5^{2n+1}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

2. Číslo $\sqrt[3]{130}$ sme mohli napísať aj v tvare

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{216 - 86} = 6 \sqrt[3]{1 - \frac{86}{216}}$$

a ďalej pokračovať obdobne ako pri riešení pr. 356.1 (získaný rad ovšem vtedy nie je radom so striedavými znamienkami, preto nemožno použiť odhad $|R_n| < |b_{n+1}|$; z nerovnosti

$$|b_k| \leq \frac{2}{k} \left(\frac{43}{108}\right)^k,$$

kde

$$b_k := -6 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdots (3k-4)}{k! 3^k} \left(\frac{43}{108}\right)^k, \quad k \geq 2,$$

vyplýva tento odhad:

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \leq \frac{2}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{43}{108}\right)^k = \\ &= \frac{2}{n+1} \left(\frac{43}{108}\right)^{n+1} \frac{1}{1-43/108} = \frac{86}{65(n+1)} \left(\frac{43}{108}\right)^n, \quad n \in \mathbf{N}; \end{aligned}$$

najmenším prirodzeným riešením nerovnice

$$\frac{86}{65(n+1)} \left(\frac{43}{108}\right)^n < \frac{10^{-5}}{4}$$

je $n = 12$ ⁴⁰).

Nemalo by však zmysel písať číslo $\sqrt[3]{130}$ napr. v tvare

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{64 + 66} = 4 \sqrt[3]{1 + \frac{66}{64}},$$

⁴⁰ použitím Lagrangeovho tvaru zvyšku dostaneme odhad

$$|R_n| = 6 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{(n+1)! 3^{n+1}} \left(1 - \vartheta_n \cdot \frac{43}{108}\right)^{-(3n+2)/3} \left(\frac{43}{108}\right)^{n+1} \leq$$

pretože $66/64 > 1$, neleží číslo $66/64$ v obore konvergence Maclaurinového radu funkcie $\sqrt[3]{1+x}$.

357. Dokážte rovnosť

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2n+1)^{2k-1}} + \dots \right)$$

a vypočítajte pomocou nej $\ln 2$ a $\ln 3$ s presnosťou 10^{-5} .

358. 1. Vypočítajte číslo π s presnosťou 10^{-5} na základe rovnosti

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

2. Vypočítajte $\sin 18^\circ$ s presnosťou 10^{-4} .

359. S presnosťou 10^{-3} vypočítajte integrály:

1. $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$;

2. $\int_0^1 \cos x^2 dx$;

3. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx$;

4. $\int_0^{1/9} \sqrt{x} e^x dx$.

Riešenie. 3. Podľa vzorca 3 z úvodu k odseku 4.3.2

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R},$$

preto pre každé $x \in \mathbf{R}$ platí

$$\sqrt[3]{x} \cos x = \sqrt[3]{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(6n+1)/3}}{(2n)!}.$$

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(6n+1)/3}}{(2n)!}$ konverguje rovnomerne na intervale $[0, 1]$ (možno to dokázať Weierstrassovým alebo Abelovým kritériom alebo odvodiť z vety 13 a pr. 306), preto (podľa vety 8')

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(6n+1)/3}}{(2n)!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{(6n+1)/3}}{(2n)!} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{3x^{(6n+4)/3}}{(2n)!(6n+4)} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{(2n)!(6n+4)}. \end{aligned}$$

Ďalej budeme postupovať rovnako ako pri riešení pr. 356.1: Keďže rad $\sum_{n=0}^{\infty} b_n := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{(2n)!(6n+4)}$ je radom so striedavými znamienkami, pričom postupnosť $\left\{ \frac{3}{(2n)!(6n+4)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ rýdzomonotónne konverguje k 0, platí pre jeho n -tý zvyšok $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$ odhad

$$|R_n| < \frac{3}{(2n+2)!(6n+10)} < \frac{1}{(2n+3)!};$$

$$\leq \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{43}{108} \right)^{-(3n+2)/3} \left(\frac{43}{108} \right)^{n+1} \leq \frac{2}{n+1} \left(\frac{108}{65} \right)^{n+1} \left(\frac{43}{108} \right)^{n+1} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{43}{65} \right)^{n+1},$$

najmenším prirodzeným riešením nerovnice

$$\frac{2}{n+1} \left(\frac{43}{65} \right)^{n+1} < \frac{10^{-5}}{4}$$

je $n = 25$

obr. 3

najmenším prirodzeným riešením nerovnice

$$\frac{1}{(2n+3)!} \leq \frac{1}{4 \cdot 10^3}$$

je $n = 2$; potom

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 10^3} = 8.\bar{3} \cdot 10^{-5}.$$

Treba teda vypočítať b_n pre $n = 0, 1, 2$ s presnosťou ε_2 , vypočítané čísla sčítať a výsledok zaokrúhliť na 3 desatinné miesta:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{3}{4} = 0.75, \\ b_1 &= -\frac{3}{20} = -0.15, \\ b_2 &= \frac{3}{24 \cdot 16} = 0.00781\dots, \end{aligned}$$

$0.75 - 0.15 + 0.00781 = 0.60781$, teda

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x \, dx = 0.608 \pm 0.001.$$

Poznámka. Pretože čísla b_0 a b_1 sme vypočítali presne, stačilo by počítať číslo b_2 s presnosťou $\frac{1}{4 \cdot 10^3} = 2.5 \cdot 10^{-4}$.

360. Odvoďte nasledujúce približné vzorce pre obsah p kruhového odseku ABC , zodpovedajúceho malému stredovému uhlu AOC veľkosti 2θ (pozri obr. 3):

$$1. \quad p \approx \frac{2}{3}dh; \qquad 20. \quad p \approx \frac{h}{15}(7d + 3s);$$

kde d je dĺžka tetivy AC , s je dĺžka oblúka AC , h je výška odseku ABC .

4.5 Ďalšie príklady

361. Nájdite obor konvergencie radov:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}; & 2. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n (e^{x/n} - 1)^n; \\ 3. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n; & 4. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}; \\ 5. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1+a^{2n}x^2}; & 6. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x; \end{aligned}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin nx;$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}, \quad q > 0, \quad x \in (0, \pi);$$

$$9. \sin x - \sin \sin x + \sin \sin \sin x - \dots;$$

$$10. \cos x - \cos \cos x + \cos \cos \cos x - \dots.$$

362. 1. Na základe rovnosti

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}, \quad x \neq 1,$$

nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}$.

2. Na základe rovnosti

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}$$

nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

363. 1. Nech $a_n > 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} (1/a_n)$ diverguje. Potom

$$\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdot \frac{a_3}{a_4+x} + \cdots = \frac{a_1}{x}, \quad x > 0.$$

Dokážte!

2. Dokážte rovnosť $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{1}{x-1}$, $x > 1$.

3. Nájdite súčty radov:

$$a) \frac{2}{1+2x} + \frac{3}{(1+2x)(1+3x)} + \frac{4}{(1+2x)(1+3x)(1+4x)} + \cdots, \quad x > 0;$$

$$b) \frac{y}{1-y^2} + \frac{y^2}{1-y^4} + \frac{y^4}{1-y^8} + \cdots + \frac{y^{2^n}}{1-y^{2^{n+1}}} + \cdots;$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}.$$

364. Nech $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$. Potom $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$. Dokážte!

365. Vyšetrite bodovú a rovnomernú konvergenciu postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na množine M , ak:

$$1. f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right), \quad M = (0, \infty);$$

$$2. f_n(x) = n \int_0^x \sin \frac{\pi t^n}{2} dt, \quad M = [0, \alpha], \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$3. f_n(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{n-1}{n} x \right), \quad M = \left(0, \frac{\pi}{4} \right);$$

$$4. f_n(x) = \frac{\sqrt{n} + \operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n} x} \quad a) M = (0, 1), \quad b) M = (1, \infty);$$

$$5. f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx, \quad M = (0, \infty);$$

$$6. f_n(x) = x^n + x^{2n} - 2x^{3n}, \quad M = [0, 1];$$

$$7. f_n(x) = \sqrt[n]{|\sin x|}, \quad M = \mathbf{R};$$

$$8. f_n(x) = \ln \left(1 + \frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}} \right), \quad M = [0, \infty);$$

$$9. f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right) \quad a) M = (0, 2), \quad b) M = (2, \infty);$$

$$10. f_n(x) = n(x^{1/n} - 1), \quad M = [1, a];$$

$$11. f_n(x) = \frac{n}{x} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right), \quad M = (0, 10);$$

$$12. f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \quad a) M = [a, b], \quad b) M = \mathbf{R}.$$

366. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale $[0, 1]$, nech $f_n \rightarrow 0$ na $[0, 1]$. Pre $\varepsilon > 0$ a $x \in [0, 1]$ položme

$$n_\varepsilon(x) := \min \{n \in \mathbf{N} ; \forall k \geq n : |f_k(x)| < \varepsilon\}.$$

Potom $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0, 1]$ práve vtedy, keď každá z funkcií n_ε ($\varepsilon > 0$) je ohraničená. Dokážte!

367. 1₀. Nech $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je rovnomerne spojitá funkcia, nech

$$f_n(x) := f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}.$$

Potom $f_n \rightrightarrows f$ na \mathbf{R} . Dokážte!

2. Nech $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá diferencovateľná funkcia, nech

$$f_n(x) := n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right), \quad x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N},$$

nech $a < b$. Potom $f_n \rightrightarrows f'$ na $[a, b]$. Dokážte!

3. Nech $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkcia, nech

$$f_n(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right) \quad x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}.$$

Potom postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na každom ohraničenom intervale $[a, b]$. Dokážte!

368. Rozhodnite o platnosti nasledujúcich tvrdení:

1. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných funkcií definovaných na intervale (a, b) , nech $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) . Potom pre každé $\alpha \in (0, 1]$ platí $f_n^\alpha \rightrightarrows f^\alpha$ na (a, b) .

2. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) a $g_n \rightrightarrows g$ na (a, b) , tak $f_n g_n \rightrightarrows f g$ na (a, b) .

369. Vyšetrite bodovú a rovnomernú konvergenciu radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^4)^n}$, $x \in [a, b]$, pričom a) $ab > 0$, b) $ab < 0$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n})$, $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{[n/2]!}$ ⁴¹, $|x| < a$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin(x/n)}{x^2 + \ln^3(n+1)}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{n \ln^2(n+1)}$, $x \geq 1$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/nx) \cos nx}{4 + \ln^2 2nx}$ a) $x \in (0, 1)$, b) $x > 1$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n x + 1}$ a) $x \in (0, \delta)$, b) $x > \delta$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1 - x^n)$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \sqrt{n}}{1 + n^3 x^3}$ a) $x \geq \alpha > 0$, b) $x > 0$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} x^n$, $x \geq 1$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x) \cdots (1+nx)}$ a) $x \in [0, \delta]$, b) $x \geq \delta$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} 41}{\sqrt{n^2 + nx^2}}$.

370. Nájdite všetky $\alpha \in \mathbf{R}$, pre ktoré rad $\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx^2}$ konverguje rovnomerne na $(0, \infty)$.

⁴¹[.] tu označuje celú časť

371₀. 1. Ukážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ konverguje rovnomerne na každom ohraničenom intervale, ale nekonverguje absolútne v žiadnom bode $x \in \mathbf{R}$.

2. Ukážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ konverguje rovnomerne a absolútne na $[0, 1]$, ale rad absolútnych hodnôt $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ konverguje na $[0, 1]$ nerovnomerne.

372. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ konverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$ konverguje rovnomerne a absolútne na každom uzavretom ohraničenom intervale $[a, b]$ neobsahujúcom žiadny prvok množiny $\{a_n; n \in \mathbf{N}\}$.

373. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií definovaných na intervale $[0, 1]$, nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ bodovo konverguje a $f_n \xrightarrow{0} 0$ na $[0, 1]$. Vyplýva z toho rovnomerná konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $[0, 1]$?

374. Rozhodnite o platnosti tohto tvrdenia: Ak postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na intervale I , tak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} f_n(x) = \sup_{x \in I} f(x)$.

375. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na uzavretom ohraničenom intervale I , tak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na I rovnomerne. Dokážte!

376. Nájdite definičný obor nasledujúcich funkcií a vyšetrite ich spojitost':

$$1. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + (-1)^n n}{x^2 + n^2}; \quad 2. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2};$$

$$3. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}}.$$

377. Ukážte, že funkcia

$$F(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x+n\omega)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n\omega)^2}$$

je spojitá a periodická.

378. 1. Nech postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií definovaných na otvorenom intervale I konverguje na I rovnomerne k funkcii f . Ak žiadna z funkcií f_n , $n \in \mathbf{N}$, nemá bod nespojitosti 2. druhu, tak ani funkcia f nemá bod nespojitosti 2. druhu. Dokážte!

2. Uveďte príklad postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých funkcií definovaných na \mathbf{R} takej, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ je definovaná na \mathbf{R} a má bod nespojitosti 2. druhu.

379. Nech postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotónnych funkcií definovaných na intervale $[a, b]$ konverguje na $[a, b]$ k spojitej funkcii f . Potom $f_n \xrightarrow{0} f$ na $[a, b]$. Dokážte!

380. Ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvexných funkcií bodovo konverguje na intervale (a, b) k funkcii f , tak f je spojitá na (a, b) . Dokážte!

381. 1. Dokážte, že existuje spojitá funkcia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ktorá nie je monotónna na ľubovoľnom intervale $I \subset \mathbf{R}$!

2. Dokážte, že existuje spojitá diferencovateľná funkcia $g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, ktorá nie je konvexná a nie je konkávna na ľubovoľnom intervale $I \subset [0, 1]$!

382. Dokážte, že existuje funkcia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ také, že množina jej bodov nespojitosti je \mathbf{Q} , pričom

1. každé $a \in \mathbf{Q}$ je bod nespojitosti 1. druhu a $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \neq f(a)$, $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \neq f(a)$;
2. každé $a \in \mathbf{Q}$ je bod nespojitosti 2. druhu a $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ neexistujú.

383. 1. Ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií riemannovsky integrovateľných na intervale $[a, b]$ je rovnomerne ohraničená na (a, b) a konverguje tam lokálne rovnomerne, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ a

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Dokážte!

2. Uveďte príklad postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií riemannovsky integrovateľných na intervale $[0, 1]$, ktorá konverguje na $(0, 1)$ lokálne rovnomerne k 0 , ale $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$.

384. Nájdite limity:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x^2} dx$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}} dx$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1+1/n} x^n \ln x dx$;
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx} dx$, kde $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkcia .

385. Vypočítajte $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} dx$.

386. Uveďte príklad postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií definovaných na intervale $[0, 1]$, ktorá konverguje na $[0, 1]$ nerovnomerne k ohraničenej funkcii f , pričom

1. $f_n \in \mathcal{R}[0, 1]$ ($n \in \mathbf{N}$), $f \notin \mathcal{R}[0, 1]$;
2. $f_n \notin \mathcal{R}[0, 1]$ ($n \in \mathbf{N}$), $f \in \mathcal{R}[0, 1]$.

387. Na základe pr. 119, 192 a 193 dokážte druhú vetu o strednej hodnote integrálneho počtu (veta 16 z odseku 2.4) pre prípad spojitej funkcie $g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ a spojitej monotónnej funkcie $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$.

388. Nájdite definičný obor nasledujúcich funkcií a ich prvých derivácií:

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$;
2. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

389. Nech funkcie f_n , $n \in \mathbf{N}$, sú spojite diferencovateľné na (ohraničenom alebo neohraničenom) intervale I . Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje aspoň v jednom bode $a \in I$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ konverguje lokálne rovnomerne na I , tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na I a možno ho tam derivovať člen po člene. Dokážte!

390. Ukážte, že postupnosť $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ konverguje na \mathbf{R} rovnomerne k diferencovateľnej funkcii, ale pre žiadne $x \in \mathbf{R}$ neexistuje konečná $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

391. Nech funkcia f a jej derivácie všetkých rádoov sú definované na \mathbf{R} , nech postupnosť $\{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na \mathbf{R} lokálne rovnomerne k funkcii φ . Potom $\varphi(x) = Ce^x$ pre niektoré $C \in \mathbf{R}$. Dokážte!

392. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale I , nech $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť konečných podmnožín intervalu I , nech definičným oborom funkcie f'_n je množina $I \setminus K_n$ ($n \in \mathbf{N}$). Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje aspoň v jednom bode $a \in I$ a existuje konvergentný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že platí

$$|f'_n(x)| \leq a_n, \quad x \in I \setminus K_n, \quad n \in \mathbf{N},$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na I a možno ho derivovať člen po člene v každom bode $x \in I \setminus \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$. Dokážte!

393. 1. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť obsahujúca všetky racionálne čísla z intervalu $(0, 1)$. Potom funkcia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x - a_n|}{3^n}, \quad x \in (0, 1),$$

je spojitá a definičným oborom jej derivácie je množina $(0, 1) \setminus \mathbf{Q}$. Dokážte!

2. Zostrojte spojitú funkciu $f: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ takú, že $D(f') = (0, 1) \setminus \mathbf{Q}$, pričom v žiadnom bode $a \in \mathbf{Q} \cap (0, 1)$ neexistujú jednostranné derivácie $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

394. Nájďte obor konvergence radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p \left(\frac{x-1}{2} \right)^n$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^\alpha} x^n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \cos \frac{1}{3^n} \right) x^n$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n$, $a > 0$, $b > 0$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n^2}}{n!}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$, $a > 0$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n x^n$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n} (1-x)^n$, kde $\nu(n)$ je počet cifier čísla n ;
11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\cos \frac{n\pi}{4} \right)^n}{\ln n} x^n$;
12. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2 \cos \frac{n\pi}{4} \right)^n}{\ln n} x^n$;
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$;
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n} \right)^n$.

395. Nech polomer konvergence radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ je $R_1 \in \mathbf{R}^+$ a $R_2 \in \mathbf{R}^+$. Čo viete povedať o polomere konvergence R radu

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n x^n$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+|a_n|} x^n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, kde $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ je Cauchyho súčin radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$?

396. Nájďte Maclaurinove rady nasledujúcich funkcií a určite ich obor konvergence I :

1. $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)$;
2. $f(x) = \ln \sqrt[7]{3-x+6x^2-2x^3}$;
3. $f(x) = (x^2-1) \arcsin 2x^2$;
4. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2}$;
5. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$;
6. $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt$;
7. $f(x) = \ln \left(\pi \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \right) + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$;
8. $f(x) = \operatorname{arctg} \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$;
9. $f(x) = \arcsin \left(2x\sqrt{1-x^2} \right)$;
10. $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$.

397. Dokážte rovnosti:

1. $\operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in [-1, 1]$;
2. $\left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^2 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right) \frac{x^n}{n+2}$, $x \in (-1, 1] \setminus \{0\}$;
3. $\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in [-1, 1]$;

$$4. \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1);$$

$$5. \left(\ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} ((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in [-1, 1].$$

398₀. 1. Na základe identity $(1+x)^p(1+x)^{-k-1} = (1+x)^{p-k-1}$ dokážte rovnosti

$$\sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{k+s}{s} \binom{p}{n-s} = \binom{p-k-1}{n}, \quad n = 0, 1, \dots, p-k-1.$$

2. Z identity $(1-x)^{-m-1}(1-x)^{-q-1} = (1-x)^{-m-q-2}$ odvoďte rovnosti

$$\sum_{s=0}^{p-m} \binom{q+s}{s} \binom{p-s}{m} = \binom{p+q+1}{p-m}, \quad p \geq m, \quad m, q = 0, 1, 2, \dots$$

399. Dokážte, že funkcia $F: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ daná predpisom $F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1-x \cos t) dt$, je elementárna.

400. Nájdite súčty radov:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n!};$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{2^n n!};$$

$$4. \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) + \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^7 + \dots;$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!};$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!};$$

$$7. \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \dots$$

401. Nájdite súčty číselných radov:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(3n+1)};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) \frac{1}{n}.$$

402. Ak Maclaurinov rad funkcie f konverguje na množine \mathbf{R} rovnomerne k funkcii f , tak f je polynóm. Dokážte!

403. Nech funkcia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je súčtom radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, nech $\{n! a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť. Potom funkcia f má v každom bode $a \in \mathbf{R}$ derivácie všetkých rádov a platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Dokážte!

404. 1. Dokážte rovnosti:

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n};$$

$$b) \int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a \cos x)}{\cos x} dx = \pi \arcsin a, \quad |a| < 1.$$

2. Vyjadrite v tvare radu hodnotu integrálu:

a) $\int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx$;

b) $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx$.

405. Dokážte rovnosť

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \quad (4.19)$$

a na jej základe vypočítajte číslo π s presnosťou 10^{-9} ⁴².

406. Na základe rovností

$$\ln \frac{9}{10} = -\ln 2 + 2 \ln 3 - \ln 5$$

$$\ln \frac{24}{25} = 3 \ln 2 + \ln 3 - 2 \ln 5$$

$$\ln \frac{81}{80} = -4 \ln 2 + 4 \ln 3 - \ln 5$$

vypočítajte $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 6$, $\ln 10$ s presnosťou 10^{-6} .

407. S presnosťou 10^{-4} vypočítajte integrály:

1. $\int_2^4 e^{1/x} dx$;

2. $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

⁴²Po vyriešení tohto príkladu iste ne jeden čitateľ uzná, že jednoduchšie je zapamätať si vetu
MÁM, Ó BOŽE Ó DOBRÝ PAMATOVAT SI TAKOVÝ ČÍSEL ŘAD!

VELKÝ SLOVUTNÝ ARCHIMEDES ,

ktorá udáva číslo π na 12 desatinných miest (stačí zrátať počet písmen jednotlivých slov). Pre záujemcov uvádzame ešte anglickú verziu:

HOW I WANT A DRINK, ALCOHOLIC OF COURSE,
AFTER THE HEAVY LECTURES INVOLVING QUANTUM MECHANICS!

udávajúcu číslo π na 14 desatinných miest.