

Dodatok

Krivky a funkcie dané parametricky

Nech je v rovine daná pravouhlá súradnicová sústava s rovnakými jednotkami dĺžok na súradnicových osiach Ox a Oy . Neprázdna množina K bodov roviny sa nazýva krivka daná parametricky (v ďalšom stručne len *krivka*), ak existujú funkcie φ, ψ definované na intervale I také, že

$$K = \{(\varphi(t), \psi(t)); t \in I\}^1.$$

Rovnice

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I, \quad (1)$$

sa nazývajú parametrické vyjadrenie krivky K . Ak existuje funkcia f (funkcia g) tak, že

$$\begin{aligned} K &= \{(x, f(x)); x \in D(f)\} \\ (K &= \{(g(y), y); y \in D(g)\} \end{aligned}),$$

hovoríme, že rovnicami (1) je parametricky daná funkcia $y = f(x)$ (funkcia $x = g(y)$). (Postačujúcou podmienkou pre existenciu funkcie f (funkcie g) je injektívnosť funkcie φ (funkcie ψ), potom $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ ($g = \varphi \circ \psi^{-1}$).)²

Špeciálnym prípadom parametrického vyjadrenia krivky je rovnica krivky v polárnych súradniciach: Usporiadanú dvojicu (ϱ, φ) , kde $\varrho \geq 0$, $\varphi \in \mathbf{R}$, nazývame polárnymi súradnicami bodu $X \equiv (x, y)$, ak

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi \quad (3).$$

Ak f je nezáporná funkcia definovaná na intervale I a L je množina všetkých bodov roviny s polárnymi súradnicami $(f(\varphi), \varphi)$, $\varphi \in I$, nazýva sa rovnica

$$\varrho = f(\varphi), \quad \varphi \in I,$$

rovnicou krivky L v polárnych súradniciach⁴. (Zrejme jedno z možných parametrických vyjadrení krivky L má tvar

$$x = f(\varphi) \cos \varphi, \quad y = f(\varphi) \sin \varphi, \quad \varphi \in I. \quad)$$

¹spravidla sa požaduje aj spojitosť funkcií φ, ψ

²definíciu funkcie danej parametricky možno vysloviť aj vo všeobecnejšej podobe, ak podmienku „ $D(\varphi) = D(\psi) = I$ “ nahradíme podmienkou „ $D(\varphi) = D(\psi)$ “

³ ϱ je teda vzdialenosť bodov X a $O \equiv (0, 0)$, φ je veľkosť (v radiánoch) niektorého z uhlov, o ktorý treba otočiť polpriamku OJ ($J \equiv (1, 0)$) okolo bodu O , aby splynula s polpriamkou OX ; pritom $\varphi \geq 0$ ($\varphi < 0$), ak sa toto otočenie deje proti smeru (v smere) hodinových ručičiek

⁴niekedy sa polárne súradnice definujú všeobecnejšie: namiesto $\varrho \geq 0$ sa uvažuje $\varrho \in \mathbf{R}$, v takom prípade netreba pri zavádzaní rovnice krivky v polárnych súradniciach požadovať nezápornosť funkcie f

V ďalšom budeme názov krivka používať aj na označenie množín tvaru $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$ ($n \in \mathbf{N}$), kde K_1, \dots, K_n sú krivky v zmysle horeuvedenej definície. Pokiaľ na označenie premenných použijeme písmená ϱ, φ , budeme tým vždy myslieť polárne súradnice.

408. Popíšte nasledujúce krivky pomocou polárnych súradníc:

1. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$;
2. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2)$;
3. $x^4 + y^4 = a^2xy$;
4. $a(x^3 + y^3) = x^2 + y^2$.

409. Nájdite parametrické vyjadrenie nasledujúcich kriviek:

1. $(x + y)^2 = a(x - y)$ (položte $y = tx$) ;
2. $x^4 + y^4 = ax^2y$;
3. $4y^2 = 4x^2y + x^5$ (položte $y = tx^2$) ;
4. $y^5 + x^4 = xy^2$.

410. Rovnice nasledujúcich kriviek prepíšte na tvar $F(x, y) = 0$, na základe toho zistíte, o aké krivky ide:

1. $x = a + b \cos t, \quad y = c + d \sin t \quad (b > 0, d > 0), \quad t \in \mathbf{R}$ ⁵ ;
2. $x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t, \quad t \in \mathbf{R}$;
3. $x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \operatorname{arcctg} t, \quad t \in \mathbf{R}$;
4. $\varrho = \frac{d}{\sin(\varphi - \varphi_0)}$ ⁶ ($d > 0$) ;
5. $\varrho = \frac{a}{\cos^2(\varphi/2)}$ ($a > 0$) ;
6. $\varrho = \frac{a}{\sin^2(\varphi/2)}$ ($a > 0$) .

411. Nájdite parametrické vyjadrenie krivky K , ktorá je geometrickým miestom všetkých bodov M popísaných nasledujúcou konštrukciou:

1. Je dané číslo $l > 0$. Zvoľme body $A \in Oy, B \in Ox$ tak, aby $|AB| = l$. M je pята kolmice spustenej z vrcholu C obdĺžnika $OACB$ na úsečku AB .

2. Nech k je kružnica s polomerom r a stredom $(r, 0)$. Z bodu $O \equiv (0, 0)$ veďme tetivu OB kružnice k , z bodu B spustíme kolmicu na priemer OA , jej pýtu označme C . M je pýta kolmice spustenej z bodu C na tetivu OB .

3. Nech $a > b > 0$ sú dané čísla. Bodom $A \equiv (0, -a)$ veďme priamku p , ktorá nie je rovnobežná s osou Ox , jej priesečník s touto osou označme B . M je bod ležiaci na priamke p vo vzdialenosti b od bodu B .

Riešenie. 1. Označme K_i ($i = 1, 2, 3, 4$) tú časť krivky K , ktorá leží v i -tom kvadrante. Pretože — ako vyplýva zo zadania — krivka K je súmerná podľa osí Ox a Oy , stačí nájsť parametrické vyjadrenie krivky K_1 , pomocou neho už ľahko nájdeme parametrické vyjadrenia kriviek K_2, K_3, K_4 .

Nech teda úsečka AB leží v prvom kvadrante; za parameter zvoľme veľkosť φ uhla OBA , potom (pozri obr. 4)

– z pravouhlého \triangle -a AOB dostávame

$$|OA| = |BC| = |AB| \sin \varphi = l \sin \varphi, \quad |OB| = |AB| \cos \varphi = l \cos \varphi ;$$

– z \triangle -a BCM:

$$|BM| = |BC| \sin \varphi = l \sin^2 \varphi ;$$

– z \triangle -a BDM:

$$|DM| = |BM| \sin \varphi = l \sin^3 \varphi, \quad |BD| = |BM| \cos \varphi = l \sin^2 \varphi \cos \varphi .$$

Ak $M \equiv (x, y)$, tak

$$x = |OB| - |BD| = l \cos \varphi \cdot (1 - \sin^2 \varphi) = l \cos^3 \varphi, \quad y = |MD| = l \sin^3 \varphi ,$$

⁵vzhľadom na periodičnosť funkcií \sin, \cos by stačilo uvažovať $t \in [0, 2\pi]$

⁶pokiaľ v rovnici $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi \in M$, nie je množina M určená, kladieme $M := \{\varphi \in D(f) ; f(\varphi) \geq 0\}$; ak je navyše funkcia f periodická a jednou z jej periód je číslo $2n\pi$ ($n \in \mathbf{N}$), stačí položiť $M := [a, a + 2n\pi] \cap \{\varphi \in D(f) ; f(\varphi) \geq 0\}$ ($a \in D(f)$)

obr. 4

teda parametrické vyjadrenie krivky K_1 má tvar

$$x = l \cos^3 \varphi, \quad y = l \sin^3 \varphi, \quad \varphi \in (0, \pi/2).$$

Krivky K_1 a K_2 sú súmerné podľa osi Oy , preto

$$\begin{aligned} K_2 &= \{(-x, y); (x, y) \in K_1\} = \{(-l \cos^3 \varphi, l \sin^3 \varphi); \varphi \in (0, \pi/2)\} = \\ &= \{(l \cos^3(\pi - \varphi), l \sin^3(\pi - \varphi)); \varphi \in (0, \pi/2)\} = \\ &= \{(l \cos^3 \varphi, l \sin^3 \varphi); \varphi \in (\pi/2, \pi)\}, \end{aligned}$$

teda jedno z parametrických vyjadrení krivky K_2 je

$$x = l \cos^3 \varphi, \quad y = l \sin^3 \varphi, \quad \varphi \in (\pi/2, \pi).$$

Podobne možno nájsť parametrické vyjadrenia kriviek K_3 a K_4 (K_3 , resp. K_4 je súmerná podľa osi Ox s K_2 , resp. K_1) v tvare

$$x = l \cos^3 \varphi, \quad y = l \sin^3 \varphi, \quad \varphi \in (\pi, 3\pi/2),$$

a

$$x = l \cos^3 \varphi, \quad y = l \sin^3 \varphi, \quad \varphi \in (3\pi/2, 2\pi).$$

Krivka K je teda určená rovnicami

$$x = l \cos^3 \varphi, \quad y = l \sin^3 \varphi, \quad \varphi \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}.$$

Poznámka. Krivka daná parametricky rovnicami

$$x = l \cos^3 \varphi, \quad y = l \sin^3 \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]^7,$$

sa nazýva *asteroida*; túto krivku možno zadať tiež rovnicou

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}.$$

(K inému geometrickému popisu asteroidy pozri poznámku za riešením pr. 412.2.)

412. 1. *Cykloidou* sa nazýva dráha, ktorú opisuje bod kružnice kotúľajúcej sa po priamke. Nájdite parametrické vyjadrenie cykloidy (za parameter zvolte uhol otočenia polomeru spájajúceho stred kotúľajúcej sa kružnice s bodom, ktorého dráhu popisujeme).

⁷zrejme tú istú krivku dostaneme, ak interval $[0, 2\pi]$ nahradíme intervalom $(-\infty, \infty)$ alebo intervalom $[a, a + 2\pi]$

2. Kružnica k s polomerom r sa zvnútra kotúľa po kružnici K s polomerom R , $r < R$. Nájdite parametrické vyjadrenie krivky, ktorú pri tomto pohybe opisuje bod kotúlajúcej sa kružnice (táto krivka sa nazýva *hypocykloida*).

3. Na kružnicu s polomerom R je namotaná niť nulovej hrúbky. Túto niť odmotávame z kružnice tak, aby bola niť stále napnutá (tj. aby bola vždy dotyčnicou ku kružnici). Nájdite parametrické vyjadrenie krivky, ktorú opisuje koniec rozmotávanej nite (táto krivka sa nazýva *evolventa kruhu*).

Riešenie. 2. Zvoľme súradnicovú sústavu tak, aby jej počiatkom O bol stred kružnice K a aby v jednom z okamihov, keď bod $M \in k$ (ktorého dráhu popisujeme) je bodom dotyku obidvoch kružníc, platilo $M \equiv (R, 0)$; predpokladajme, že kružnica k sa kotúľa po kružnici K proti smeru hodinových ručičiek. Za parameter φ zvolme veľkosť uhla, ktorý zvierajú spojnice stredov obidvoch kružníc s kladným smerom osi Ox . Nech S je stred kružnice k , D je bod dotyku kružníc k a K , nech ϑ je uhol, ktorý zvierajú úsečka SD s úsečkou SM (pozri obr. 5).

obr. 5

Pretože kružnica k sa kotúľa po kružnici K , sú dĺžky oblúkov AD a MD rovnaké:

$$R\varphi = r\vartheta,$$

odtiaľ

$$\vartheta = \frac{R}{r} \varphi.$$

Vzdialenosť bodu $S \equiv (p, q)$ od počiatku O je $R - r$ a orientovaný uhol s počiatočným ramenom OA a koncovým ramenom OS má veľkosť φ , preto

$$p = (R - r) \cos \varphi, \quad q = (R - r) \sin \varphi.$$

Vzdialenosť bodov M a S je r a veľkosť orientovaného uhla s počiatočným ramenom SB a koncovým ramenom SM je $-(\vartheta - \varphi)$, preto pre vektor $\vec{u} \equiv (u_1, u_2) = M - S$ je

$$u_1 = r \cos(-(\vartheta - \varphi)), \quad u_2 = r \sin(-(\vartheta - \varphi)).$$

Pretože pre bod $M \equiv (x, y)$ platí $M = S + \vec{u}$, dostávame

$$\begin{aligned} x &= p + u_1 = (R - r) \cos \varphi + r \cos(\vartheta - \varphi) = (R - r) \cos \varphi + r \cos \left(\left(\frac{R}{r} - 1 \right) \varphi \right), \\ y &= q + u_2 = (R - r) \sin \varphi - r \sin(\vartheta - \varphi) = (R - r) \sin \varphi - r \sin \left(\left(\frac{R}{r} - 1 \right) \varphi \right). \end{aligned}$$

Teda parametrické vyjadrenie hypocykloidy má tvar

$$x = (R - r) \cos \varphi + r \cos \left(\left(\frac{R}{r} - 1 \right) \varphi \right), \quad y = (R - r) \sin \varphi - r \sin \left(\left(\frac{R}{r} - 1 \right) \varphi \right), \quad \varphi \in \mathbf{R}.$$

Poznámka. Špeciálne pre $R/r = 4$ dostaneme rovnice asteroidy:

$$\begin{aligned} x &= 3r \cos \varphi + r \cos 3\varphi = 4r \cos^3 \varphi = R \cos^3 \varphi, \\ y &= 3r \sin \varphi - r \sin 3\varphi = 4r \sin^3 \varphi = R \sin^3 \varphi. \end{aligned}$$

413. 1. Nech sú dané funkcie φ, ψ definované na intervale I . Uveďte nutnú a postačujúcu podmienku, aby rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I,$$

bola parametricky daná funkcia $y = f(x)$.

2. Nech sú dané funkcie $\varphi: I \rightarrow \mathbf{R}, \psi: I \rightarrow \mathbf{R}, \chi: J \rightarrow I$, kde I a J sú intervaly. Za akých podmienok je rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I,$$

resp.

$$x = \varphi(\chi(t)), \quad y = \psi(\chi(t)), \quad t \in J,$$

daná parametricky tá istá funkcia $y = f(x)$?

414. Nech funkcia $y = f(x)$ je daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I,$$

kde I je interval.

1. Ak $I = (\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$, φ je rastúca (klesajúca) a existujú $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) =: a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \psi(t) =: b \in \mathbf{R}^*$, tak $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ ($\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$). Dokážte!

2. Ak φ je rýdzomonotónna a ψ spojitá funkcia, tak aj f je spojitá funkcia. Dokážte!

3. Ak φ a ψ sú spojité funkcie, tak aj f je spojitá funkcia. Dokážte!

4. Vyplýva zo spojitosti funkcie f spojitosť funkcií φ a ψ ?

Veta 1. Nech funkcie φ a ψ definované na intervale I sú diferencovateľné v bode $a \in I$, nech φ je rýdzomonotónna funkcia spojitá na niektorej z množín $I \cap O(a)$, kde $O(a)$ je okolie bodu a , a nech $\varphi'(a) \neq 0$. Potom funkcia $y = f(x)$ daná parametricky rovnicami (1) má v bode $\varphi(a)$ deriváciu⁸ a

$$f'(\varphi(a)) = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}. \quad (2)$$

Špeciálne, ak funkcie φ, ψ sú diferencovateľné na intervale I a $\varphi'(t) > 0, t \in I$ ($\varphi'(t) < 0, t \in I$), tak deriváciou funkcie $y = f(x)$ danej parametricky rovnicami (1) je funkcia $y = f'(x)$ daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad t \in I.$$

Nech krivka K je daná parametricky rovnicami (1) (I je interval). Ak funkcie φ, ψ sú diferencovateľné v bode $a \in I$ a $(\varphi'(a), \psi'(a)) \neq (0, 0)$, tak priamka p daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(a) + \varphi'(a)t, \quad y = \psi(a) + \psi'(a)t, \quad t \in \mathbf{R},$$

sa nazýva dotyčnica ku krivke K v bode $M \equiv (\varphi(a), \psi(a))$.

⁸ak $D(f) \cap (-\infty, \varphi(a)) = \emptyset$ alebo $D(f) \cap (\varphi(a), \infty) = \emptyset$, ide o príslušnú jednostrannú deriváciu v bode $\varphi(a)$

Poznámky. 1. Ak bod M krivky K zodpovedá niekoľkým rôznym hodnotám parametra t , môže mať krivka K v bode M viacero dotyčníc.

2. Ak $\varphi'(a) \neq 0$, možno rovnicu priamky p zapísať v tvare

$$y = \psi(a) + \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}(x - \varphi(a)).$$

V prípade, že rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in J,$$

kde $J \subset I$ je interval, je daná parametricky funkcia $y = f(x)$, definovaná v niektorom okolí bodu $\varphi(a)$, dostávame tak už známu rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $(\varphi(a), \psi(a))$: $y = \psi(a) + f'(\varphi(a))(x - \varphi(a))$. (Podobne možno uvažovať v prípade $\psi'(a) \neq 0$.)

415. Nájdite deriváciu funkcie $y = f(x)$ danej parametricky rovnicami:

1. $x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t, \quad y = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t, \quad t \in (1, \infty);$

2. $x = \operatorname{ctg} 2t, \quad y = \frac{2 \cos 2t - 1}{2 \cos t}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

416. Ukážte, že cykloida $x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(1 - \cos \varphi)$, má dotyčnicu v každom bode neležiacom na osi Ox , pričom dotyčnica (normála) v danom bode prechádza najvyšším (najnižším) bodom príslušnej polohy vytvárajúcej kružnice cykloidy (popis cykloidy pozri v pr. 412.1).

417. 1. Nech I je interval, $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ je kladná diferencovateľná funkcia. Potom pre uhol ω , ktorý zvierá dotyčnica ku grafu krivky $\varrho = f(\varphi)$ so spojnicou dotykového bodu a bodu $(0, 0)$, platí

$$\cos \omega = \frac{f'(\varphi)}{\sqrt{f'^2(\varphi) + f^2(\varphi)}}.$$

Dokážte!

2. Nájdite uhol, pod ktorým sa pretínajú krivky $\varrho = \varphi$ a $\varrho = \frac{1}{\varphi}$.

418. Nájdite druhú deriváciu funkcie $y = f(x)$ danej parametricky rovnicami:

1. $x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3, \quad t \in (1, \infty);$ 2. $x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right);$

3. $x = \frac{t^2 - 2t - 5}{t^2 + 10t + 25}, \quad y = \frac{t^2 - 4t + 5}{t^2 + 4t - 5}, \quad t \in (1, \infty);$

4. $x = f'(t), \quad y = tf'(t) - f(t), \quad t \in I$ (pričom predpokladáme, že funkcia f je dvakrát diferencovateľná na intervale I a $f''(x) \neq 0, t \in I$).

Riešenie. 1. Derivácia f' funkcie f je podľa vety 1 daná parametricky rovnicami

$$x = 2t - t^2 - t^2 (=:\Phi(t)), \quad y = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(1 + t) (=:\Psi(t)), \quad t \in (1, \infty).$$

Deriváciou f'' funkcie f' bude preto opäť podľa vety 1 funkcia daná parametricky rovnicami

$$x = \Phi(t), \quad y = \frac{\Psi'(t)}{\Phi'(t)}, \quad t \in (1, \infty),$$

tj.

$$x = 2t - t^2, \quad y = \frac{3}{4(1-t)}, \quad t \in (1, \infty).$$

419. Ukážte, že nasledujúcimi rovnicami parametricky dané funkcie $y = f(x)$ sú diferencovateľné v bode 0, ale ich deriváciu v tomto bode nemožno nájsť použitím vety 1:

1. $x = 2t + |t|, \quad y = 5t^2 + 4t|t|, \quad t \in \mathbf{R};$
2. $x = t - \frac{t}{1+t^2}, \quad y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t \in \mathbf{R};$
3. $x = t + \sqrt[5]{t}, \quad y = 2t + 3\sqrt[5]{t}, \quad t \in \mathbf{R}.$

420. 1. Nech funkcia $y = f(x)$ je daná parametricky rovnicami (1) (I je interval). Nech funkcie φ, ψ sú diferencovateľné v bode $a \in I$, pričom $\varphi'(a) \neq 0$ a funkcia φ je spojitá na niektorom okolí $O(a)$ bodu a . Potom funkcia f je diferencovateľná v bode $\varphi(a)$ a platí (2). Dokážte! ⁹

2. Uveďte príklad takých funkcií $\varphi, \psi: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ diferencovateľných v bode 0, že $\varphi'(0) \neq 0$ a rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (-1, 1),$$

je parametricky daná funkcia $y = f(x)$, ktorá nie je diferencovateľná v bode $\varphi(0)$!

Nech množina D je zjednotením konečného počtu intervalov, nech krivka K je daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in D.$$

Priamka $x = a$ ($y = a$) sa nazýva vertikálna asymptota krivky K (horizontálna asymptota krivky K pre $x \rightarrow \infty$), ak pre niektorý hromadný bod $b \in \mathbf{R}^*$ množiny D platí

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow b+} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow b+} |\psi(t)| = \infty \quad \text{alebo} \quad \lim_{t \rightarrow b-} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow b-} |\psi(t)| = \infty \\ & \left(\lim_{t \rightarrow b+} \varphi(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow b+} \psi(t) = a \quad \text{alebo} \quad \lim_{t \rightarrow b-} \varphi(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow b-} \psi(t) = a \right). \end{aligned}$$

Priamka $y = kx + q, k \neq 0$, sa nazýva asymptota so smernicou krivky K pre $x \rightarrow \infty$, ak pre niektorý hromadný bod $b \in \mathbf{R}^*$ množiny D platí

$$\lim_{t \rightarrow b+} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow b+} |\psi(t)| = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow b+} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = k, \quad \lim_{t \rightarrow b+} (\psi(t) - k\varphi(t)) = q,$$

alebo

$$\lim_{t \rightarrow b-} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow b-} |\psi(t)| = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow b-} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = k, \quad \lim_{t \rightarrow b-} (\psi(t) - k\varphi(t)) = q.$$

Analogicky sa definuje horizontálna asymptota krivky K pre $x \rightarrow -\infty$ a asymptota so smernicou krivky K pre $x \rightarrow -\infty$.

Špeciálne, ak krivka K je daná rovnicou v polárnych súradniciach

$$\varrho = f(\varphi), \quad \varphi \in D,$$

tak priamka

$$\varrho \sin(\varphi - \varphi_0) = d \quad {}^{10},$$

je asymptotou krivky K práve vtedy, keď

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0+} f(\varphi) = \infty, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0+} f(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_0) = d,$$

alebo

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0-} f(\varphi) = \infty, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0-} f(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_0) = d,$$

kde $\varphi_0 \in \mathbf{R}$ je hromadný bod množiny D .

⁹na rozdiel od vety 1 v tomto tvrdení nepredpokladáme rýdzu monotónnosť funkcie φ , preto jeho dôkaz nemožno vykonať len na základe viet o derivácii zloženej a inverznej funkcie (z ktorých vyplýva veta 1)

¹⁰jej rovnica v pravouhlých súradniciach je $y \cos \varphi_0 - x \sin \varphi_0 = d$, teda jej smerový vektor $(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$ zvierá s kladným smerom osi Ox uhol φ_0

421. Načrtnite nasledujúce krivky:

1. $\varrho = \varphi$ (Archimedova špirála) ;
2. $\varrho = \frac{1}{\varphi}$ (hyperbolická špirála) ;
3. $\varrho = \sin 5\varphi$;
4. $\varrho = \sqrt{2}c\sqrt{\cos 2\varphi}$ (Bernoulliho lemniskáta¹¹) ;
5. $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2$, $a > 0$;
6. $x(x^2 - y^2) = a(x^2 + y^2)$, $a > 0$.

Riešenie. 3. Keďže funkcia $\sin 5\varphi$ nadobúda kladné aj záporné hodnoty a jednou z jej periód je číslo 2π , chápeme uvedenú rovnicu krivky L v polárnych súradniciach nasledovne (pozri poznámku ⁶ k pr. 410.4):

$$\varrho = \sin 5\varphi, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{5}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{5}, \pi\right] \cup \left[\frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right].$$

Ak $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá nezáporná funkcia, môžeme si krivku K , ktorej rovnica v polárnych súradniciach je $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, predstaviť nasledovne: Na polpriamke $p : \varphi = \alpha$ (teda p je množina všetkých bodov s polárnymi súradnicami (ϱ, α) , $\varrho \geq 0$, tj polpriamka vychádzajúca z počiatku a zvierajúca s kladným smerom osi Ox uhol α) vyznačme bod M s polárnymi súradnicami $(f(\alpha), \alpha)$. Otáčajme teraz polpriamkou p okolo bodu $(0, 0)$ proti smeru hodinových ručičiek, až kým sa neprekryje s polpriamkou $\varphi = \beta$; na otáčajúcej sa polpriamke p pritom pohybuje bodom M tak, aby v okamžiku, keď sa p kryje s polpriamkou $\varphi = \gamma$ (kde $\gamma \in [\alpha, \beta]$, tj. keď zvierá s kladným smerom osi Ox uhol γ), bola jeho vzdialenosť od bodu $(0, 0)$ rovná číslu $f(\gamma)$ ¹² (teda ak funkcia f rastie (klesá), tak bod M sa vzdaluje od (približuje k) bodu $(0, 0)$); potom dráhou bodu M je krivka K .

Na základe toho môžeme teraz — keďže poznáme graf funkcie $y = \sin 5x$ (a vieme teda, kde táto funkcia rastie a kde klesá) — načrtnúť krivky K_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) dané rovnicami

$$\varrho = \sin 5\varphi, \quad \varphi \in \left[\frac{2i\pi}{5}, \frac{(2i+1)\pi}{5}\right], \quad i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

ktorých zjednotením je hľadaná krivka L (pozri obr. 6)¹³; pritom — pretože číslo $2\pi/5$ je periódou funkcie $y = \sin 5x$ — krivka K_i je obrazom krivky K_{i-1} pri otočení o uhol $2\pi/5$ okolo bodu $(0, 0)$ proti smeru hodinových ručičiek ($i = 1, 2, 3, 4$); súčasne zo súmernosti grafu funkcie $y = \sin 5x$, $x \in [2i\pi/5, (2i+1)\pi/5]$, podľa priamky $x = (4i+1)\pi/10$ vyplýva súmernosť krivky K_i podľa priamky obsahujúcej polpriamku $\varphi = (4i+1)\pi/10$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$).

422. Zostrojte nasledujúce krivky (ak má číslo úlohy exponent ¹, stačí použiť len prvé derivácie):

1. $x = -5t^2 + 2t^5$, $y = -3t^2 + 2t^3$;
2. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$;
3. $x^4 + 2y^3 = 4x^2y$ (položte $y = tx$) ;
- 4¹. $4y^2 = 4x^2y + x^5$ (položte $y = tx^2$) ;
5. $x = \frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y = \frac{(t-2)^2}{t-1}$;
6. $x^3 - 2x^2y - y^2 = 0$;
- 7¹. $y^5 + x^4 = xy^2$ (položte $x = ty^3$) ;
8. $x^5 + y^5 = xy^2$;
9. $x^3 + y^3 = 3axy$ (Descartesov list) ;
10. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$ (asteroida) ;
11. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ (cykloida) ;
12. $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$ (kardioida) ;
13. $\varrho = 1 + 2 \cos \varphi$ (Pascalova závitnica)¹⁴;
14. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

¹¹Bernoulliho lemniskáta je geometrické miesto bodov, ktorých súčin vzdialeností od bodov $(-c, 0)$ a $(c, 0)$ je konštantný a rovná sa c^2 , možno ju popísať rovnicou $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$

¹²ak v definícii polárnych súradníc nahradíme podmienku „ $\varrho \geq 0$ “ podmienkou „ $\varrho \in \mathbf{R}$ “ (pozri poznámku ⁴ k definícii polárnych súradníc; v takom prípade stráca poznámka ⁶ k pr. 410.4 platnosť) a $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkcia, tak bod M leží v prípade, že $f(\gamma) \geq 0$, na polpriamke $\varphi = \gamma$ vo vzdialenosti $f(\gamma)$ od bodu $(0, 0)$, a leží na opačnej polpriamke $\varphi = \pi + \gamma$ vo vzdialenosti $|f(\gamma)|$ od bodu $(0, 0)$ pre $f(\gamma) < 0$

¹³zhodou okolností (čitateľovi odporúčame rozmyslieť si, v čom táto zhoda okolností spočíva) je v tomto prípade tá istá krivka popísaná aj rovnicou $\varrho = \sin 5\varphi$, kde ϱ a φ chápeme ako „všeobecnejšie polárne súradnice“ v zmysle poznámky ⁴

obr. 6. $\varrho = \sin 5\varphi$

Riešenie. 5. Ak má parametrické vyjadrenie krivky tvar

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

pričom nie je určená množina, na ktorej uvažujeme funkcie φ a ψ , kladieme $M := D(\varphi) \cap D(\psi)$. V našom prípade

$$\varphi(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \quad \psi(t) = \frac{(t-2)^2}{t-1},$$

teda $D(\varphi) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $D(\psi) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $M = D(\varphi) \cap D(\psi) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

Pri zobrazovaní krivky K s parametrickým vyjadrením

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in M,$$

kde množina M je zjednotením konečného počtu intervalov a funkcie φ , ψ sú spojité na M , postupujeme spravidla nasledovne:

- riešením rovníc $\varphi(t) = 0$, $t \in M$, resp. $\psi(t) = 0$, $t \in M$, nájdeme priesečníky krivky K s osou Oy , resp. Ox ;
- množinu M rozdelíme na intervaly J_1, \dots, J_n tak, aby na každom z nich boli funkcie φ a ψ rýdzomonotónne (ak sú funkcie φ , ψ diferencovateľné, stačí teda vyšetriť ich rast a klesanie pomocou znamienka funkcií φ' , ψ'); rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in J_i,$$

je tak parametricky daná rýdzomonotónna spojitá funkcia $y = f_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$)¹⁵;

- nájdeme množiny $\varphi(J_i)$, $\psi(J_i)$, $i = 1, \dots, n$ (prvá z nich je zrejme definičným oborom a druhá oborom hodnôt funkcie f_i), na to stačí — pretože funkcie φ , ψ sú na J_i rýdzomonotónne a spojité — nájsť funkčné hodnoty, resp. príslušné jednostranné limity funkcií φ , ψ v krajných bodoch intervalu J_i ; v prípade, že niektorá z týchto limít je nevlastná, vyšetříme existenciu asymptoty krivky K ;
- na základe znamienka druhej derivácie funkcie f_i (samozrejme pokiaľ táto derivácia existuje) vyšetříme konvexnosť a konkávnosť funkcie f_i ;
- načrtneme grafy jednotlivých funkcií f_i , $i = 1, \dots, n$, ktorých zjednotením je krivka K (pokiaľ pritom nie je zrejmé, či sa grafy dvoch funkcií f_i a f_j pretnú alebo nepretnú, vyšetříme, či existujú $u \neq v$, $u \in J_i$, $v \in J_j$ také, že $\varphi(u) = \varphi(v)$, $\psi(u) = \psi(v)$; ak áno, pretínajú sa grafy funkcií f_i a f_j v bode $(\varphi(u), \psi(u))$).

¹⁴vo všeobecnosti je Pascalova závitnica daná rovnicou $\varrho = a \cos \varphi + l$ ($a > 0$, $l > 0$); špeciálne pre $a = l$ dostávame kardioidu

¹⁵a tiež rýdzomonotónna spojitá funkcia $x = g_i(y)$ inverzná k funkcii f_i

V našom prípade, keď parametrické vyjadrenie krivky K má tvar

$$x = \varphi(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \quad y = \psi(t) = \frac{(t-2)^2}{t-1}, \quad t \in M = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty),$$

je $\varphi(t) = 0$ pre $t = -2$, teda priesečníkom krivky K s osou Oy je bod $(\varphi(-2), \psi(-2)) = (0, -16/3)$, a $\psi(t) = 0$ pre $t = 2$, teda priesečníkom s osou Ox je bod $(16/3, 0)$. Ďalej

$$\varphi'(t) = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}, \quad t \in M, \quad \psi'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}, \quad t \in M,$$

a pretože $\varphi'(t) = 0$ pre $t = 0, t = -2$, $\psi'(t) = 0$ pre $t = 0, t = 2$, dostávame

$$J_1 = (-\infty, -2], \quad J_2 = [-2, -1), \quad J_3 = (-1, 0], \quad J_4 = [0, 1), \quad J_5 = (1, 2], \quad J_6 = [2, \infty).$$

Krivka K je teda zjednotením grafov šiestich funkcií $y = f_1(x), \dots, y = f_6(x)$, daných parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in J_i, \quad i = 1, \dots, 6.$$

V nasledujúcej tabuľke sú zaznačené limity funkcií $\varphi|_{J_i}, \psi|_{J_i}$ v krajných bodoch intervalu J_i ($i = 1, \dots, 6$):

	$(-\infty, -2]$	$[-2, -1)$	$(-1, 0]$	$[0, 1)$	$(1, 2]$	$[2, \infty)$
φ	$-\infty \quad 0$	$0 \quad -\infty$	$\infty \quad 4$	$4 \quad \frac{9}{2}$	$\frac{9}{2} \quad \frac{16}{3}$	$\frac{16}{3} \quad \infty$
ψ	$-\infty \quad -\frac{16}{3}$	$-\frac{16}{3} \quad -\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2} \quad -4$	$-4 \quad -\infty$	$\infty \quad 0$	$0 \quad \infty$

Odtiaľ vidíme, že definičným oborom funkcií f_1, \dots, f_6 sú postupne intervaly $(-\infty, 0], (-\infty, 0], [4, \infty), [4, 9/2), (9/2, 16/3], [16/3, \infty)$. Ďalej, pretože $\lim_{t \rightarrow -1-} \varphi(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow -1-} \psi(t) = -9/2$, je priamka $y = -9/2$ horizontálnou asymptotou krivky K pre $x \rightarrow -\infty$, a pretože $\lim_{t \rightarrow -1+} \varphi(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow -1+} \psi(t) = -9/2$, je priamka $y = -9/2$ aj horizontálnou asymptotou krivky K pre $x \rightarrow \infty$. Z rovností $\lim_{t \rightarrow 1-} \varphi(t) = 9/2$, $\lim_{t \rightarrow 1-} \psi(t) = -\infty$ a $\lim_{t \rightarrow 1+} \varphi(t) = 9/2$, $\lim_{t \rightarrow 1+} \psi(t) = \infty$ vyplýva, že priamka $x = 9/2$ je vertikálna asymptota krivky K .

Keďže $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) = -\infty$ a $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$, môže mať krivka K aj asymptoty so smernicou; vyšetríme ich existenciu: pretože

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{(t-2)^2(t+1)}{(t+2)^2(t-1)} = 1 \quad (=: k),$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (\psi(t) - k\varphi(t)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{(t-2)^2}{t-1} - \frac{(t+2)^2}{t+1} \right) = -6,$$

je priamka $y = x - 6$ asymptota so smernicou krivky K pre $x \rightarrow -\infty$, podobne z rovností

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = 1 \quad (=: k), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\psi(t) - k\varphi(t)) = -6,$$

vyplýva, že priamka $y = x - 6$ je aj asymptotou so smernicou krivky K pre $x \rightarrow \infty$.

Pretože pre $t \in (-\infty, -2)$ je $\varphi'(t) < 0$, má podľa vety 1 funkcia f_1 deriváciu v každom bode množiny $\varphi((-\infty, -2)) = (-\infty, 0)$, tj. v každom vnútornom bode svojho definičného oboru; rovnako z vety 1 vyplýva existencia derivácie funkcií f_2, f_3, f_4 v každom vnútornom bode ich definičného oboru a existencia derivácie funkcií f_5, f_6 v každom bode ich definičného oboru¹⁶, tieto derivácie sú dané parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \quad y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{(t-2)(t+1)^2}{(t+2)(t-1)^2} \quad (=: \Psi(t)), \quad (3)$$

kde parameter t postupne prebieha intervaly $(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2], [2, \infty)$. (Otázkou existencie $(f_1)'_-(\varphi(-2)), (f_2)'_-(\varphi(-2)), (f_3)'_+(\varphi(0)), (f_4)'_+(\varphi(0))$, ktorú nemožno zodpovedať len na základe vety 1, sa budeme zaoberať neskôr.)

¹⁶v prípade funkcií f_5, f_6 a bodu $16/3$ ide o jednostranné derivácie

Ak použijeme vetu 1 na nájdenie derivácie funkcií daných parametricky rovnicami (3), vidíme, že funkcie f_1, f_2, f_3, f_4 , resp. f_5, f_6 majú v každom vnútornom bode svojho definičného oboru, resp. v každom bode svojho definičného oboru druhú deriváciu, danú parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \quad y = \frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{12(t+1)^3}{t(t+2)^3(t-1)^3},$$

kde parameter t prebieha postupne intervaly $(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2], [2, \infty)$ ¹⁷. Zo znamienka funkcie $\frac{12(t+1)^3}{t(t+2)^3(t-1)^3}$ vnútri jednotlivých uvedených intervalov vyplýva, že funkcie f_1, f_3, f_5 a f_6 sú rýdzo konvexné, funkcie f_2 a f_4 rýdzo konkávne.

Teraz by sme už v podstate mohli načrtnúť grafy funkcií f_1, \dots, f_6 , vyšetříme však ešte predtým pre úplnosť existenciu $(f_1)'_-(0), (f_2)'_-(0), (f_3)'_+(4), (f_4)'_+(4)$:

Inverzná funkcia $x = f_1^{-1}(y)$ k funkcii $y = f_1(x)$ je daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (-\infty, -2],$$

táto funkcia je rastúca ako superpozícia rastúcich funkcií φ a ψ^{-1} a podľa vety 1 má v bode $\psi(-2) = -16/3$ jednostrannú deriváciu

$$(f_1^{-1})'_-\left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{\varphi'(-2)}{\psi'(-2)} = 0,$$

preto podľa vety o derivácii inverznej funkcie je $(f_1)'_-(\varphi(-2)) = (f_1)'_-(0) = \infty$. Podobne možno dokázať rovnosť $(f_2)'_-(0) = -\infty$ ¹⁸.

Ako sme už ukázali, spojitá funkcia f_3 má v každom vnútornom bode svojho definičného oboru deriváciu danú parametricky rovnicami

$$x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \quad y = \frac{(t+1)^2(t-2)}{(t-1)^2(t+2)}, \quad t \in (-1, 0).$$

Takto parametricky daná funkcia $y = f_3'(x)$ má v bode $x = 4$ limitu sprava rovnú -1 (pozri pr. 414.1), z čoho vyplýva $(f_3)'_+(4) = -1$ (pozri pr. I.384.1, ktorého analógia platí aj pre jednostranné limity), podobne sa dokáže rovnosť $(f_4)'_+(4) = -1$; teda grafy funkcií f_3 a f_4 majú v bode $(4, -4)$ spoločnú dotyčnicu sprava.

Pokiaľ sa teraz na základe získaných údajov pokúsime načrtnúť grafy funkcií f_1, \dots, f_6 , zistíme, že nie je jasné, či grafy funkcií f_3 a f_4 , ktoré na seba „nadväzujú“ v bode $(4, -4)$, majú okrem tohto bodu ešte ďalší spoločný bod. Odpoveď na túto otázku možno (v tomto prípade) nájsť dvoma spôsobmi:

1. Keby sa grafy funkcií f_3 a f_4 pretli v niektorom bode rôznom od bodu $(4, -4)$ ($= (\varphi(0), \psi(0))$), museli by existovať čísla $s \in (-1, 0), t \in (0, 1)$, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$\varphi(s) = \varphi(t), \quad \psi(s) = \psi(t),$$

tj.

$$\frac{(s+2)^2}{s+1} = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \quad \frac{(s-2)^2}{s-1} = \frac{(t-2)^2}{t-1},$$

odtiaľ

$$(s+2)^2(t+1) = (t+2)^2(s+1), \quad (s-2)^2(t-1) = (t-2)^2(s-1),$$

a po roznásobení a úprave

$$\begin{aligned} s^2t + s^2 &= t^2s + t^2, \\ s^2t - s^2 &= t^2s - t^2. \end{aligned}$$

¹⁷v prípade funkcií f_5, f_6 a bodu $16/3$ ide o jednostranné druhé derivácie

¹⁸pre $t \in (-\infty, -1)$ je $\psi'(t) > 0$, teda rovnicami $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (-\infty, -1)$ je parametricky daná funkcia $x = g(y)$, ktorej graf je zjednotením grafov funkcií f_1 a f_2 ; z vety 1 vyplýva $g'(\psi(-2)) = \varphi'(-2)/\psi'(-2) = 0$, teda dotyčnicou ku grafu funkcie g v bode $(\varphi(-2), \psi(-2)) = (0, -16/3)$ je priamka $x = 0$, čo je skutočne v súlade s definíciou dotyčnice ku krivke K , podľa ktorej smerovým vektorom dotyčnice v bode $(\varphi(-2), \psi(-2))$ je vektor $(\varphi'(-2), \psi'(-2)) = (0, 8/9)$

Ak tieto rovnice sčítame, dostaneme

$$2st(s-t) = 0,$$

teda pre hľadané riešenia by muselo platiť $s = 0$ alebo $t = 0$ alebo $s = t$, čo — keďže má platiť $s \in (-1, 0)$, $t \in (0, 1)$ — nie je možné. To znamená, že grafy funkcií f_3 a f_4 majú jediný spoločný bod $(4, -4)$.

2. Grafy funkcií f_3 a f_4 majú spoločnú dotyčnicu sprava v bode $(4, -4)$, pritom na intervale $(4, \infty)$ leží graf rýdzo konvexnej funkcie f_3 nad touto dotyčnicou (pozri pr. I.362.1) a graf rýdzo konkávnej funkcie f_3 leží na intervale $(4, 9/2)$ pod touto dotyčnicou, preto okrem bodu $(4, -4)$ nemôžu mať grafy funkcií f_3 a f_4 žiadne ďalšie spoločné body.

Vyšetrovaná krivka je znázornená na obr. 7.

$$\text{obr. 7. } x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \quad y = \frac{(t-2)^2}{t-1}$$

Veta 2. Nech funkcie φ , ψ sú diferencovateľné na intervale $[a, b]$, pričom $\varphi' \in \mathcal{R}[a, b]$, $\psi' \in \mathcal{R}[a, b]$. Potom dĺžkou krivky danej parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b], \quad (4)$$

je číslo

$$\int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Špeciálne, ak funkcia f je diferencovateľná na intervale $[a, b]$ a $f' \in \mathcal{R}[a, b]$, tak dĺžkou krivky, ktorej rovnica v polárnych súradniciach má tvar

$$\varrho = f(\varphi), \quad \varphi \in [a, b], \quad (5)$$

je číslo

$$\int_a^b \sqrt{f^2(\varphi) + f'^2(\varphi)} d\varphi.$$

423. Nájdite dĺžku nasledujúcich kriviek:

1. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

2. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

3. $x = \operatorname{ch}^3 t$, $y = \operatorname{sh}^3 t$, $t \in [0, T]$;

4. slučky krivky $x = 2t^3(1-t^2)$, $y = \sqrt{15}t^4$;

5. $x = \int_1^t \frac{\cos z \, dz}{z}$, $y = \int_1^t \frac{\sin z \, dz}{z}$ od bodu $(0,0)$ po najbliži bod, v ktorom je dotyčnica rovnobežná s osou Oy ;

6. $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$;

7. $\varrho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$;

8. $\varphi = \frac{1}{2} \left(\varrho + \frac{1}{\varrho} \right)$;

9. $\varphi = \int_0^{\varrho} \frac{\operatorname{sh} r}{r} \, dr$, $\varrho \in [0, R]$;

10. $\varrho = 1 + \cos t$, $\varphi = t - \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $0 \leq t \leq T < \pi$.

424. Na cykloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ nájdite bod, ktorý delí dĺžku jej prvého oblúka v pomere 1 : 3.

425. Dokážte, že pri kotúlení sa paraboly $p: x^2 = 4ay$ po osi Ox sa jej ohnisko (tj. bod $(0, a)$) pohybuje po reťazovke $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

Veta 3. Nech krivka K je daná parametricky rovnicami (4), pričom φ je rýdzomonotónna a diferencovateľná a ψ nezáporná spojité funkcia. Potom plošným obsahom útvaru ohraničeného krivkou K a priamkami $y = 0$, $x = \varphi(a)$, $x = \varphi(b)$ je číslo

$$P = \int_a^b |\varphi'(t)| \psi(t) \, dt.$$

Poznámka. Ak funkcia ψ je diferencovateľná na $[a, b]$ a φ je rastúca, tak použitím metódy per partes dostávame

$$P = \int_a^b \varphi'(t) \psi(t) \, dt = [\varphi(t) \psi(t)]_a^b - \int_a^b \varphi(t) \psi'(t) \, dt.$$

Ak teda $[\varphi(t) \psi(t)]_a^b = 0$, možno plošný obsah P vypočítať aj použitím vzorcov

$$P = - \int_a^b \varphi(t) \psi'(t) \, dt,$$

$$P = \frac{1}{2} \int_a^b (\varphi'(t) \psi(t) - \varphi(t) \psi'(t)) \, dt;$$

podobne možno uvažovať v prípade klesajúcej funkcie φ .

Veta 4. Nech $0 < b - a \leq 2\pi$, nech $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je spojité nezáporná funkcia. Potom plošným obsahom útvaru ohraničeného krivkou $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi \in [a, b]$, a polpriamkami $\varphi = a$, $\varphi = b$ je číslo

$$\frac{1}{2} \int_a^b f^2(\varphi) \, d\varphi.$$

426. Vypočítajte plošný obsah P útvarov ohraničených nasledujúcimi krivkami:

1. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$;

2. $x = \frac{1}{1+t^2}$, $y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$;

3. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, a spojnicou bodov $(a, 0)$ a $(a, -2\pi a)$;

4. asteroidou $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$;

5. kardiodou $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$;

6. $\varrho = a \sin n\varphi$, $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$;

7. $\varrho = a \cos \varphi$, $\varrho = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$, $a > 0$, pričom bod s pravouhlými súradnicami $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ leží v danom útvere;

8. $\varphi = \varrho \operatorname{arctg} \varrho$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$;

9. $\varrho = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $\varphi = t - \operatorname{arctg} t$, $0 \leq t \leq t_0$, $\varphi(t_0) \leq 2\pi$;

10. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

427. Vypočítajte plošný obsah tej časti útvaru ohraničeného Bernoulliho lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, ktorá leží vnútri kruhu $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

Veta 5. Nech krivka K je daná parametricky rovnicami (4), pričom φ je rýdzomonotónna spojite diferencovateľná a ψ nezáporná (nekladná) spojitá funkcia. Nech M je útvar ohraničený krivkou K a priamkami $y = 0$, $x = \varphi(a)$, $x = \varphi(b)$. Potom objemom telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M okolo osi Ox , je číslo

$$V = \pi \int_a^b \psi^2(t) |\varphi'(t)| dt.$$

Ak navyše $\varphi([a, b]) \subset [0, \infty)$, tak objemom telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M okolo osi Oy , je číslo

$$V = 2\pi \int_a^b \varphi(t) |\psi(t)| |\varphi'(t)| dt.$$

Veta 6. Nech $0 \leq a < b \leq \pi$, nech $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkcia a M je útvar ohraničený krivkou $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi \in [a, b]$, a polpriamkami $\varphi = a$, $\varphi = b$. Potom objemom telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M okolo osi Ox , je číslo

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_a^b f^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

428. Vypočítajte objem V telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M ohraničeného krivkami

1. $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, $b > 0$, a) okolo osi Ox , b) okolo osi Oy ;
2. $x = a(t^2 + 1)$, $y = \frac{at}{3}(3 - t^2)$, $|t| \leq \sqrt{3}$, a) okolo osi Ox , b) okolo osi Oy ;
3. $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$ a) okolo osi Ox , b) okolo osi Oy ;
4. $y = x^2$, $y = x$ okolo priamky $y = x$; 5. $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$ okolo osi Ox ;
6. $\varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ okolo priamky $y = x$;
7. $x(x^2 - y^2) = a(x^2 + y^2)$, $x = 3a$ okolo osi Ox .

Riešenie. 4. Priesečníkmi daných kriviek sú zrejme body $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M okolo priamky $y = x$, je rovnaký ako objem telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi Ox útvaru M' , ktorý získame otočením množiny M okolo bodu $(0, 0)$ o uhol $\pi/4$ v smere hodinových ručičiek ($\pi/4$ je uhol, ktorý zvierajú priamka $y = x$ a os Ox). Toto otočenie možno jednoducho popísať pomocou polárnych súradníc: obrazom bodu s polárnymi súradnicami (ϱ, φ) je bod $(\varrho, \varphi - \pi/4)$. Ak teda obrazom bodu s pravouhlými súradnicami (x, y) je bod (x', y') , tak zo vzťahov

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad x' = \varrho \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right), \quad y' = \varrho \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right)$$

dostávame

$$x' = \varrho \cos \varphi \cos \frac{\pi}{4} + \varrho \sin \varphi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y),$$

$$y' = \varrho \sin \varphi \cos \frac{\pi}{4} - \varrho \cos \varphi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x).$$

Obrazom grafu funkcie $y = x^2$, $x \in [0, 1]$, tj. množiny $\{(x, x^2); x \in [0, 1]\}$, je teda množina $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + x^2), \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - x) \right); x \in [0, 1] \right\}$, tj. krivka K daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^2 + t), \quad y = \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^2 - t), \quad t \in [0, 1].$$

Útvar M' je ohraničený krivkou K a osou Ox , pritom $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2t+1) > 0$ pre $t \in [0, 1]$, preto objem telesa, ktoré vznikne rotáciou M' okolo osi Ox , je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \psi^2(t) \varphi'(t) dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (t^2 - t)^2 (2t + 1) dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (2t^5 - 3t^4 + t^2) dt = \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{t^6}{3} - \frac{3t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{30\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Veta 7. Nech krivka K je daná parametricky rovnicami (4), pričom

1. funkcie φ, ψ sú spojite diferencovateľné na $[a, b]$;
2. $\forall t \in (a, b) : \varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$;
3. neexistujú $u, v \in [a, b]$, $u \neq v$. také, že $\varphi(u) = \varphi(v)$, $\psi(u) = \psi(v)$;
4. ψ je nezáporná (nekladná) funkcia.

Potom plošným obsahom plochy vytvorenej rotáciou krivky K okolo osi Ox je číslo

$$S = 2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

429. Vypočítajte plošný obsah S plochy vytvorenej rotáciou

1. krivky $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ a) okolo osi Ox , b) okolo priamky $y = x$;
2. krivky $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, a) okolo osi Ox , b) okolo osi Oy ;
3. krivky $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ okolo osi Ox ;
4. oblúka paraboly $y^2 = 2px$ odrezaného priamkou $y = 2x$ okolo tejto priamky.

430. Vypočítajte veľkosť povrchu telesa, ktoré vznikne rotáciou kocky s hranou dĺžky a okolo jej diagonály!