

Riešenia, návody, poznámky

„Milý kamaráde,“ řekl jednorochní dobrovolník, „můj rozhovor, který bude nyní následovat, dokáže vám neobyčejně jasně, že chyb není nikdo ušetřen! Jsem přesvědčen, pánové, že vy tam vzadu přestanete hrát „maso“, neboť to, co vám nyní povím, bude velice zajímavé už tím, že mnohým odborným výrazům neporozumíte.“

J. Hašek: Osudy dobrého vojáka Švejka

1. Neurčitý integrál

1 **1.** $x - \frac{5x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + C$; **2.** $27x - 9x^3 + \frac{9x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + C$; **3.** $a \ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C$; **4.** $x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C$; **5.** $\frac{340x^{0.83}}{83} + C$; **6.** $a^2x - \frac{9a^{4/3}x^{5/3}}{5} + \frac{9a^{2/3}x^{7/3}}{7} - \frac{x^3}{3} + C$; **7.** $\frac{4x^{5/4}}{5} - \frac{24x^{17/12}}{17} + \frac{4x^{3/4}}{3} + C$; **8.** $\frac{4x^{7/4}}{7} + 4x^{-1/4} + C$; **9.** $-\operatorname{arctg} x + C = x + \operatorname{arctg} x + C \left(\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \right)$; **10.** $x - 2 \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C$; **11.** $\arcsin x + \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + C = -\arccos x + \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + C$; **12.** $3x - 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^x / \ln \left(\frac{3}{2} \right) + C$; **13.** $-\frac{2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5 \cdot 2^x \ln 2} + C$; **14.** $\frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C$ (použijte vzorec $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$); **15.** $\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C$ ($\sin \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$); **16.** $-\operatorname{ctg} x - x + C$; **17.** $x - \operatorname{th} x + C$ ($\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$);

2 **1a)** $-\frac{x^2}{2} + C$ pre $x < 0$, $\frac{x^2}{2} + C$ pre $x \geq 0$; **1c)** $-2x + C$ pre $x < -1$, $x^2 + 1 + C$ pre $x \in [-1, 1]$, $2x + C$ pre $x > 1$; **1d)** $\frac{x^3}{3} + C$ pre $x < -1$, $x + \frac{2}{3} + C$ pre $x \in [-1, 1]$, $\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3} + C$ pre $x > 1$; **2.** ak položíme $x = e^t$, dostaneme $f'(t) = 1$ pre $t \leq 0$, $f'(t) = e^t$ pre $t > 0$, odtiaľ $f(t) = t + C$ pre $t \leq 0$, $f(t) = e^t - 1 + C$ pre $t > 0$;

3 napr. $f(x) = g'(x)$, kde $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pre $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, $g(x) = 0$ pre $x = 0$;

4 **1.** áno (nech $|F(x)| \leq M$ pre $x \in (a, b)$; zvolme $c \in (a, b)$ pevne; potom pre $x \in (a, b)$ platí $|F(x)| = |(F(x) - F(c)) + F(c)| \leq |F(x) - F(c)| + |F(c)|$; pritom podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote je $|F(x) - F(c)| = |f(d)| |x - c| \leq M|b - a|$; teda $|F(x)| \leq |F(c)| + M|b - a|$; **2.** nie (napr. $F(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$);

5 **1.** $\ln|x - a| + C$; **2.** $\frac{1}{22}(2x - 3)^{11} + C$; **3.** $-\frac{2}{15}(5x - 2)^{-3/2} + C$; **4.** $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}x + C$
 $\left(\frac{1}{2 + 3x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{3/2}x)^2}, \text{ subst. } \sqrt{\frac{3}{2}}x = t\right)$; **5.** $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \sqrt{\frac{3}{2}}x + \sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 1} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot$
 $\ln \left| \sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 2} \right| + C$; **6.** $\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{7}} + C$; **8.** $\arcsin \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C$; **9.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + 1} \right| + C$ $\left(= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sqrt{2}x - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2x^2 - x + 2} \right| + C \right)$; **10.** $-e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} + C$;
11. $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$; **12.** $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$ ($1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$); **13.** $x - 3 \operatorname{cth} \frac{x}{3} + C$; **15.** $\frac{(1-x)^{99}}{99} - \frac{(1-x)^{98}}{49} + \frac{(1-x)^{97}}{97} + C$;

6 **1.** $\frac{\sin^6 x}{6} + C$; **2.** $\frac{(1+x^2)^{11}}{22} + C$ (subst. $1+x^2 = t$); **3.** $-\sqrt{1+x^2} + C$; **4.** $\frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}{4} + C$;
5. $\frac{(8x^3 + 27)^{1/3}}{8} + C$; **6.** $\frac{-e^{-x^2}}{2} + C$; **7.** $\ln(2 + e^x) + C$; **8.** $\frac{2}{3} \ln^3 x - 3 \ln x + C$ (subst. $\ln x = t$); **9.** $-\ln|\cos x| + C$ ($\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, subst. $\cos x = t$); **10.** $\ln|\arcsin x| + C$; **11.** $3 \operatorname{th} x + C$;
13. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}} + C$; **14.** $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| + C$ (subst. $x^4 = t$); **15.** $\frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x^2 + 3}{\sqrt{17}} + C$;
17. $2 \operatorname{sgn} x \cdot \ln \left| \sqrt{|x|} + \sqrt{|x+1|} \right| + C$, $x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ (definičným oborom funkcie $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$ je množina $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$; pre $x > 0$ platí $\sqrt{x(1+x)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x}$ — použijeme substitúciu $\sqrt{x} = t$; pre $x < -1$ je $\sqrt{x(1+x)} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-1-x}$ — použijeme substitúciu $\sqrt{-x} = t$; možno postupovať aj analogicky ako v pr. 5.6-9, vtedy dostaneme výsledok v tvare $\ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x} \right| + C$); **18.** $-(1-x^2)^{1/2} + 2 \cdot \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} - \frac{(1-x^2)^{5/2}}{5} + C$ (subst. $\sqrt{1-x^2} = t$, $-\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$); **19.** $\frac{2}{n} \left| x^{n/2+1} + \sqrt{1+x^{n+2}} \right| + C$ (subst. $x^{n/2+1} = t$); **20.** $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ ($\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x$, subst. $\sin x = t$); **21.** $\arcsin \frac{2 \sin x - 1}{3} + C$; **22.** $\frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2}$ (subst. $\sin^2 x = t$, $2 \sin x \cos x dx = dt$); **23.** $-\frac{\ln \left| \cos x + \sqrt{\cos^2 x - 1/2} \right|}{\sqrt{2}} + C$ $\left(= -\frac{\ln \left| \sqrt{2} \cos x + \sqrt{\cos 2x} \right|}{\sqrt{2}} + C \right)$; **24.** $\ln |\ln(\ln x)| + C$; **25.** $\operatorname{arctg} e^x + C$; **27.** $\frac{1}{2 \ln(2/3)} \cdot \ln \left| \frac{3^x + 2^x}{3^x - 2^x} \right| + C$ (integrand možno rozšírením výrazom $\frac{1}{9^x}$ upraviť na tvar $\frac{(2/3)^x}{1 - (2/3)^{2x}}$; subst. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$);

7 **2.** $2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$; **3.** $(\sqrt[3]{x+1} + 1)^3 - \frac{9(\sqrt[3]{x+1} + 1)^2}{2} + 9(\sqrt[3]{x+1} + 1) - 3 \ln |\sqrt[3]{x+1} + 1| + C$ (použili sme najprv substitúciu $x = t^3 - 1$, ktorá vyplýva zo vzťahu $\sqrt[3]{x+1} = t$, potom substitúciu

$$^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 2}) \right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 2} \right| + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + C \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 2} \right| + C; \text{ teda číslo } \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ sme „zahrnuli“ do integračnej konštanty}$$

$1+t=z$); **4.** $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$; **5.** $\frac{1}{12}\left((2x-5)^{3/2}+30\sqrt{2x-5}-\frac{111}{\sqrt{2x-5}}\right)+C$ (ak chceme, aby platilo $(2x-5)^{3/2}=t$, stačí použiť substitúciu $x=\frac{t^{2/3}+5}{2}$); **6.** $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$ (môžeme použiť dve za sebou nasledujúce substitúcie $x=\ln t$; $t=z^2-1$, $z\geq 1$ (prvú dostaneme zo vzťahu $e^x=t$, druhú zo vzťahu $\sqrt{t+1}=z$) alebo — čo je to isté — priamo substitúciu $x=\ln(z^2-1)$, $z\geq 1$, ktorú nájdeme, ak vyjadríme x z rovnosti $\sqrt{1+e^x}=z$);

8 **1.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$ (subst. $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, pri úpravách sme využili rovnosti $\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $\sin(\arcsin x)=x$); **2.** $\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$ (subst. ako v pr. 8.1, $\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$); **3.** $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$; **4.** $\frac{1}{2}\arctg x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+C$ (subst. $x=\operatorname{tg} t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, pri úpravách sme použili vzťahy $1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$, $\sin\arctg x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos\arctg x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$); **5.** $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$; **6.** $(\operatorname{sgn} x)\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C$ (definičný obor integrandu je $(-\infty,-a)\cup(a,\infty)$; na intervale $(-\infty,-a)$ použijeme substitúciu $x=\frac{a}{\cos t}$, $t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, na intervale (a,∞) substitúciu $x=\frac{a}{\cos t}$, $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$);

9 použite substitúciu $x=t^n$, $t\geq 0$, pre n párne, resp. $x=t^n$, $t\in\mathbf{R}$, pre n nepárne a využite, že primitívnymi funkciami k polynómu sú polynómy;

10 $f(x)=-\frac{x^2}{2}-C$, $x\geq 0$; $g(x)=\sin x-\frac{x^4}{2}+C$ ($C\in\mathbf{R}$) (z prvej v príklade vystupujúcej podmienky integrovaním dostaneme $\frac{f(x^2)}{2}+g(x)=\sin x-\frac{3}{4}x^4+K$) odporúčame čitateľovi urobiť skúšku správnosti získaných riešení;

11 **1.** $x\sin x+\cos x+C$; **2.** $-(x+1)e^{-x}+C$; **3.** $\frac{x^2}{2(1+x^2)}-\frac{x}{2}+\frac{\arctg x}{2}+C$
4. $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C$; **5.** $-\frac{2x^2\ln^2 3+2x\ln 3+1}{9x\cdot 4\cdot\ln^3 3}+C$; **6.** $-\frac{2x^2+5}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C$; **7.** $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$ ($u'=\frac{1}{x^2}$, $v=\ln^2 x$)²; **8.** $\operatorname{tg} x\cdot\ln\cos x+\operatorname{tg} x-x+C$; **9.** $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$; **10.** $\frac{2}{27}x^{3/2}(9\ln^2 x-12\ln x+8)+C$; **11.** $\frac{x^2}{2}\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|+\frac{x}{2}-\frac{\ln|x+1|}{2}+C$ (pri derivovaní zloženej funkcie $\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$ využite, že $(\ln|u|)'=\frac{1}{u}$; vyplýva to okrem iného zo vzorca 2 v tabuľke integrálov); **12.** $x\ln x-x+C$; **14.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; **15.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$; **17.** $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+C$ ³; **18.** $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$;

12 **1.** $-\frac{e^{-x^3}}{3}(1+x^3)+C$ (subst. $x^3=t$); **2.** $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$ (subst. $x=t^2$, $t\geq 0$);
3. $(12\sqrt{x}-2x\sqrt{x})\cos\sqrt{x}+(6x-12)\sin\sqrt{x}+C$; **4.** $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$ ($u=\arcsin^2 x$, $v'=1$, alebo subst. $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$); **5.** $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{\cos 2x}{8}+C$ ($\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-$

²všimnime si, že v pr. 11.7-9 nie je definičným oborom integrandu interval, ale zjednotenie dvoch otvorených disjunktných intervalov, resp. spočítateľného systému po dvoch disjunktných otvorených intervalov; metódu per partes by sme mali používať na každom z týchto intervalov zvlášť—veta 6 je totiž formulovaná pre funkcie definované na intervale; keďže však na každom z týchto intervalov je zápis výpočtu rovnaký, môžeme použiť metódu per partes na celom definičnom obore „naraz“

³ak $I:=\int e^{ax}\sin bx dx$, $J:=\int e^{ax}\cos bx dx$, tak použitím metódy per partes v podobe $u'=e^{ax}$, $v=\sin bx$, resp. $u'=e^{ax}$, $v=\cos bx$, dostávame $I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}J$, $J=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I$, z tejto sústavy rovníc už vieme vyjadriť integrály I aj J ; tento postup, pri ktorom nájdeme hneď dva „párové“ integrály naraz, možno použiť aj pri riešení pr. 11.18

$\cos 2x)$; **6.** $\frac{e^{2x}}{8}(2 - \cos 2x - \sin 2x) + C$; **7.** $\frac{e^{2x}}{2} - e^x(\cos x + \sin x) + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$; **8.** $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{\operatorname{ctg} x}{2} + C$; **9.** $-\sqrt{1-x^2} \arccos x - x + C$; **10.** $\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x + C$; **11.** $-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C$ ($u' = \frac{x}{(1+x^2)^2}$, $v = x$)⁴; **12.** $\frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2+a^2} + C$ ($\frac{1}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} \right)$); **13.** $\frac{1}{2} (\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}) + C$ ($u' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$); **14.** $\frac{1}{2} (a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}) + C$ (pre $x \in (-a, a)$ platí $\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ⁵); **15.** $\frac{e^{\operatorname{arctg} x(x-1)}}{2\sqrt{1+x^2}} + C$ (najprv subst. $\operatorname{arctg} x = t$); **16.** $\frac{(x+1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C$; **17.** $\frac{e^{x+1}}{x+1} + C$ (najprv subst. $x+1 = t$; metódu per partes použite len na výpočet $\int \frac{e^t}{t^2} dt$; $u' = \frac{1}{t^2}$, $v = e^t$);

13 $xf'(x) - f(x) + C$;

16 **2.** $I_n = \frac{1}{2n+1} x(a^2 - x^2)^n + \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$, $n \neq -\frac{1}{2}$; **3.** $I_n = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - I_{n-2}$, $n \neq 1$
 ($u' = \frac{\sin x}{\cos^n x}$, $v = \sin^{n-1} x$; tento rekurentný vzťah možno odvodiť aj bez použitia metódy per partes:
 $\int \operatorname{tg}^n x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$); **4.** $I_n = \frac{1}{n} x^{n-1} \sqrt{x^2+a^2} - a^2 \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \neq 0$ ($u' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $v = x^{n-1}$); **5.** $I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \neq 0$; **6.** $I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \neq 0$ (možno použiť substitúciu $x = t - \frac{\pi}{2}$ a rekurentný vzťah odvodený v pr. 16.5);

18 **1.** $e^{2x} \left(\frac{3}{2} x^3 - \frac{9}{4} x^2 + \frac{9}{4} x - \frac{77}{8} \right) + C$; **2.** $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4} \right) \sin 2x + \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) \cos 2x + C$ (platí $\int P_n(x) \cos ax dx = Q_n(x) \sin ax + R_{n-1}(x) \cos ax + C$); **3.** $\left(-\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{11}{27} \right) \cos 3x + \left(\frac{2x}{9} + \frac{2}{9} \right) \sin 3x + C$; **4.** $\left(-\frac{3}{2} x^3 + \frac{7}{4} x - \frac{1}{2} \right) \cos 2x + \left(\frac{11}{4} x^2 + \frac{1}{8} \right) \sin 2x + C$ (výsledok sme hľadali v tvare $Q_3(x) \cos 2x + R_2(x) \sin 2x$);

19 **1.** $\ln|x^2+3x-10| + C$; **2.** $-\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| + C$; **3.** $\frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1024}{3} \ln|x+2| + C$;

20 **2.** $\frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| - \frac{1}{3(x-1)} + C$; **3.** $\frac{1}{9(x-2)} + \frac{1}{54} \ln \left| \frac{x-5}{x+1} \right| + C$; **4.** $4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{4}{x-2} - \frac{1}{x-1} + C$; **5.** $\ln|x+2| - \frac{1}{2x^2} + C$; **6.** $\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{9}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{8} \ln|x+1| + \frac{31}{8} \ln|x-1| + C$;

21 **1.** $\frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; **2.** $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{x^2+2} + C$; **4.** $\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

⁴v príkladoch 12.11-14, ktoré tu riešime metódou per partes, možno použiť aj goniometrické substitúcie: v pr. 12.11 $x = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pri ďalších úpravách potom rovnosti $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$, $\sin(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1+x^2}$; v pr. 12.12 $x = \operatorname{atg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (pozri pr. 8.4), v pr. 12.13 $x = \sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, alebo $x = \cos t$, $t \in (0, \pi)$ (pozri pr. 8.3), v pr. 12.14 $x = a \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, alebo $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$ (pozri pr. 8.2)

⁵funkciu $f(x) = \frac{1}{2} (a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}) + C$ sme našli integráciou pravej strany tejto rovnosti, preto platí $\forall x \in (-a, a)$: $f'(x) = \sqrt{a^2-x^2}$; zostáva ešte overiť pravdivosť rovnosti $f'(x) = \sqrt{a^2-x^2}$ pre $x = a$, $x = -a$; hodnoty $f'(a)$, $f'(-a)$ pritom nemožno nájsť tabuľkovým derivovaním, na ich výpočet treba použiť tvrdenie z pr. I.384.1; inou možnosťou dôkazu rovnosti $f'(a) = f'(-a) = 0$ je tvrdenie z pr. 48

C ; **5.** $\ln|x+2| + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C$ (všimnite si, že koeficient pri najvyššej mocnине polynómu v menovateli integrandu nie je rovný 1 — porovnaj s predpokladmi vety 7; rozmyslite si, prečo môžeme rozklad integrandu na parciálne zlomky hľadať v tvare $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{3x^2-2x+4}$); **6.** $\frac{1}{5} \left(\ln \left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+1} \right) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} (x+1) \right) + C$;

22 **1.** $-\frac{1}{4} \left(\frac{x+2}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C$; **2.** $\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C$;
3. $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+x+1} \right) + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{5}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

23 **1.** $\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} \ln|x^3+2| + C$; **2.** $\frac{1}{6} \ln \frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; **3.** $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$; **4.** $\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + 2\operatorname{arctg} (x\sqrt{2}+1) + 2\operatorname{arctg} (x\sqrt{2}-1) \right) + C$ ($x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$)⁶; **5.** $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C$ ($x^4+x^2+1 = (x^2+1)^2 - x^2$)⁷; **6.** $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1} + \frac{1}{6} \left(\operatorname{arctg} (2x+\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} (2x-\sqrt{3}) \right) + C$ ($x^6+1 = (x^2)^3 + 1^3 = (x^2+1)(x^4-x^2+1)$); výsledok možno upraviť na tvar $\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x^3 + C$ ⁸);
7. $-\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6} \ln \frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$; **8.** $\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} +$

⁶pokiaľ hľadáme neurčitý integrál len na množine $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, môžeme použitím vzorca z pr. I.87.1 výsledok integrácie prepísať do podoby $F_1(x) + C$ kde $F_1(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ (výraz $\varepsilon\pi$ vystupujúci v uvedenom vzorci sme „zahrnuli“ do integračnej konštanty C ; na symbol C sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 1'; ak chceme pomocou predpisu funkcie F_1 zapísať predpis funkcie F , ktorá by bola primitívnu funkciou k $\frac{1}{x^4+1}$ na celej množine \mathbf{R} , môžeme postupovať ako v riešení

pr. 41.1, dostaneme tak
$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) + \vartheta(x), & \text{ak } x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, & \text{ak } x = -1 \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, & \text{ak } x = 1 \end{cases}, \quad \text{kde } \vartheta(x) \equiv 0 \text{ pre } x < -1, \vartheta(x) \equiv \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \text{ pre } x \in (-1, 1), \vartheta(x) \equiv \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ pre } x > 1$$

⁷neurčitý integrál na množine $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ možno použitím vzorca z pr. I.87.1 napísať v tvare $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C$; použitím vzorca z pr. I.62.2 možno neurčitý integrál na množine $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ napísať v tvare $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1-x^2}{x\sqrt{3}} + C$

⁸platí totiž $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \left(\operatorname{arctg} (2x+\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} (2x-\sqrt{3}) \right) + C \stackrel{(1)}{=} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x \right) + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2} + C \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2} + C \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{1}{(-x^3)} + C \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x^3 + C$ (v (1) a (3) sme použili vzorec z pr. I.87.1, v (2) a (4) vzorec z pr. I.62.2, v (4) navyše rovnosť $\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg} \alpha$; konštanty vystupujúce v použitých vzorcoch sú „zahrnuté“ do integračnej konštanty C ; uvedené rovnosti platia na množine $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, pretože však výraz na ľavej strane rovnosti (1) a výraz na pravej strane rovnosti (4) sú funkcie spojité na \mathbf{R} , platí rovnosť medzi týmito výrazmi na celej množine \mathbf{R} ; odporúčame čitateľovi, aby si najmä poslednú uvedenú úvahu podrobne rozmyslel

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C; \quad \mathbf{9.} \quad -\frac{1}{48x^3} + \frac{1}{32x} + \frac{x}{128(x^2+4)} + \frac{5}{256} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C \quad \left(\frac{1}{x^8+8x^6+16x^4} = \left(\frac{1}{x^2(x^2+4)} \right)^2 = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+4} \right)^2 \right); \quad \mathbf{10.} \quad \frac{1}{a+b^2} \left(\frac{b}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x+b)^2}{x^2+a} \right) + C \quad \text{pre } a > 0; \quad \frac{1}{2\sqrt{-a}(\sqrt{-a}-b)} \ln|x+\sqrt{-a}| + \frac{1}{2\sqrt{-a}(\sqrt{-a}+b)} \ln|x-\sqrt{-a}| + \frac{1}{a+b^2} \ln|x+b| + C \quad \text{pre } a < 0, a+b^2 \neq 0; \quad \frac{1}{4b^2} \ln \left| \frac{x-b}{x+b} \right| + \frac{1}{2b(x+b)} + C \quad \text{pre } a < 0, a+b^2 = 0;$$

24 $c = 0$ alebo $bc = ad$;

25 **a)** $D := b^2 - 4ac = 0$ (táto podmienka zahŕňa aj prípad $a = b = 0$); **b)** $D > 0$ (táto podmienka zahŕňa aj prípad $a = 0 \wedge b \neq 0$) alebo $a = b = 0$ (vtedy stačí položiť $R(x) \equiv 1$); **c)** $D < 0$ alebo $a = b = 0$;

26 **1.** $\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + C$ (subst. $x-1 = t$); **2.** $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^2 + C$ (subst. $x^2 = t$); **3.** $\frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{\sqrt{3}} + C$; **4.** $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12} \ln \frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + C$ (napísať ako súčet dvoch integrálov, v prvom subst. $x^3 = t$, v druhom $x^2 = s$); **5.** $\frac{x^4}{4} - \ln(x^4+2) + \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + C$; **6.** $-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)} - \frac{1}{10} \operatorname{arctg}(x^5+1) + C$; **7.** $\frac{1}{10(x^{10}+1)} + \ln \frac{x^{10}}{x^{10}+1} + C$; **8.** $\ln(x^4+1) - \frac{3}{8} \ln x^4 - \frac{5}{8} \ln(x^4+2) + C$; **9.** $\frac{1}{49} \ln \left| \frac{x^7}{x^7+7} \right| + C$ $\left(\frac{1}{x^8+7x} = \frac{1}{x(x^7+7)} = \frac{x^6}{x^7(x^7+7)} \right)$; **10.** $\frac{1}{n}(x^n+1) - \frac{1}{n}|x^n+1| + C$ $\left(= \frac{x^n}{n} - \frac{1}{n} \ln|x^n+1| + C, \text{ ak konštantu } \frac{1}{n} \text{ „zahŕnieme“ do integračnej konštanty } C \right)$ pre $n \neq 0$; $2 \ln x + C$ pre $n = 0$; **11.** $\frac{1}{2n} \left(\operatorname{arctg} x^n - \frac{x^n}{x^{2n}+1} \right) + C$ pre $n \neq 0$; $\frac{1}{4} \ln x + C$ pre $n = 0$; **12.** $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + C$ $\left(\frac{x^2-1}{x^4+1} = \frac{1-1/x^2}{x^2+1/x^2} = \frac{1-1/x^2}{(x+1/x)^2-2} \right)$ pre $x \neq 0$; to, že výsledok (ktorý sme našli integrovaním funkcie definovanej na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$) je hľadanou primitívnou funkciou na \mathbf{R} , vyplýva z pr. 46); **13.** $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2} + C$ (subst. $x + \frac{1}{x} = t$); **14.** $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1} + C$ (najprv subst. $x^2 = t$ a potom ako v pr. 26.12, alebo priamo subst. $x^2 + \frac{1}{x^2} = t$);

27 $I = -\frac{1}{(a-b)^{m+n-1}} \int \frac{(t-1)^{m+n-2}}{t^m} dt$; $J = \frac{1}{625} \left(\frac{3(x-2)}{x+3} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{(x-2)^2}{2(x+3)^2} - 3 \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| \right) + C$;

28 **1.** použite metódu per partes a využite, že primitívna funkcia k racionálnej funkcii $F(x)(\operatorname{arctg} x)'$, resp. $F(x)(\operatorname{arctg} x)'$, resp. $F(x)(\ln x)'$ je elementárna; **2a)** $\frac{1}{8} \left((x^8-1) \operatorname{arctg} x - \frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x \right) + C$; **2b)** $x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + \operatorname{arctg}(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+2) + C$ (pomocou vzťahu $\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} = \pi - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha$ možno výsledok upraviť na tvar $(x-1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+2) + C$); **2c)** $\frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) - \ln|x| - \frac{1}{x} \ln(x^2-x-1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$; **2d)** $\frac{1}{x} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2-4}} + C$ (pri derivovaní funkcie $\ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right|$ využite vzorec $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$);

29 **1.** $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x}}{2} + C$; **2.** $\frac{12}{5} x^{5/12} - 6x^{1/6} - 4 \ln|x^{1/12} + 1| + 2 \ln|x^{1/6} - x^{1/12} + 1| + 4\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x^{1/12}-1}{\sqrt{3}} + C$ (subst. $x = t^{12}$, $t \geq 0$); **3.** $\ln(1+x) - 3 \ln(1 + \sqrt[3]{1+x}) - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{1+x} + C$

$$C; \quad \underline{4.} \quad \frac{12}{13}(1 + \sqrt[4]{x})^{13/3} - \frac{18}{5}(1 + \sqrt[4]{x})^{10/3} + \frac{36}{7}(1 + \sqrt[4]{x})^{7/3} - 3(1 + \sqrt[4]{x})^{4/3} + C;$$

30 1. špeciálne pre $bc = ad$ je $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ racionálnou funkciou premennej x ; v ostatných prípadoch stačí použiť substitúciu, ktorej predpis dostaneme, ak z rovnice $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ vyjadríme x ako funkciu premennej t ; pritom treba rozlíšiť prípady n párne, n nepárne a prípady $c = 0 \wedge a \neq 0$, $c \neq 0 \wedge bc - ad \neq 0$; **2a)** $\frac{\sqrt[5]{(x+1)^4(25x-20)}}{36\sqrt[5]{x^9}} + C$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$; **2b)** $\frac{2t}{t^3-1} + \frac{1}{3} \ln \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$, kde $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ (výpočet $\int -\frac{6t^3}{(t^3-1)^2} dt$ možno zjednodušiť použitím metódy per partes: $u' = -\frac{3t^2}{(t^3-1)^2}$, $v = 2t$); **2c)** $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \right| - \frac{\sqrt{x^2-1}}{2(x+\sqrt{x^2-1})} + C$ (integrand rozšíriť výrazom $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$; výsledok možno upraviť na tvar $\frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + C$, $x > 1$: zlomok v absolútnej hodnote stačí rozšíriť výrazom $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$, druhý zlomok výrazom $x - \sqrt{x^2-1}$); **2d)** $-\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ (integrand možno prepísať do tvaru $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x-1)(x+1)}$); **2e)** $\frac{n}{b-a} \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C$, $x > \max\{a, b\}$; **2f)** $-\frac{at}{t^4+1} + \frac{a}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{\sqrt{2}t} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} \right| + C$, kde $t = \sqrt[4]{\frac{x}{a-x}}$ (na výpočet $\int \frac{4t^4}{(t^4+1)^2} dt$ použite najprv metódu per partes: $u' = \frac{4t^3}{(t^4+1)^2}$, $v = t$; $\int \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{2} \int \frac{t^2+1}{t^4+1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{t^2-1}{t^4+1} dt$, v prípade druhého integrálu pozri pr. 26.12, prvý možno nájsť analogicky);

31 1. $\frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{(2t+1)^3} - \frac{8t+1}{2(2t+1)} + C$, kde $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$ ⁹ (výpočet $\int \frac{2dt}{t(2t+1)^2}$ možno zjednodušiť substitúciou $t = \frac{1}{z}$ alebo $2t+1 = \frac{1}{z}$; výsledok možno zapísať v podobe $\frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{(2t+1)^3} + \frac{3}{2(2t+1)} + C$ ¹⁰); **2.** $\frac{1}{256} \left(2z^2 - 16z + 4 \ln |z| - \frac{6}{z^2} - \frac{48}{z^3} - \frac{27}{z^4} \right) + C$, kde $z = 2(x + \sqrt{x^2+x+1}) + 1$ (použili sme postupne substitúcie $\sqrt{x^2+x+1} = t-x$, $z = 2t+1$); **3.** $\frac{1}{8} \left(z + 3 \ln |z| - \frac{3}{z} - \frac{1}{2z^2} \right) + C$, kde $z = 2x + 2\sqrt{x^2+x+1}$ (použitím rovnosti $\frac{1}{2x+1+2\sqrt{x^2+x}} = 2x+1-2\sqrt{x^2+x}$ možno výsledok upraviť na tvar $\frac{3}{8} \ln \left| 2x + 2\sqrt{x^2+x+1} \right| - \frac{1}{2}(x^2+2x) + \frac{1}{4}(x+5)\sqrt{x^2+x} + C$); **5.** $2 \operatorname{arctg} \left(\frac{2-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} \right) - \ln \left| \frac{2-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} + 1 \right| + C$ (definičný obor integrandu je $[-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1]$; použili sme substitúciu $\sqrt{1-2x-x^2} = 1-tx$, inverzná funkcia k funkcii $x = \varphi(t) = \frac{2(t-1)}{t^2+1}$, $t \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$, je $t = \varphi^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-2x-x^2}}{x}, & \text{ak } x \in [-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1] \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, to možno zapísať v tvare $\varphi^{-1}(x) =$

⁹príslušná Eulerova substitúcia prepísaná do podoby vyhovujúcej vete 5 má tvar $x = \frac{t^2-1}{2t+1}$, $t \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ — tak nájdeme primitívnu funkciu na intervale $(-\infty, -1)$, resp. $x = \frac{t^2-1}{2t+1}$, $t \in (0, \infty)$ — tak nájdeme primitívnu funkciu na intervale $(-1, \infty)$

¹⁰platí $-\frac{8t+1}{2(2t+1)} = -2 + \frac{3}{2(2t+1)}$ a číslo -2 možno „zahrnúť“ do integračnej konštanty C

$\frac{2-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ ¹¹⁾); **6.** $2\operatorname{arctg}\left(1+\frac{x-1}{1+\sqrt{1+x-x^2}}\right)+C$ (použili sme substitúciu $\sqrt{1+x-x^2}=tx+1$; funkcia $-2\operatorname{arctg}\left(1+\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1}{x}\right)$ nájdená pomocou substitúcie $\sqrt{1+x-x^2}=tx-1$ je primitívnou funkciou len na $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \setminus \{0\}$); **7.** $\frac{10}{9}\sqrt{\frac{x-2}{5-x}}-\frac{4}{9}\sqrt{\frac{5-x}{x-2}}+C$ (použili sme substitúciu $(\sqrt{7x-10-x^2}=) \sqrt{(x-2)(5-x)}=t(x-2)$ ¹²⁾); **8.** $\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$, kde $t=\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$ ($=\frac{\sqrt{4x-3-x^2}}{x-1}$), $x\in(1,2)\cup(2,3)$;

32 **1.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}-\sqrt{5+x-x^2}+C$, $x\in\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$; **2.** $\frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$; **3.** $\frac{1}{3840}\sqrt{1+x^2}(384x^9-432x^7+504x^5-630x^3+945x)-\frac{945}{3840}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$ (stačí opakovane použiť rekurentný vzťah $I_n=\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{1+x^2}-\frac{n-1}{n}I_{n-2}$); **4.** $\frac{11}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}+C$, $x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; **5.** $\left(\frac{x^5}{6}-\frac{a^2x^3}{24}-\frac{a^4x}{16}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{a}+C$ (integrand rozšíriť výrazom $\sqrt{a^2-x^2}$, potom možno použiť rekurentný vzťah $I_n=-\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{n-1}{n}a^2I_{n-2}$, kde $I_n=\int\frac{x^n dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ¹³⁾; iná možnosť: odvodiť rekurentný vzťah $J_n=\frac{n-1}{n+2}a^2J_{n-2}-\frac{1}{n-2}x^{n-1}(a^2-x^2)^{3/2}$, kde $J_n=\int x^n\sqrt{a^2-x^2} dx$, J_0 pritom možno vypočítať substitúciou $x=a\cos t$, $t\in[0,\pi]$); **6.** $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+2}+\frac{7}{8}\ln\left|\frac{1}{2}+x+\sqrt{x^2+x+2}\right|+C$;

33 **1.** $\left(-\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{6}-\frac{19}{6}\right)\sqrt{1-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$; **2.** $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C$;

34 **1.** $\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}+C$ ¹⁴⁾; **2.** $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\operatorname{sgn}x\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right|+C$ (výsledok

¹¹keby sme použili (na prvý pohľad prirodzenejšiu) substitúciu $\sqrt{1-2x-x^2}=tx-1$, bolo by $x=\varphi(t)=\frac{2(t-1)}{t^2+1}$, $t\in(-\infty,1-\sqrt{2})\cup[1+\sqrt{2},\infty)$, $t=\varphi^{-1}(x)=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$, pomocou tejto substitúcie nájdená funkcia $\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\operatorname{arctg}t$ (kde $t=\varphi^{-1}(x)$) je primitívnou funkciou len na $[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1]\setminus\{0\}$, hľadanie primitívnej funkcie na celom intervale $[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1]$ sa potom zakladá na rovnakých úvahách ako riešenie pr. 41.1

¹²teda $t=\sqrt{\frac{5-x}{x-2}}$, potom $x=\frac{5+2t^2}{1+t^2}$, $\sqrt{7x-10-x^2}=t(x-2)=t\left(\frac{5+2t^2}{1+t^2}-2\right)$

¹³to, že výsledok, ktorý sme našli integrovaním funkcie definovanej na $(-a,a)$, je hľadanou primitívnou funkciou na intervale $[-a,a]$, vyplýva z pr. 46

¹⁴použitím substitúcie $x=\frac{1}{t}$ dostaneme na intervale $(1,\infty)$: $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{t^3 dt}{\sqrt{1-t^2}}$; na intervale $(-\infty,-1)$: $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{t^3 dt}{\sqrt{1-t^2}}$; to možno naraz zapísať v podobe $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=-\operatorname{sgn}t\cdot\int\frac{t^3 dt}{\sqrt{1-t^2}}$; na výpočet posledného integrálu použite substitúciu $\sqrt{1-t^2}=z$

možno upraviť do podoby $-\frac{1}{2x^2} \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C$ ¹⁵); **4.** $\arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + \operatorname{sgn}(x+1) \cdot \ln \left| \frac{3+x+2 \operatorname{sgn}(x+1) \cdot \sqrt{1-x-x^2}}{2(x+1)} \right| + C$ ($= \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + \operatorname{sgn}(x+1) \cdot \ln \left| \frac{3+x+2 \operatorname{sgn}(x+1) \cdot \sqrt{1-x-x^2}}{x+1} \right| + C$, ak číslo $\ln \frac{1}{2}$ „zahrnieme“ do integračnej konštanty C); výsledok možno upraviť do podoby $\arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + \ln \left| \frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{x+1} \right| + C$); **5.** $\sqrt{x^2+2x+2} + \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x+2}| - \sqrt{2} \operatorname{sgn} x \cdot \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{|x|} \right| + C$ (integrand rozšíriť výrazom $\sqrt{x^2+2x+2}$, výsledok možno upraviť do podoby $\sqrt{x^2+2x+2} + \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x+2}| - \sqrt{2} \ln \left| \frac{2+x+\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+2x+2}}{x} \right| + C$); **6.** $\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4} \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8} \operatorname{sgn}(x+1) \cdot \arcsin \frac{1}{x+1} + C$, $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ (ak využijeme nepárnosť funkcie \arcsin , môžeme výsledok napísať v tvare $\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{|x+1|} + C$, $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$);

35 **1.** $\frac{3}{5}k^5 - 2k^3 + 3k + C$, kde $k = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}$; **2.** $\frac{1}{8}(1+x^3)^{8/3} - \frac{1}{5}(1+x^3)^{5/3} + C$; **3.** $-\frac{1}{24}(8x^2 + 10x + 15)\sqrt{x(1+x)} + \frac{5}{8} \arcsin \sqrt{x} + C$, $x \in [0, 1)$ (výsledok sme získali použitím substitúcie $\sqrt{x} = t$ a rekurentného vzťahu z návodu k pr. 32.5 ¹⁶); **4.** $\frac{x}{2(1-\sqrt{1-x^2})} - \frac{x^3}{6(1-\sqrt{1-x^2})^3} + C$ (použili sme Eulerovu substitúciu $\sqrt{1-x^2} = 1 - tx$ ¹⁷); **5.** $\frac{1}{12}(x + \sqrt{1+x^2})^{12} + C$; **6.** $\frac{2}{9z} + \frac{1}{24z^2} + \frac{17}{108} \ln |z| + \frac{16}{27} \ln |z+3| + C$, kde $z = 2(x + \sqrt{x^2-3x+2}) - 3$ (použili sme substitúcie $\sqrt{x^2-3x+2} = t - x$, $2t - 3 = z$); **7.** $\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x} + \frac{3\sqrt{x^2+2x}}{2(x+2)} + C$ ($\frac{x-1}{x^2+2x}$ rozložte na parciálne zlomky; pri úprave výsledku použite rovnosti $\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{\frac{2+x}{x}} = \frac{\sqrt{x(2+x)}}{x}$, $\operatorname{sgn}(x+2) \cdot \sqrt{\frac{x}{2+x}} = \frac{\sqrt{x(2+x)}}{x+2}$); **8.** $-\frac{2}{x} - x + \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x} - 2 \arcsin x + C$ (integrand rozšírite výrazom $1 + \sqrt{1-x^2}$; pri výpočte $\int \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ použite substitúciu $x = \sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$,

¹⁵pre $x > 0$ by mala byť úprava zrejماً; pre $x < 0$ je $\operatorname{sgn} x \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} \right|$

¹⁶použitím substitúcie $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = t$ a rekurentného vzťahu z pr. 16.1 by sme dostali výsledok $-\frac{1}{24}(8x^2 + 10x + 15)\sqrt{x(1-x)} - \frac{5}{8} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + C$ pre $x \in (0, 1)$ ($:= F(x)$), hodnotou primitívnej funkcie v bode 0 je potom číslo $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$; pozri aj pr. 48

¹⁷inou možnosťou je rozšíriť integrand výrazom $(1 + \sqrt{1-x^2})^2$, na výpočet integrálu $\int \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx$ použij substitúciu $x = \sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ ($\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t} = \operatorname{ctg}^2 t \cdot \frac{1}{\sin^2 t}$) a pri ďalších úpravách rovnost $\operatorname{ctg} \arcsin x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, dostaneme tak výsledok v tvare $\frac{3x^2 - 2 - 2(1-x^2)^{3/2}}{3x^3}$

alebo integrand rozšírite výrazom $\sqrt{1-x^2}$ a použite postup z pr. 34); **9.** $\frac{3}{4} \arcsin \frac{2x^2-1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2-x^4} + C$; **10.** $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2(x^2+\sqrt{1+x^4})}{1+\sqrt{1+x^4}} \right) + C$; **11.** $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}} \right| + \frac{x}{4} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) + C$; **12.** $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin x + C$ (integrand rozšírite výrazom $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{2}$); **13.** $\frac{2}{5}(x^{5/2} - (x+1)^{5/2}) + \frac{2}{3}(x^{3/2} + (x+1)^{3/2}) + C$ (integrand rozšírite výrazom $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$);

37 využite integráciu per partes a skutočnosť, že primitívna funkcia k funkcii $\frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ je elementárna (použitím tretej Eulerovej substitúcie možno $\int \frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ previesť na $\int R(t) dt$, kde R je racionálna funkcia; funkcia $S(t) := \int R(t) dt$ je elementárna, preto aj $S\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ je elementárna funkcia);

38 **1.** $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$; **2.** $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \sin x + C$; **3.** $-\frac{\cos^{12} x}{12} + \frac{\cos^{10} x}{5} - \frac{\cos^8 x}{8} + C$ (subst. $\cos x = t$) alebo $-\frac{\sin^{12} x}{12} + \frac{3 \sin^{10} x}{10} - \frac{3 \sin^8 x}{8} + \frac{\sin^6 x}{6} + C$ (subst. $\sin x = t$); **5.** $\frac{5x}{16} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin^3 2x}{48} + \frac{3 \sin 4x}{64} + C$; **6.** $\frac{3x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C$;

39 **1.** $I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}$, $n \neq 1$ ($u' = \frac{1}{\sin^2 x}$, $v = \frac{1}{\sin^{n-2} x}$; iná možnosť: ak do rekurentného vzťahu odvodeného v pr. 16.5 — ten platí pre všetky $n \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ — dosadíme $n = -k$, dostaneme vzťah medzi I_k a I_{k+2}); **2.** $I_n = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$, $n \neq 1$;

40 **1.** $-\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 4x}{8} + C$; **2.** $\frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) - \frac{1}{10} \cos\left(5x + \frac{\pi}{12}\right) + C$; **3.** $\frac{1}{12} \cos(3x+a+b) - \frac{1}{4} \cos(x+a-b) - \frac{1}{2} \cos a \cos(x+b) + C$ (ak integrand prepíšeme do tvaru $\frac{1}{2}(\cos a - \cos(2x+a)) \sin(x+b)$) alebo $\frac{1}{12} \cos(3x+a+b) - \frac{1}{4} \cos(x+a+b) - \frac{1}{2} \cos x \cos(a-b) + C$ (ak integrand prepíšeme do tvaru $\sin x \cdot \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(2x+a+b))$); **4.** $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11x}{6} + C$; **5.** $-\frac{3 \cos 2x}{16} + \frac{3 \cos 4x}{64} + \frac{\cos 6x}{48} - \frac{3 \cos 8x}{128} + \frac{\cos 12x}{192} + C$ (integrand sme najprv prepísali do podoby $\sin 2x \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 6x}{2} \right)$);

41 **2.** $F(x) + C$, kde

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{5}} \right) + \frac{k\pi}{\sqrt{5}}, & \text{ak } x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbf{Z} \\ \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{5}}, & \text{ak } x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{primitívnu} \\ \text{funkciou na } \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\pi; k \in \mathbf{Z}\} \end{array} \right)$$

je $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{5}} \right) + C$; **3.** $\frac{1}{6} \ln \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \cdot \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3 \right)^2 \right) + C$ ¹⁸ (definičný obor integrandu je $\mathbf{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$; výpočet integrálu $\int \frac{dt}{t(3+t^2)}$ možno zjednodušiť substitúciou $t = \frac{1}{z}$); **4.** $\frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C$ ($\sin x \cos x = \frac{1}{2}[(\sin x +$

¹⁸použitím vzorcov $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$, $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$ možno výsledok upraviť na tvar $\frac{1}{6} \ln \frac{(1 - \cos x)(2 + \cos x)^2}{(1 + \cos x)^3} + C$

$$\cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x)] = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 - \frac{1}{2}; \text{ pri výpočte } \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} \text{ použite substitúciu}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = t \text{ vyplývajúcu z rovnosti } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right); \text{ 5. ak } \varepsilon = 1 : \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C; \text{ ak}$$

$$\varepsilon > 1 : \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\varepsilon + 1} \cos(x/2) + \sqrt{\varepsilon - 1} \sin(x/2)}{\sqrt{\varepsilon + 1} \cos(x/2) - \sqrt{\varepsilon - 1} \sin(x/2)} \right| + C^{19}; \text{ ak } \varepsilon \in (0, 1) : F(x) + C, \text{ kde } F(x) =$$

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + \frac{2k\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, & \text{ak } x \in ((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi), k \in \mathbf{Z} \\ \frac{(2k + 1)\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, & \text{ak } x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases}; \text{ 6. } F(x) + C,$$

$$\text{kde } F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(3x/2) + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}k\pi}{3}, & \text{ak } x \in \left((2k - 1)\frac{\pi}{3}, (2k + 1)\frac{\pi}{3} \right), k \in \mathbf{Z} \\ (2k + 1)\frac{\pi}{3\sqrt{2}}, & \text{ak } x = (2k + 1)\frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \end{cases};$$

$$\boxed{42} \quad \mathbf{1a)} \quad \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} + C \quad \left(= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} + C; \right.$$

$$\text{integrand rozšíriť členom } \sin x \left. \right)^{20}; \quad \mathbf{1b)} \quad \frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 + \sqrt{2} \cos x} \right| + C \quad \left(\text{integrand možno zapísať}$$

$$\text{v tvare } \frac{2 - \cos^2 x}{2 \cos^2 x - 1} \sin x \left. \right); \quad \mathbf{1c)} \quad \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6 \operatorname{arctg} \sin x + C; \quad \mathbf{1d)} \quad -2 \operatorname{arctg} \sin x + \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) +$$

$$C \quad \left(= -2 \operatorname{arctg} \sin x + 2 \ln \left| \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right| + C \right)^{21};$$

$$\mathbf{2a)} \quad F(x) + C, \text{ kde } F(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) - \frac{k\pi}{\sqrt{2}}, & \text{ak } x \in \left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, (2k + 1)\frac{\pi}{2} \right), k \in \mathbf{Z} \\ \frac{\pi}{2}(2k + 1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), & \text{ak } x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \end{cases};$$

$$\mathbf{2b)} \quad - \frac{\cos x}{a \sin x + b \cos x} + C \quad \left(\text{integrand rozšíriť výrazom } \frac{1}{\cos^2 x}; \text{ ak predpis funkcie } F_1(x) = -\frac{1}{a} \cdot$$

$$\frac{1}{a \operatorname{tg} x + b}, \text{ ktorá je primitívnou k funkcii } f(x) = \frac{1}{(a \sin x + b \cos x)^2} \text{ na množine } D(f) \setminus \left\{ (2k + 1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}, \right.$$

$$\text{rozšírime výrazom } \cos x, \text{ dostaneme predpis spojitej funkcie definovanej na } D(f) \left. \right); \quad \mathbf{2c)} \quad F(x) + C,$$

¹⁹body $x_k := (2k + 1)\pi, k \in \mathbf{Z}$, sú body odstrániteľnej nespojitosti funkcie $F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\varepsilon + 1} + \sqrt{\varepsilon - 1} \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{\varepsilon + 1} - \sqrt{\varepsilon - 1} \operatorname{tg}(x/2)} \right|$, ktorá je primitívna k funkcii $f(x) = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos x}$ na množine $D(f) \setminus \{(2k + 1)\pi; k \in \mathbf{Z}\}$; ak logaritmovaný zlomok v predpise funkcie F_1 rozšírime výrazom $\cos \frac{x}{2}$, dostaneme predpis spojitej funkcie F definovanej na množine $D(f)$; predpis funkcie F možno upraviť na tvar $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{\varepsilon + \cos x + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin x}{1 + \varepsilon \cos x} \right|$, ak v ňom logaritmovaný zlomok rozšírime výrazom $\sqrt{\varepsilon + 1} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{\varepsilon - 1} \sin \frac{x}{2}$

²⁰hoci pre $R(-u, v) = -R(u, v)$ očakávame spravidla od nahradenia substitúcie $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ substitúciou $\cos x = t$ zjednodušenie výpočtu, je to v tomto prípade naopak: substitúcia $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ prevedie daný integrál na $\int \frac{1 + t^2}{2t} dt \quad \left(= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} + t \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C \right)$

²¹vzorec $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$ možno odvodiť z Moivreovej vety „ $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha, n \in \mathbf{N}, \alpha \in \mathbf{R}$ “, ak ľavú stranu rozpíšeme podľa vzorca $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ a nájdeme reálnu časť tohto komplexného výrazu

$$\text{kde } F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{7}} \right) + \frac{2k\pi}{\sqrt{7}}, & \text{ak } x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right), k \in \mathbf{Z} \\ \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{7}}, & \text{ak } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \end{cases}; \quad \underline{\mathbf{2d}}) \frac{x}{10} +$$

$$\frac{3}{20} \ln \left(\frac{(\operatorname{tg} x - 3)^2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \right) + C \quad \underline{\mathbf{2e}}) F(x) + C, \text{ kde}$$

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) + \frac{k\pi}{\sqrt{3}}, & \text{ak } x \in D(F_1) \cap \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right), k \in \mathbf{Z} \\ (2k+1)\frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & \text{ak } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \end{cases}, \quad \text{pričom } F_1(x) =$$

$$\frac{1}{6} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1}{(\operatorname{tg} x + 1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3}} \quad \left(\text{integrand rozšíriť výrazom } \frac{1}{\cos^3 x}; \text{ definičný obor integrandu} \right)$$

je $D := \mathbf{R} \setminus \left\{ (4k-1)\frac{\pi}{4}; k \in \mathbf{Z} \right\}$ ²³, F_1 je primitívnu funkciou na množine $D \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}$ ²⁴;

$$\underline{\mathbf{2f}}) \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 x + C;$$

$$\underline{\mathbf{43}}) \quad \underline{\mathbf{1.}} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C; \quad \underline{\mathbf{2.}} \quad \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C; \quad \underline{\mathbf{3.}} \quad \ln \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) + \frac{1}{\cos x} +$$

$\frac{1}{3 \cos^3 x} + C$ (čitateľ integrandu — tj. číslo 1 — možno zapísať v tvare $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$ a integrand potom napísať ako súčet troch zlomkov);

$$\underline{\mathbf{4.}} \quad \frac{1}{4} \ln(3 + 4 \sin^2 x) + C; \quad \underline{\mathbf{5.}} \quad F(x) + C, \quad \text{kde } F(x) =$$

$$\begin{cases} F_1(x), & \text{ak } x \in D(F_1) \\ 0, & \text{ak } x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases}, \quad \text{pričom } F_1(x) = \frac{2}{9 \operatorname{tg}(x/2) + 3}; \quad \underline{\mathbf{6.}} \quad F(x) + C, \text{ kde}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(c-a) \operatorname{tg}(x/2) + b}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} + \frac{2k\pi}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}, & \text{ak } x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbf{Z} \\ \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}, & \text{ak } x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

(definičným oborom integrandu je $\mathbf{R} : a \cos x + b \sin x + c = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) +$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) + c > 0$; číslo φ je určené podmienkami $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \varphi =$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}); \quad \underline{\mathbf{7.}} \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3 \sin x - 5 \cos x}{\sin x - \cos x} \right| + C; \quad \underline{\mathbf{8.}} \quad F(x) + C, \text{ kde}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x \right) + \frac{k\pi}{|ab|}, & \text{ak } x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right), k \in \mathbf{Z} \\ \frac{(2k+1)\pi}{2|ab|}, & \text{ak } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \end{cases}; \quad \underline{\mathbf{9.}} \quad F(x) + C, \text{ kde}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(2 + \operatorname{tg}^2 x)} + k\pi \right), & \text{ak } x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right), k \in \mathbf{Z} \\ \frac{3(2k+1)\pi}{8\sqrt{2}}, & \text{ak } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \end{cases};$$

²²použitím vzťahu $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \cos^2 x$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, možno výsledok upraviť na tvar

$\frac{x}{10} + \frac{3}{10} \ln |\sin x - 3 \cos x| + C$, pričom tento predpis uvažujeme len na definičnom obore integrandu (pozri poznámku 2 pred vetou 3)

²³platí $\sin^3 + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \left(1 + \frac{\sin 2x}{2} \right)$

²⁴použitím substitúcie $x + \frac{\pi}{4} = t$ a potom $\operatorname{ctg} t = z$ by sme dostali výsledok v tvare $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right) - \frac{1}{6} \ln \left(3 \operatorname{ctg}^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right) + C$

10. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}^2 x}{3\operatorname{tg}^2 x - 1} \right| + C$ (možno použiť substitúciu $\sin^2 x = t$, v prípade substitúcie $\operatorname{tg} x = t$ možno na

výpočet $\int \frac{dt}{t(1-3t^2)}$ použiť substitúciu $t = \frac{1}{z}$);

11. $F(x) + C$, kde

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2} \right) + k\pi, & \text{ak } x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{4}, (2k+1)\frac{\pi}{4} \right), k \in \mathbf{Z} \\ \frac{(2k+1)\pi}{2}, & \text{ak } x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \left(\sin^6 x + \cos^6 x = \right.$$

$$\left. \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} [(1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) + (1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x)] = \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x), \text{ potom subst. } \operatorname{tg} 2x = t \right); \quad \mathbf{12.} \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} - \sin 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x} \right) + C; \quad \mathbf{13.} \frac{2}{5} \sqrt{\cos^5 x} - 2\sqrt{\cos x} +$$

$$C, x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right); \quad \mathbf{14.} \frac{1}{\sqrt{1 + \cos x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x}} + C;$$

$$\mathbf{15.} \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sin^2 x}} + C \quad \left(= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{|\cos x|} + C \right); \quad \mathbf{16.} 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot$$

$$\ln \frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2\operatorname{tg} x} - 1) + C, \quad x \in \{x \in \mathbf{R}; \operatorname{tg} x > 0\};$$

$$\mathbf{17.} \sqrt{2} \ln \left(\frac{1 + \sin(x/2)}{\cos(x/2)} \right) + C, x \in (0, \pi) \quad \left(1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} \right); \quad \mathbf{18.} \sqrt{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin(x/2) - \cos(x/2)}{\cos(x/2) + \sin(x/2)} \right) + C, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad \left(\text{použite substitúciu } x = t + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\mathbf{44} \quad \mathbf{1.} \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} + C \quad \left(\text{pri úprave výsledku využite rovnosť } \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right); \quad \mathbf{2.} -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C; \quad \mathbf{3.} -\frac{x+3}{2\sqrt{x^2+6x+8}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+6x+8} - \sqrt{2}(x+3)}{\sqrt{x^2+6x+8} + \sqrt{2}(x+3)} \right| + C \quad \left(\text{pri úpravách nezabudnite, že } \sqrt{\cos^6 \alpha} = |\cos \alpha|^3; \text{ pre } \alpha \in [0, \pi] \text{ je } \sqrt{\sin^6 \alpha} = \sin^3 \alpha \right); \quad \mathbf{4.} 2 \arcsin \frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}{2} + C;$$

$$\mathbf{45} \quad \mathbf{1.} \frac{1}{6} \cdot \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C; \quad \mathbf{2.} \frac{3t^4}{4} - \frac{3t^2}{2} - \frac{3}{4} \ln |t-1| + \frac{15}{8} \ln(t^2 + t + 2) - \frac{27}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C, \text{ kde } t = \sqrt[3]{2+x}; \quad \mathbf{3.} \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt[3]{x^2+1} - 1 \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x^2+1} + 1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \ln \left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+1} + 1 \right) + C; \quad \mathbf{4.} \ln \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C; \quad \mathbf{5.} -\frac{1}{3} \operatorname{sgn} x \cdot$$

$$\ln \left| \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+x^3+x^6}}{|x|^3} \right| + C \quad \left(= -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3} \right| + C \right); \quad \mathbf{6.} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

$$\left(\text{možno použiť goniometrickú substitúciu; ak ste použili tretiu Eulerovu substitúciu, inšpirujte sa príkladom 26.12} \right); \quad \mathbf{7.} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| - \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + C;$$

$$\mathbf{8.} -\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} - \arcsin \frac{1}{|x-2|} + C; \quad \mathbf{9.} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+2+x}}{\sqrt{x^2+2-x}} \right| + \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C \quad \left(= \ln \left(\sqrt{x^2+2} + x \right) + \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C; \text{ použili sme goniometrickú substitúciu} \right); \quad \mathbf{10.} \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{2} -$$

$$2 \ln \left| \sqrt{x^2+x+1} + x + 1 \right| + \frac{3}{2} \ln \left| 2\sqrt{x^2+x+1} + 2x + 1 \right| + \frac{3}{4(2\sqrt{x^2+x+1} + 2x + 1)} + C \quad \left(= \sqrt{1+x+x^2} - \right.$$

$$\left. 2 \ln \left| \sqrt{1+x+x^2} + x + 1 \right| + \frac{3}{2} \ln \left| 2\sqrt{1+x+x^2} + 2x + 1 \right| + C, \text{ ak posledný zlomok rozšírime} \right.$$

výrazom $2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1$); **11.** $\frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{2x-3}{6+x+\sqrt{15}\sqrt{4x-x^2}} \right| + C$ (použili sme tretiu Eulerovu

substitúciu); **12.** $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}} + C$; **13.** $\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sqrt[3]{\sin x}} + \frac{1}{4} \ln \frac{1+\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\sin^2 x}}{1-\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\sin^2 x}} +$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{\sin x}+1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{\sin x}-1}{\sqrt{3}} + C \quad \left(= \frac{1}{4} \ln \frac{(1-\sin x)(1+\sqrt[3]{\sin x})^3}{(1+\sin x)(1-\sqrt[3]{\sin x})^3} + \right.$$

$\left. \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}-1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\sin x}} + C; \right)$ pritom sme použili vzorce z pr. I.87.1 a I.62.2, pozri tiež úpravu

výsledku v poznámke k riešeniu pr. 23.6); **14.** $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1} + 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1) + \right.$

$\left. 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2\operatorname{tg} x} - 1) \right) + C, x \in \{x \in \mathbf{R}; \operatorname{tg} x > 0\}$; **15.** $-\frac{4\sqrt{2}}{5} \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \sqrt{\operatorname{ctg}^5 x} + C$;

16. $\sqrt{2} \operatorname{sgn}(\cos x) \cdot \left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}}{5} + \sqrt{\operatorname{tg} x} \right) + C, x \in \{x \in \mathbf{R}; \operatorname{tg} x > 0\}$; **17.** $F(x) + C$, kde $F(x) =$

$$\begin{cases} \frac{6}{5} \operatorname{arctg} \frac{5\operatorname{tg}(x/2)+1}{2} + \frac{3x}{5} - \frac{4}{5} \ln(3+\sin x-2\cos x) + \frac{6k\pi}{5}, & \text{ak } x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbf{Z} \\ \frac{(12k+3)\pi}{5} - \frac{4}{5} \ln 5, & \text{ak } x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad 25;$$

18. $F(x) + C$, kde

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{3} + 3x, & \text{ak } x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{4}, (2k+1)\frac{\pi}{4} \right), k \in \mathbf{Z} \\ \frac{5(2k+1)\pi}{6}, & \text{ak } x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \end{cases}; \quad \text{19. } F(x) + C, \text{ kde } F(x) =$$

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}(x/2)-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}(x/2)-1}{\sqrt{8}} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) k\pi, & \text{ak } x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbf{Z} \\ \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (2k+1)\frac{\pi}{2}, & \text{ak } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{6-5\sin x + \sin^2 x} = \frac{1}{2-\sin x} - \frac{1}{3-\sin x} \right)$; **20.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\cos^2 2x + 3 + \sqrt{8}}{\cos^2 2x + 3 - \sqrt{8}} + C$ $\left(\sin^8 x + \cos^8 x = \right.$
 $\left. \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^4 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^4 = \frac{1}{2^3} (1+6\cos^2 2x + \cos^4 2x), \text{ potom subst. } \cos^2 2x = t \right)$; **21.** $F(x) + C$,

kde $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}, & \text{ak } x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{4}, (2k+1)\frac{\pi}{4} \right), k \in \mathbf{Z} \\ \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{ak } x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \end{cases}; \quad \text{22. } -2\sin a \cdot$

$\ln \left| \sin \frac{x+a}{2} \right| + x \cos a + C$ (najprv použite vzorce pre $\sin(\alpha \pm \beta)$; potom možno použiť substitúciu $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ²⁶ alebo túto úvahu: pre dané $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$, $\gamma^2 + \delta^2 > 0$, existujú $A, B \in \mathbf{R}$

tak, že $\frac{\alpha \sin t + \beta \cos t}{\gamma \sin t + \delta \cos t} = A \frac{\gamma \cos t - \delta \sin t}{\gamma \sin t + \delta \cos t} + B$); **23.** $\frac{\sin x}{x} + C$; **24.** $\frac{x}{3} - \frac{x^3}{9} - \frac{(1-x^2)^{3/2} \arcsin x}{3} +$

C ; **25.** $\frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C$ ²⁷; **26.** $\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} \sin \beta x + C$; **27.** $\frac{x e^x}{2} (\sin x -$

²⁵to, že definičný obor integrandu je \mathbf{R} , zistíme podobne ako v riešení pr. 43.6

²⁶pri rozklade na parciálne zlomky treba potom rozlíšiť prípady $\cos \frac{a}{2} = 0$, $\cos \frac{a}{2} \neq 0$

²⁷ak ste použili metódu per partes, využite, že na množine $(-1, 1)$ — tj. na definičnom obore integrandu — platí $\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

$\cos x) + \frac{e^x}{2} \cos x + C$; **28.** $\frac{x^2 e^{3x}}{13}(3 \cos 2x + 2 \sin 2x) - \frac{2x e^{3x}}{13^2}(5 \cos 2x + 12 \sin 2x) + \frac{2e^{3x}}{13^3}(46 \sin 2x - 9 \cos 2x) + C$; **29.** $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6) + C$ (možno použiť metódu neurčitých koeficientov); **30.** $2e^{\sqrt{x}}(x^2\sqrt{x}-5x^2+20x\sqrt{x}-60x+120\sqrt{x}-120)+C$; **31.** $\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x} \sin(2\sqrt{x})}{2} + \frac{\cos(2\sqrt{x})}{4} + C$; **32.** $x - 3 \ln\left((e^{x/6} + 1)\sqrt{e^{x/3} + 1}\right) - 3 \operatorname{arctg} e^{x/6} + C$; **33.** $\ln \frac{1 + \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}}{1 - \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} + C$ $\left(= \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} + C, \text{ použili sme substitúciu } \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} = t \text{ }^{28})$; **34.** $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x \ln^k x + C$ (použili sme rekurentný vzťah $I_n = x \ln^n x - n I_{n-1}$); **35.** $\frac{x^4}{128}(32 \ln^3 x - 24 \ln^2 x + 12 \ln x - 3) + C$; **36.** $-\frac{1}{8x^2}(4 \ln^3 x + 6 \ln^2 x + 6 \ln x + 3) + C$;

46 na výpočet $F'(a)$ pre $a \in M$ použite l'Hospitalovo pravidlo (pozri aj pr. I.384.1);

47 platí; využite fakt, že f musí byť ohraničená (pozri pr. I.256.1) a pr. 4;

48 uvedieme dva návody: 1. podľa vety 2 existuje spojitá funkcia $G: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ primitívna k funkcii f , pritom podľa vety 1 na intervale (a, b) platí $G(x) - F(x) \equiv \text{konšt}$; 2. existencia príslušných limit vyplýva z rovnomernej spojitosti funkcie F (pozri aj pr. I.255); $F'(a), F'(b)$ možno nájsť použitím l'Hospitalovho pravidla (pozri aj pr. I.384.1);

49 **1.** $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + C$ $\left(= x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \ln(1 + \cos x) + C \right)$; **2.** $\frac{x}{1 + \cos x} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$; **3.** $\frac{1}{1+a^2} \ln |a \cos x + \sin x| + \frac{x}{1+a^2} \cdot \frac{a \sin x - \cos x}{a \cos x + \sin x} + C$ (výpočet sa urýchli, ak menovateľ integrandu prepíšete na tvar $(a^2 + 1) \cos^2(x - \varphi)$, kde $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ (pozri aj pr. I.31) a použijete substitúciu $x - \varphi = t$); **4.** $\sqrt{2 - \sin^2 x} - \cos x \cdot \ln(\cos x + \sqrt{2 - \sin^2 x}) + C$; **5.** $x \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) - 2\sqrt{1 + x^2} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + 2x + C$; **6.** $\frac{x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + C$ (na výpočet $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$ možno použiť goniometrickú substitúciu); **7.** $\frac{\arcsin x}{2} + x \ln(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}) - \frac{x}{2} + C$; **8.** $\frac{x \ln x}{\sqrt{1 + x^2}} - \ln|x + \sqrt{1 + x^2}| + C$; **9.** $\frac{\ln|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} + \operatorname{sgn} x \cdot \arcsin \frac{1}{x} + C$ $\left(= \frac{\ln|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} + \arcsin \frac{1}{|x|} + C \right)$; **10.** $ax \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - a \ln|x^2 - 1| + \frac{a+b}{4} \ln^2 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$; **11.** $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{x^2 + 1} - \frac{\ln x}{2(1 + x^2)} + C$; **12.** $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2} \ln \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{9} \sqrt{x^2 + 1}(x^2 + 7) - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2}} \right| + C$; **13.** $\frac{\sqrt{1 - x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} - \sqrt{1 + x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1 - x}} - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) + C$; **14.** $\frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{2(1 - x^2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{2}x}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{2}x} \right| + C$; **15.** $\frac{2x^2 - 3}{4} \arcsin(1 - x) - \frac{x + 3}{4} \sqrt{2x - x^2} + C$; **16.** $\frac{\arcsin^2 x}{4} + \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{4} + C$ (použili sme substitúciu $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$); **17.** $\frac{1}{8}(8x^2 + 24x - 55) \arccos(2x - 3) - \frac{2x + 21}{4} \sqrt{-x^2 + 3x - 2} + C$ (odporúčame výpočet začať substitúciou $2x - 3 = t$); **18.** $F(x) + C$, kde $F(x) =$

²⁸keby sme použili substitúciu $e^x = t$ a nový integrand napísali v tvare $\frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} - \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}}$, dostali by sme výsledok v podobe $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x} + C$

$$\begin{cases} x \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + 2\operatorname{arctg} \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 2, & \text{ak } x \in [0, 1] \\ x \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\operatorname{arctg} \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 2 + \pi, & \text{ak } x \in (1, \infty) \end{cases} \quad 29 \quad \left(\text{použitím vzťahov } 2\operatorname{arctg} \sqrt{x} = \right.$$

$\arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$, $x \in [0, 1]$; $\pi - 2\operatorname{arctg} \sqrt{x} = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$, $x \in [1, \infty)$ ³⁰ možno predpis funkcie F upraviť

na tvar $F(x) = (x+1) \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + 2|\sqrt{x}-1|$; **19.** $\frac{\arcsin^2 x}{2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \ln|x| + C$ (subst.

$\arcsin x = t$); **20.** $x \arcsin^3 \frac{x}{3} + 3\sqrt{9-x^2} \left(\arcsin^2 \frac{x}{3} - 2 \right) - 6x \arcsin \frac{x}{3} + C$; **21.** $-\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} +$

$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$; **22.** $\frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$; **23.** $-\frac{2+x^2}{3} \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{6x+x^3}{9} + C$;

24. $a \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) + \frac{b-a}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C$ $\left(\frac{ax^2+b}{x^2+1} = a + \frac{b-a}{x^2+1} \right)$; **25.** $\sqrt{x^2+1} \operatorname{arctg} x -$

$\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$; **26.** $-\frac{x^2}{6} + \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \operatorname{arctg} x + \frac{2}{3} \ln(x^2+1) + C$; **27.** $\frac{x^2-1}{4(x^2+1)} \operatorname{arctg} x -$

$\frac{x}{4(x^2+1)} + C$ (na výpočet $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ možno použiť substitúciu $x = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$);

28. $\frac{(1+x^2)^2}{4} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} + C$; **29.** $\frac{2}{\sqrt{x}}(x^2+1) \operatorname{arctg} x + 4\sqrt{x} + C$; **30.** $x - \ln(e^x + 1) -$

$2e^{-x/2} \operatorname{arctg} e^{x/2} - (\operatorname{arctg} e^{x/2})^2 + C$; **31.** $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) - \frac{x^2+3}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{3x}{2} +$

C (pri použití metódy per partes ($u' = x$, $v = \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2)$) zvoľte $u = \frac{x^2+1}{2}$); **32.** $\ln(\operatorname{ch}^2 x +$

$\operatorname{ch} x + 1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{ch} x + 1}{\sqrt{3}} + C$ ³¹; **33.** ak $a^2 \neq b^2$: $\frac{aa_1 - bb_1}{a^2 - b^2} x + \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 - b^2} \ln|a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x| + C$ (pre

dané $a_1, b_1, a, b \in \mathbf{R}$, $a^2 - b^2 \neq 0$, existujú $A, B \in \mathbf{R}$ tak, že $a_1\operatorname{ch} x + b_1\operatorname{sh} x = A(a\operatorname{ch} x +$

$b\operatorname{sh} x) + B(b\operatorname{ch} x + a\operatorname{sh} x)$); ak $a = \pm b$: $\frac{1}{4a}[(a_1 \mp b_1)\operatorname{sh} 2x + (b_1 \mp a_1)\operatorname{ch} 2x] + \frac{1}{2a}(a_1 \pm b_1)x +$

C (integrand rozšíriť výrazom $(\operatorname{ch} x \mp \operatorname{sh} x)$); **34.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} 2x}{\sqrt{2}} + C$; **35.** $\operatorname{arctg} x + \frac{\operatorname{arctg} x^3}{3} + C$

$\left(\frac{x^4+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^6+1} \right)$; **36.** $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x^5-5x}{x^5-5x+1} \right| +$

$C \left(\frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)} = (x^4-1) \frac{(x^5-5x+1) - (x^5-5x)}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)} \right)$; **37.** $F(x) + C$, kde $F(x) =$

²⁹funkcia $f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ nemá deriváciu v bode 1, preto metódu per partes možno použiť len na intervaloch $[0, 1)$ a $(1, \infty)$, takto nájdená funkcia $x \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + \operatorname{sgn}(x-1) \cdot (2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg} \sqrt{x}) + C$ je primitívna k funkcii f len na $[0, \infty) \setminus \{1\}$

³⁰pre $x \in [0, 1]$ je $2\operatorname{arctg} \sqrt{x} \in [0, \pi/2]$, preto $2\operatorname{arctg} \sqrt{x} = \arcsin(\sin(2\operatorname{arctg} \sqrt{x})) = \arcsin(2\sin(\operatorname{arctg} \sqrt{x})\cos(\operatorname{arctg} \sqrt{x})) = \arcsin\left(2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$; podobne pre $x \in [1, \infty)$ je

$\pi - 2\operatorname{arctg} \sqrt{x} \in [0, \pi/2]$ (uvedené rovnosti možno nájsť aj integrovaním funkcie $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, resp.

$-\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, ktorá je deriváciou funkcie $\arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ na intervale $[0, 1)$, resp. $(1, \infty)$)

³¹niektoré vzorce pre hyperbolické funkcie nájdete v pr. I.63 a I.64

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1/x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & \text{ak } x > 0 \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{ak } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1/x}{\sqrt{2}}, & \text{ak } x < 0 \end{cases} ; \quad \underline{\text{38.}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{2}x}{x^2-1} \right| + C \quad (\text{integrand rozšírite})$$

výrazom $\frac{1}{x^2}$ a použite substitúciu $x - \frac{1}{x} = t$; pritom neabudnite, že $\sqrt{x^2} = |x|$); **39.** $-\ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C \left(x^4 + x^{-4} + 2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \right)$; **40.** $\frac{x}{2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C$ (použite najprv substitúciu $x = t^2, t \geq 0$);

41. ak $a - b \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$: $\frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C$ (využite rovnosť $1 = \frac{1}{\sin(a-b)} \sin((x+a) - (x+b)) = \frac{1}{\sin(a-b)} (\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b))$);

ak $a - b = k\pi, k \in \mathbf{Z}$: $(-1)^{k+1} \operatorname{ctg}(x+b) + C$; **42.** ak $a = k\pi, k \in \mathbf{Z}$: $\frac{1}{\sin a} + (-1)^{k+1} \operatorname{ctg} x + C$;

ak $a \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$: $\frac{1}{\sin a} \ln \left| \frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right| + C$ (možno postupovať podobne ako v pr. 49.41, ak najprv použijeme vzorec $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$)³²;

43. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}| + C$ (použite substitúciu $x = t + \frac{\pi}{4}$); **44.** $-\frac{1}{5}(2 \sin x + \cos x) + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \operatorname{arctg} 2 \right) \right| + C$ ($\sin^2 x = \frac{1}{5}[(\sin x + 2 \cos x)(\sin x - 2 \cos x) + 4]$; $\sin x + 2 \cos x = \sqrt{5} \sin(x + \varphi)$, kde

$\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, teda $\operatorname{tg} \varphi = 2$)³³; **45.** ak $\cos a \neq 0$: $-\frac{2}{n \cos a} \cdot \frac{\cos^n \frac{x+a}{2}}{\sin^n \frac{x-a}{2}} + C$; ak

$a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k$

in \mathbf{Z} : $2(-1)^{n-1} \frac{\cos x}{1 - \sin x} + C$; ak $a = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$: $-2 \frac{\cos x}{1 + \sin x} + C$; **46.** $F(x) + C$,

kde $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x < 0 \\ \frac{4}{3}x^3, & \text{ak } x \geq 0 \end{cases}$ (teda $F(x) = \frac{2}{3}x^2(x + |x|)$); **47.** $F(x) + C$, kde $F(x) =$

$\begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{ak } x \geq 0 \\ e^x - 1, & \text{ak } x < 0 \end{cases}$ (teda $F(x) = \operatorname{sgn} x \cdot (1 - e^{-|x|})$); **48.** $-\frac{[x] \cos \pi x}{\pi} - \frac{1}{2\pi} (1 - (-1)^{[x]}) + C$;

50 ak $P_m^{(n-1)}(a) = 0$ (podľa Taylorovho vzorca je $P_m(x) = P_m(a) + P'_m(a)(x-a) + \dots + \frac{P_m^{(m)}(a)}{m!} (x-a)^m$);

53 **1.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$ (inverzná funkcia k funkcii sh je daná predpisom $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$); **2.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$; **3.** $\frac{1}{8}x(2x^2-1)\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{8} \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$ (inverzná funkcia k funkcii $y = \operatorname{ch} x, x \geq 0$, je daná predpisom $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$);

³²použitím substitúcie $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ by sme dostali výsledok

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\cos a}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{1-\cos a} \sin(x/2) - \sqrt{1+\cos a} \cos(x/2)}{\sqrt{1-\cos a} \sin(x/2) + \sqrt{1+\cos a} \cos(x/2)} \right| + C$$

³³iná možnosť: integrand rozšíriť výrazom $\sin x - 2 \cos x$, vtedy dostaneme po úpravách výsledok

$$-\frac{1}{5}(2 \sin x + \cos x) + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{5} \sin x}{1 + \sqrt{5} \cos x} \right| + C$$

kfunkcii $y = -\operatorname{ch} x$, $x \geq 0$, predpisom $y = -\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$;

55 ak $a \neq 0$, $c \neq 0$, tak substitúcia $\sqrt{ax + b} = t$ prevedie $\int R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d}) dx$ na integrál, ktorý možno nájsť použitím Eulerových substitúcií;

56 $f(x) = \frac{x}{2} + 1 + C$, $x > 0$; $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - x^3 - C, & \text{ak } x < 0 \\ \frac{x}{2} - C, & \text{ak } x \geq 0 \end{cases}$;

57 napr. $f(x) = \begin{cases} \left(\sin \frac{1}{x}\right)', & \text{ak } x \neq 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$;

58 1. f je darbouxovská a prostá $\implies f$ je rýdzomonotónna a darbouxovská $\implies f$ je spojitá a rýdzomonotónna, preto f^{-1} je spojitá a definovaná na intervale; 2. použite substitúciu $f^{-1}(x) = t$.