$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}}{a_{n+1}-a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, preto rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ má rovnaký charakter ako konvergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$; ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená, tak nie je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie: $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}+\cdots+\dfrac{a_{n+p+1}-a_{n+p}}{a_{n+p+1}} > \dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+p+1}}+\cdots+\dfrac{a_{n+p+1}-a_{n+p}}{a_{n+p+1}} = 1-\dfrac{a_n}{a_{n+p+1}} \to 1$ pre $p\to\infty$;

294 z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ a rastu funkcie f vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{S}{2^n}\right)$, kde $S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; ukážeme, že postupnosť $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f(a_n)}{n}$ je zhora ohraničená, využijeme pritom Jensenovu nerovnosť „ak funkcia f je konkávna na intervale I, $x_i \in I$, $\lambda_i > 0$ ($i = 1,\dots,n$) a $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, tak $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \ge \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$" (pozri aj pr. I.453); potom — pretože $\dfrac{1}{m}\big(f(a_{m+1})+\cdots+f(a_{2m})\big) \le f\left(\dfrac{1}{m}(a_{m+1}+\cdots a_{2m})\right) \le f\left(\dfrac{S}{m}\right)$ — je $P_{2^k} \le f(a_1)+f(a_2)+\dfrac{1}{2}\big(f(a_3)+f(a_4)\big)+\dfrac{1}{4}\big(f(a_5)+\cdots+f(a_8)\big)+\cdots+\dfrac{1}{2^{k-1}}\big(f(a_{2^{k-1}+1})+\cdots+f(a_{2^k})\big) \le f(a_1)+f(a_2)+f\left(\dfrac{S}{2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{S}{2^{k-1}}\right) \le f(a_1)+f(a_2)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{S}{2^n}\right)$;

4. Postupnosti a rady funkcií

295 **1**. $\dfrac{x^2}{3}$, $x\ge 0$; **2**. $f(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ $\big($pre $x\in[0,1)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, $f_n(1)=0$ pre všetky $n\in\mathbf{N}\big)$; **3**. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x\ne k\pi/2,\ k\in\mathbf{Z} \\ 1, & \text{ak } x\in\{2k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\pi/2+2k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\}\end{cases}$ $\Big(D(f)=\mathbf{R}\setminus\big(\{(2k+1)\pi;\ k\in\mathbf{Z}\}\cup\{-\pi/2+2k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\}\big)\Big)$; **4**. $f(x)=x^5$ $\left(\text{pre } x\ne 0 \text{ je } \lim\limits_{n\to\infty} n^2x^4\sin\dfrac{x}{n^2+n} = x^5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{n^2+n}}{\dfrac{x}{n^2+n}}\cdot\dfrac{n^2}{n^2+n};\ f_n(0)=0 \text{ pre všetky } n\in\mathbf{N}\right)$; **5**. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x\in(0,1] \\ (x-1)\pi/2, & \text{ak } x>1\end{cases}$ $\left(\text{pripomeňme, že } \lim\limits_{u\to\infty}\operatorname{arctg} u = \dfrac{\pi}{2}\right)$; **6**. $\dfrac{\ln x}{2}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{\ln x}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/2n}\,\dfrac{e^{(\ln x)/2n}-1}{(\ln x)/2n};\ \text{pripomeňme, že } \lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1 \text{ pre } a>0\right)$; **7**. $f(x)\equiv 0$, $x\ge 0$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} n^3e^{-nx} = \lim\limits_{y\to\infty} g(y),\ \text{kde } g(y) = \dfrac{y^3}{(e^x)^y},\ y\in\mathbf{R},\ \text{pritom } \lim\limits_{y\to\infty} g(y) \text{ možno nájsť použitím l'Hospitalovho pravidla}\right)$; **8**. $f(x)\equiv 0$, $x>0$ $\left(\text{podobne ako v pr. 295.7 možno } \lim\limits_{y\to\infty} g(y),\ \text{kde } g(y) = \dfrac{x\ln xy}{y},\ y\in\mathbf{R}^+,\ \text{nájsť použitím l'Hospitalovho pravidla}\right)$; **9**. $\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$ (využite, že $\lim\limits_{y\to\infty} y\operatorname{arcctg} y = 1$ — možno to dokázať použitím l'Hospitalovho pravidla alebo použitím substitúcie $\operatorname{arcctg} y = t$); **10**. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x\in[0,1] \\ x, & \text{ak } x\in(1,2] \\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{ak } x\in(2,\infty)\end{cases}$ (pre $x\in(0,1)$

je $f_n(x)=\left[\left(1+x^n+\dfrac{x^n}{2^n}\right)^{1/n}\right]$, $f_n(1)=\sqrt[n]{2}\left[\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)^{1/n}\right]$, pre $x\in(1,2)$ je $f_n(x)=x\left[\left(1+\dfrac{1}{x^n}+\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right)^{1/n}\right]$, $f_n(2)=2^{(n+1)/n}\left[\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)^{1/n}\right]$, pre $x>2$ je $f_n(x)=\dfrac{x^2}{2}\left[\left(1+\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^n+\left(\dfrac{2}{x}\right)^n\right)^{1/n}\right]$, pritom funkcie v hranatých zátvorkách sú neurčité výrazy typu 1^∞, ktorých limity možno vypočítať postupom z pr. I.148$\Big)$; **11**. $\operatorname{sgn} x$ (načrtnite si grafy funkcií f_n); **12**. $f(x)\equiv 0$, $x>0$;

296 **1.** nech $x<y$, potom z nerovností $f_n(x)\le f_n(y)$, $n\in\mathbf{N}$, vyplýva $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\le\lim\limits_{n\to\infty} f_n(y)=f(y)$; **2.** podobne ako v pr. 296.1 prejdite k limite pre $n\to\infty$ v nerovnosti $f_n(px+qy)\le pf_n(x)+qf_n(y)$, $n\in\mathbf{N}$, kde $x,y\in(a,b)$, $p>0$, $q>0$, $p+q=1$;

297 **1.** $x>1$ (pozri vetu 5 z odseku 3.2); **2.** $|x|>1$ (použite vetu 6' alebo 7' z odseku 3.3 [1], prípady $x=1$, $x=-1$ treba vyšetriť samostatne); **3**. $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(\left[-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi\right]\right)$; **4**. $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\big[2k\pi,(2k+1)\pi\big]$; **5**. $\mathbf{R}$ (vyplýva to z Leibnizovho kritéria); **6**. $\mathbf{R}\setminus\{-1,-2,-3,\ldots\}$; **7**. $[0,\infty)$; **8**. $\mathbf{R}\setminus\{-1\}$ $\Bigg($možno použiť vetu 6' z odseku 3.3: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x}{1+x^{n+1}}\right|=\begin{cases}|x|, & \text{ak } 0<|x|<1\\ 0, & \text{ak } |x|>1\end{cases}$ [2], pre $x=1$ dostávame rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$, pre $x=0$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}0\Bigg)$; **9**. $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ (použili sme Raabeho kritérium a prípady $x=1$, $x=-1$ sme vyšetrili samostatne); **10**. $\mathbf{R}$ $\left(\left|\dfrac{\cos\pi nx}{n\ln^2(n+1)}\right|\le\dfrac{1}{n\ln^2 n}\right.$ pre $n\ge 2$ a rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ konverguje podľa integrálneho kritéria$\Big)$; **11**. $\mathbf{R}\setminus\{2k\pi\,;\,k\in\mathbf{Z}\}$ (použili sme Dirichletovo kritérium, pre dané $x\ne 2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) je postupnosť čiastočných súčtov číselného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$ ohraničená — pozri riešenie pr. 243.5); **12**. $x\in(-1,1)$ $\Bigg($pre $|x|<1$ je $\left|\dfrac{x^n}{1-x^n}\right|\le\dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$ má podľa tvrdenia α) vety 4b z odseku 3.2 rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x|^n$; pre $|x|>1$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie$\Bigg)$;

298 nech $f_n(x)=a_nx+b_n$, z konvergencie radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_na+b_n)$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nb+b_n)$ vyplýva konvergencia radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$; ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=B$, tak $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nx+b_n)=Ax+B$;

299 toto tvrdenie možno dokázať rovnako ako implikáciu „$\Longleftarrow$“ z vety 2 alebo ho z tejto implikácie odvodiť (zo vzťahov $\sup\limits_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|\le c_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$ vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|=0$);

300 **1.** rovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x>0$ $\left(\sup\limits_{x>0}|f_n(x)|=\dfrac{1}{n}\right)$; **2.** rovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\ge 0$ $\left(|f_n(x)|\le\dfrac{1}{\ln(n+1)},\ x\ge 0,\right.$ ďalej pozri pr. 299$\Big)$; **3.** rovnomerne k $\sin\dfrac{x}{2}$ $\left(\left|\sin\dfrac{1+nx}{2n}-\sin\dfrac{x}{2}\right|=\left|2\sin\dfrac{1}{2n}\cos\dfrac{1+2nx}{2n}\right|\le 2\sin\dfrac{1}{2n},\ x\in\mathbf{R}\right)$; **4.** rovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\ge 1$ (ak použijeme

[1]pripomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, pozri pr. I.135.2 alebo I.380.1

[2]pritom sme využili tvrdenie „ak $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\infty$, tak $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$“

nerovnosť $|\sin u| < |u|$ pre $u > 0$ — pozri riešenie pr. I.352.2 — dostaneme $\left|\dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^4}\sin\dfrac{x^2}{\sqrt{n}}\right| < \dfrac{n^2x^4}{\sqrt{n}(1+n^2x^4)} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$; **5.** nerovnomerne k $f(x) \equiv 0$ $\left(\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}\left|\sin\dfrac{x}{n}\right| = 1 \text{ pre každé } n \in \mathbf{N}\right)$; **6.** nerovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \geq 0$ $\Bigg($ pre $x > 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos\dfrac{\sqrt[4]{x}}{n}}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}}{n}\right)^2}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\cdot 0 = 0$, ale pre každé $n \in \mathbf{N}$ je funkcia f_n neohraničená na M — stačí vypočítať $f_n(x)$ pre $x = n\big((2k+1)\pi\big)^4$, $k \in \mathbf{N}\Bigg)$; **7.** nerovnomerne k $f(x) = x^2$, $x \geq 1$ $\big(\lim\limits_{x\to\infty}|f_n(x)-f(x)| = \infty$ pre každé $n \in \mathbf{N}\big)$; **9a)** nerovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \in [0,10]$ $\left(\sup\limits_{x\in[0,10]}|f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1\right)$; **9b)** rovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \geq 1$ $\big(\sup\limits_{x\in[1,\infty)}|f_n(x)| = f_n(1)\big)$; **10.** konverguje rovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \in (0,1)$ $\big(\sup\limits_{x\in(0,1)}|f_n(x)| = -f_n(1)$, pri hľadaní tohto čísla treba využiť, že $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$ pre každé $n \in \mathbf{N}\big)$; **11a)** rovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1-\delta]$; **11b)** rovnomerne k $f(x) \equiv 1$, $x \in [1+\delta, \infty)$;

11c) nerovnomerne k $f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak } x \in [1-\delta, 1) \\ \dfrac{1}{2}\,, & \text{ak } x = 1 \\ 1\,, & \text{ak } x \in (1, 1+\delta] \end{cases}$ $\left(\sup\limits_{x\in[1-\delta,1+\delta]}|f_n(x)-f(x)| = \dfrac{1}{2},\ n \in \mathbf{N}\ \text{[3]}\right)$;

12. nerovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \in (0,1)$ $\big(\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = 1$, preto f_n musí „vyskočiť" z každého ε–pásu okolo funkcie f pre $0 < \varepsilon < 1\big)$; **13.** rovnomerne k $f(x) = |x|$ $\left(0 < \sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} = \dfrac{(x^2+1/n^2)-x^2}{\sqrt{x^2+1/n^2}+\sqrt{x^2}} < \dfrac{1/n^2}{1/n} = \dfrac{1}{n}\right)$; **14.** rovnomerne k $f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } x \in [0,1] \\ x\,, & \text{ak } x \in (1,2] \end{cases}$ $\Bigg(|f_n(x)-f(x)| = \begin{cases} \sqrt[n]{1+x^n} - 1 \leq \sqrt[n]{2} - 1 & \text{pre } x \in [0,1] \\ \sqrt[n]{1+x^n} - x \leq \sqrt[n]{2x^n} - x = x\big(\sqrt[n]{2}-1\big) \leq 2\big(\sqrt[n]{2}-1\big) & \text{pre } x \in (1,2] \end{cases}$, teda $|f_n(x)-f(x)| \leq 2\big(\sqrt[n]{2}-1\big)$ [4]; pripomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1\Bigg)$; **15.** nerovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \geq 0$ (načrtnite si grafy funkcií

---

[3] každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, teda „vyskočí" z ε–pásu okolo funkcie f pre $0 < \varepsilon < 0.5$; na obr. 11 je znázornený tento ε–pás pre $\varepsilon = 0.2$ $\big($a $\delta = 0.5\big)$; v tomto ε–páse nemôže ležať graf žiadnej spojitej funkcie $g\colon[1-\delta, 1+\delta] \to \mathbf{R}$; funkcia g je totiž darbouxovská na $[1-\delta, 1+\delta]$ (pozri vetu 4 pred pr. I.234) a musela by preto nadobúdať všetky hodnoty z intervalu $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $\big($platí totiž $g(x) < \varepsilon$ pre $x \in [1-\delta, 1)$, $g(x) > 1-\varepsilon$ pre $x \in (1, 1+\delta]\big)$, čo ale nie je možné; podobnými úvahami možno dokázať toto tvrdenie (ktoré je špeciálnym prípadom dôsledku vety 7'): „ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií, $f_n \to g$ na M a $g|M$ má bod nespojitosti 1. druhu, tak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M k funkcii g nerovnomerne"

[4] použili sme vlastne túto elementárnu úvahu: „ak $D(f) = M \cup N$, $f_n \rightrightarrows f$ na M a $f_n \rightrightarrows f$ na N, tak

obr. 11.

$f_n\,,\ n\in\mathbf{N}$);

302 $|f(x)-f_n(x)|=\dfrac{1}{n}\big|nf(x)-[nf(x)]\big|<\dfrac{1}{n}\,,\ x\in[a,b]$;

303 **1.** platí (pre spojitú funkciu $f_n:[0,1]\to\mathbf{R}$ platí implikácia „$|f_n(x)|<\varepsilon\,,\ x\in[0,1]\cap\mathbf{Q}\Longrightarrow |f_n(x)|\le\varepsilon\,,\ x\in[0,1]$“, ktorú možno dokázať nasledovne: pre $a\in[0,1]\setminus\mathbf{Q}$ existuje postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\subset[0,1]\cap\mathbf{Q}$ taká, že $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=a$, potom — ak v nerovnosti $|f_n(a_k)|<\varepsilon$ prejdeme k limite pre $k\to\infty$ a využijeme spojitosť funkcie $|f_n|$ — dostaneme $|f_n(a)|=\lim\limits_{k\to\infty}|f_n(a_k)|\le\varepsilon$; pozri tiež pr. I.231); **2.** neplatí, napr. $f_n(x)=\left(1-\left|x-\dfrac{1}{\sqrt2}\right|\right)^n,\ x\in[0,1]$ $\quad\left(f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt2}\right)=1\,,\ n\in\mathbf{N}\right)$;

304 nepriamo; ak M nie je konečná, tak existuje prostá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M$, nech $f_n(x)=\begin{cases}0\,, & \text{ak}\quad x\in M\setminus\{a_n\}\\ 1\,, & \text{ak}\quad x=a_n\end{cases}$, potom $f_n\to0$ na M, ale neplatí $f_n\rightrightarrows0$ na M;

305 **1a)** konverguje rovnomerne k $S(x)=\dfrac{1}{1-x}\,,\ |x|\le q$ $\quad\left(S_n(x):=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}\,,\ n=0,1,\dots\,,\ |S_n(x)-S(x)|=\dfrac{x^{n+1}}{1-x}\le\dfrac{q^{n+1}}{1-q}\,,\ |x|\le q\right)$; **1b)** konverguje nerovnomerne k $S(x)=\dfrac{1}{1-x}\,,\ |x|<1$ (pre každé $n\in\mathbf{N}$ je $|S_n-S|$ neohraničená na $(-1,1)$); **2.** konverguje nerovnomerne k $S(x)=\begin{cases}0\,, & \text{ak}\quad x=1\\ 1\,, & \text{ak}\quad x\in[0,1)\end{cases}$ $\quad\left(S_n(x):=\sum\limits_{k=0}^{n}(1-x)x^k=1-x^{n+1}\,,\ n=0,1,2,\dots\,,\ \sup\limits_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=1\right)$; **3.** konverguje rovnomerne k $S(x)=2x\,,\ x\ge1$; **4.** konverguje rovnomerne k $S(x)=x\,,\ x\in[-1,1]$; **5.** konverguje rovnomerne k $S(x)=\dfrac{1}{x+1}\,,\ x>0$ $\quad\left(\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\dfrac{1}{x+n}-\dfrac{1}{x+n+1}\right)$; **6.** konverguje nerovnomerne k $S(x)\equiv1\,,\ x>0$ $\quad\left(S_n(x):=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x}{\big((n-1)x+1\big)\big(nx+1\big)}=1-\dfrac{1}{nx+1}\,,\ \lim\limits_{x\to0}|S_n(x)-S(x)|=1\right)$;

306 stačí aplikovať tvrdenie pr. 301 na postupnosť $S_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k$ a funkciu g;

307 **1.** nech $S_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k\,,\ S:=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k$; ak pre $n>n_0$ a všetky $x\in M$ platí $|S_n(x)-S(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, tak z nerovností $|S_n(x)-S(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ a $|S_{n+1}(x)-S(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ vyplýva $|f_{n+1}(x)|=|S_{n+1}(x)-S_n(x)|=\big|\big(S_{n+1}(x)-S(x)\big)+\big(S(x)-S_n(x)\big)\big|\le|S_{n+1}(x)-S(x)|+|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$ pre všetky $n>n_0$ a $x\in M$ (uvedené tvrdenie možno odvodiť aj z vety 3);

2a) bodová konvergencia vyplýva napr. z Cauchyho kritéria; pre každé $n\in\mathbf{N}$ je $\lim\limits_{x\to0}e^{-nx}=1$, preto neplatí $e^{-nx}\rightrightarrows0$ na $(0,\infty)$, a teda podľa pr. 307.1 rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ nekonverguje rovnomerne na $(0,\infty)$; **2b)** pri vyšetrovaní bodovej konvergencie využite pre $x\ne0$ rovnosť $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}u}{u}=1$ a porovnávacie kritérium; $\forall\,n\in\mathbf{N}:\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{n}\right)^2=\dfrac{\pi^2}{4}$, preto neplatí $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{n}\right)^2\rightrightarrows0$ na $\mathbf{R}$; **2c)** $\sup\limits_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)|=f_n\left(\dfrac{1}{5^{1/3}n^{2/3}}\right)=\dfrac{5^{5/6}}{6}\,n^{1/6}$, kde $f_n(x):=\dfrac{\sqrt{nx}}{1+x^3n^2}$; **2d)** pri vyšetrovaní bodovej konvergencie využite rovnosť $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}=1$ a porovnávacie kritérium; pre každé $n\in\mathbf{N}$ je funkcia $f_n(x):=2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}\,,\ x>0$, neohraničená $\left(\text{stačí vypočítať } f_n\left(\dfrac{2}{3^n\pi(1+2k)}\right),\ k\in\mathbf{N}\right)$; **2e)** bodová konvergencia vyplýva z nerovnosti $\left|\dfrac{\sin nx}{(1+nx)\sqrt{nx}}\right|\le\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{n^{3/2}}$; pretože $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\sin1}{2}$ pre všetky $n\in\mathbf{N}$, nemôže platiť $\dfrac{\sin nx}{(1+nx)\sqrt{nx}}\rightrightarrows0$ na $(0,\pi)$;

$f_n\rightrightarrows f$ na $M\cup N$“

3. napr. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+1}{n}$ $\big($tento rad dokonca nekonverguje pre žiadne $x \in [0,1]$, porovnaj s pr. 373; na týchto dvoch príkladoch vidno rozdiel medzi termímni ,,nekonverguje rovnomerne" a ,,konverguje nerovnomerne"$\big)$;

308 **1.** pre $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ platí $x^2 e^{-(n+1)x^2} + x^2 e^{-(n+2)x^2} + \cdots + x^2 e^{-2nx^2} \geq e^{-2}$; **3.** pri vyšetrovaní bodovej konvergencie využite nerovnosť $|\operatorname{arctg} u| \leq |u|$ [5]; pre $x = 2n\pi$ je $\frac{x}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{n+1} + \frac{x}{n+2} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{n+2} + \cdots + \frac{x}{2n} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{2n} \geq \pi n \operatorname{arctg} \frac{1}{2n}$, pritom $\lim_{n\to\infty} \pi n \operatorname{arctg} \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$, preto $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \ \forall n \in \mathbf{N},\, n > n_0 \ :\ \pi n \operatorname{arctg} \frac{1}{2n} > \frac{\pi}{4}$, teda celkovo $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \ \forall n \in \mathbf{N},\, n > n_0\ \ \exists x > 1 \ :\ \frac{x}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{n+1} + \cdots + \frac{x}{2n} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{2n} > \frac{\pi}{4}$; **4.** pri vyšetrovaní bodovej konvergencie využite nerovnosť $\left| \frac{\sin nx}{e^{n^2 x}} \right| \leq \left(\frac{1}{e^x} \right)^{n^2}$ a potom napr. Cauchyho kritérium; pre $x = \frac{1}{n^2}$ je $\frac{\sin(n+1)x}{e^{(n+1)^2 x}} + \frac{\sin(n+2)x}{e^{(n+2)^2 x}} + \cdots + \frac{\sin 2nx}{e^{(2n)^2 x}} \geq \frac{n \sin(1/n)}{e^4}$, pritom $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^4} n \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{e^4}$, ďalej pozri záver riešenia pr. 308.3;

309 **1.** ak $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak (ak v uvedenej nerovnosti prejdeme k limite pre $x \to a+$, $x \to b-$) platí $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$ pre všetky $x \in [a,b]$, preto: ak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ vyhovuje Cauchyho–Bolzanovmu kritériu na (a,b), tak mu vyhovuje aj na $[a,b]$; **2.** uvedený rad diverguje v bodoch $x = 2$, $x = -2$ (nie je splnená nutná podmienka konvergencie), ďalej pozri pr. 309.1 [6]; nezabudnite dokázať bodovú konvergenciu na $(-2,2)$;

310 $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)|$, $x \in M$;

311 **1.** $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$; **2**. $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$; **3**. $|f_n(x)| \leq e^{-\sqrt{n}}$, $x \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$, konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ vyplýva z rovnosti $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = 0$ [7] a z porovnávacieho kritéria; **5**. $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$; **6**. $|f_n(x)| \leq \frac{x^2}{n \ln^2 n} \leq \frac{a^2}{n \ln^2 n}$, $x \in [-a,a]$, $n = 2,3\ldots$, ďalej použite integrálne kritérium; **8**. $\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{e^2 n^2}$; **9**. $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$; **10**. $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}\, n \ln^{3/2}(n+1)}$, pri vyšetrovaní konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{3/2}(n+1)}$ použite nerovnosť $\frac{1}{n \ln^{3/2}(n+1)} < \frac{1}{n \ln^{3/2} n}$, $n > 1$ $\left(\text{alebo rovnosť } \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n \ln^{3/2}(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)\ln^{3/2}(n+1)}} \right.$ a tvrdenie α) vety 4b z odseku 3.2$\Big)$ a integrálne kritérium; **11**. $|f_n(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}}$, $x \geq 0$, pre $g_n(x) := \frac{\sqrt{x}}{n\sqrt{x^2+n^2}}$ platí $\sup_{x\geq 0} g_n(x) = g_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{3/2}}$, teda $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{3/2}}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$; **12**. $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} f_n(x) = f_n\big(n^{3/2}\big) = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^{3/2}}$, pri vyšetrovaní

---

[5]tá vzhľadom na nepárnosť funkcie arctg vyplýva z nerovností $0 \leq \operatorname{arctg} x \leq x$, $x \geq 0$, z ktorých druhú možno dokázať na základe vety 12 pred pr. I.352

[6]pri týchto úvahách by sme namiesto tvrdenia z pr. 309.1 mohli rovnako dobre použiť aj vetu 7' z odseku 4.2

[7]možno to dokázať použitím l'Hospitalovho pravidla na výpočet $\lim_{y\to\infty} g(y)$, kde $g(y) := \frac{y^4}{e^y}$, $y \in \mathbf{R}$

konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^{3/2}}$ využite rovnosť $\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$ (alebo nerovnosť $\operatorname{arctg} u < u$, $u > 0$ — pozri riešenie pr. 308.3) a porovnávacie kritérium;

$\boxed{\mathbf{312}}$ z monotónnosti funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, vyplýva $|f_n(x)| \le \max\{|f_n(a)|, |f_n(b)|\} \le |f_n(a)| + |f_n(b)|$, $x \in [a,b]$;

$\boxed{\mathbf{314}}$ **1.** pre $f_n(x) \equiv (-1)^n$, $g_n(x) = \frac{1}{x+n}$ sú na M splnené predpoklady vety 6; **3.** pre $f_n(x) \equiv \frac{(-1)^n}{n}$, $g_n(x) = x^n$ sú na M splnené predpoklady vety 5;

$\boxed{\mathbf{315}}$ pre $f_n(x) \equiv a_n$, $g_n(x) = \frac{1}{n^x}$ sú splnené predpoklady vety 5;

$\boxed{\mathbf{316}}$ **1.** rovnomerne; **2.** rovnomerne; **3.** rovnomerne $\big(M = (-\infty, 0)\big)$; **4.** nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie — pozri pr. 307.1; nezabudnite, že treba dokázať bodovú konvergenciu na M); **5.** nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie); **6.** rovnomerne $\left(|f_n(x)| \le \frac{1}{2n(4+\ln^2 2n)},\ x \ge 2\right)$; **7.** rovnomerne (možno použiť vetu 5); **8.** rovnomerne (pozri myšlienku riešenia pr. 311.11); **9.** rovnomerne $\Bigg($možno použiť vetu 6, pre $x \ne 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, je $\sum_{m=1}^{n} \sin x \sin mx = \sin x \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$, rovnosť $\sum_{m=1}^{n} \sin x \sin mx = \cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$ platí zrejme aj pre $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; pozri aj pr. 243.4$\Bigg)$; **10a)** rovnomerne $\left(\left|\sum_{m=1}^{n} \sin mx\right| \le \frac{1}{\sin(\varepsilon/2)}\right.$ pre $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, v súvislosti s pr. 316.10b si uvedomte, že $\left.\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\sin(\varepsilon/2)} = \infty\right)$; **10b)** nerovnomerne $\Big($nie je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium: $\frac{\sin(1+1/n)}{n+1} + \frac{\sin(1+2/n)}{n+2} + \cdots + \frac{\sin(1+n/n)}{n+n} \ge \frac{\sin 1}{2}$, $n \in \mathbf{N}$; opäť nezabudnite dokázať bodovú konvergenciu$\Big)$; **11a)** rovnomerne $\left(|f_n(x)| \le \frac{1}{n\sqrt{n}},\ x \in (0,1)\right)$; **11b)** nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie); **12a)** rovnomerne; **12b)** nerovnomerne $\left(\right.$nie je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium: $\left.\frac{n}{(n+1)^2} \sin\frac{n^2}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{n}{(2n)^2} \sin\frac{n^2}{(2n)^2} \ge \frac{1}{4}\sin\frac{1}{4},\ n \in \mathbf{N}\right)$; **13a)** nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie); **13b)** rovnomerne $\left(\right.$pri vyšetrovaní konvergencie majorantného radu využite fakt, že $\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$ a porovnávacie kritérium$\left.\right)$; **14.** rovnomerne $\big($využite nerovnosť $|\operatorname{arctg} u| \le |u|$, $u \in \mathbf{R}$, pozri aj riešenie pr. 308.3$\big)$;

$\boxed{\mathbf{317}}$ **1.** 1 $\left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n};\right.$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ konverguje rovnomerne napr. na $[0,1]$ [8] podľa Weierstrassovho kritéria$\left.\right)$ [9]; **2.** $\frac{1}{2}\ln 2$ $\left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}\right.$, pozri pr. 247.2, pri vyšetrovaní rovnomernej konvergencie na niektorom okolí bodu 1 použite Abelovo kritérium$\left.\right)$ [10]; **3.** 1 $\left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)};\ \left|\frac{x^2}{1+n(n+1)x^2}\right| \le\right.$

---

[8] za množinu M z vety 7' sme mohli v tomto prípade zvoliť napr. aj $(0,\infty)$, $[0,\infty)$ alebo ľubovoľný interval $[0,a]$, $(0,a)$

[9] treba si uvedomiť, že vety 7 a 7' možno použiť aj pri výpočte jednostranných limít, pretože napr. $\lim_{x \to a+} f(x)$ je definovaná rovnosťou $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)|D(f) \cap (a, a+\varepsilon)$

[10] Pri riešení tohto príkladu (aj pr. 317.1) sme vlastne využili tento dôsledok vety 7': *Ak každá z funkcií*

$\frac{1}{n(n+1)}$, $x \in \mathbf{R}\Big)$; **4**. 1 $\Big($v tomto prípade nie sme oprávnení použiť vetu 7', rad $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$ bodove konverguje k funkcii $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \in (-1,1) \\ 0, & \text{ak } x = 1 \end{cases}$, ale táto konvergencia nie je rovnomerná na žiadnom z intervalov $(\varepsilon, 1)$, kde $-1 < \varepsilon < 1\Big)$;

318 **1**. $D(f) = \left[\frac{1}{e}, e\right]$, každá z fukcií $f_n(x) := \frac{\ln^n x}{n^2}$ je spojitá na $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ podľa Weierstrassovho kritéria, preto podľa dôsledku vety 7' je f spojitá funkcia; **2.** spojitá na $D(f) = [0, \infty)$ $\big($daný rad konverguje rovnomerne na $[0, \infty)$ podľa Weierstrassovho kritéria$\big)$; **3.** spojitá na $\mathbf{R}$ (daný rad konverguje rovnomerne na $\mathbf{R}$); **4.** spojitá na $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $\Big($daný rad konverguje lokálne rovnomerne na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ [11]; ak $[a - \varepsilon\,,\, a + \varepsilon] \subset D(f)$, tak $\left|e^{-n^2x^2} \cos nx\right| < e^{-n^2(|a|-\varepsilon)}$ pre $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\Big)$; **6**. $D(f) = \mathbf{R}$, f nie je spojitá v bode 0 [12] $\Big($daný rad je geometrický pre každé pevné x, nie je teda ťažké nájsť jeho súčet: $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{ak } x \neq 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}\Big)$;

319 $|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$, pri odhade prvej, resp. druhej absolútnej hodnoty vpravo využite fakt, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$, resp. spojitosť funkcie f;

320 nech je dané $\varepsilon > 0$, zvoľme $n \in \mathbf{N}$ tak, aby $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $x \in M$; existuje $\delta > 0$ tak, že platí implikácia $|x - y| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $x, y \in M$; potom $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ $\big($špeciálne v prípade $M = [a, b]$ vyplýva tvrdenie pr. 320 z vety 6 pred pr. I.251 a z dôsledku vety 7; v prípade $M = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbf{R}$, z vety 7 a pr. I.255$\big)$;

321 **1.** áno, napr. $f(x) = \frac{1}{n}\chi(x)$, kde χ je Dirichletova funkcia; **2.** áno, napr. $f_n = f$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$, kde f je daná nespojitá funkcia;

324 **1**. $\frac{3}{4}$ $\Big($podľa Weierstrassovho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ konverguje rovnomerne na $[\ln 2, \ln 5]$, preto podľa vety 8' je $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 5} ne^{-nx}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{5^n}\right)\Big)$; **2**. π;

325 $\ln 2 - \frac{1}{2}$ $\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^{2n-2}(1-t)^2\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-2}(1-t)^2\, dt$, daný rad je geometrický pre každé $t \in [0, 1]$, rovnomernú konvergenciu možno dokázať napr. Weierstrassovým kritériom [13] $\Big($pretože $\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n-2} = e^{-2}$, má majorantný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n-2}\frac{1}{n^2}$ rovnaký

$f_n : M \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, *je spojitá v bode* $a \in M$ *a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje rovnomerne na* M, *tak funkcia* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je spojitá v bode* a.

[11] ale nekonverguje rovnomerne na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, pretože $\lim_{x \to 0} e^{-nx^2} \cos nx = 1$, a na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ teda nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie

[12] z vety 7', resp. z jej dôsledku formulovaného v poznámke [10] k riešeniu pr. 317.2 potom vyplýva, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^n}$ nemôže konvergovať rovnomerne na žiadnom okolí bodu 0

[13] alebo — čo je oveľa jednoduchšie — *Diniho kritériom*: *Ak* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť spojitých nezáporných*

charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{326}}$ pretože $[a,b]\setminus M\subset D(f)\subset[a,b]$ $\Bigg($rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ môže konvergovať aj v niektorých bodoch množiny $M\Bigg)$, vzťahuje sa na funkciu f poznámka 2 za vetou 6 z odseku 2.1, nech $\overline{f}_n(x) := \begin{cases} f_n(x)\,, & \text{ak } x\in[a,b]\setminus M \\ 0\,, & \text{ak } x\in M\end{cases}$, $n\in\mathbf{N}$, $\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x)\,, & \text{ak } x\in[a,b]\setminus M \\ 0\,, & \text{ak } x\in M\end{cases}$; potom $\displaystyle\int_a^b\overline{f}_n(x)\,dx = \int_a^b f_n(x)\,dx$, $\displaystyle\int_a^b\overline{f}(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n\rightrightarrows\overline{f}$ na $[a,b]$ (pozri pozn. [4] k riešeniu pr. 300.14) a rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n$ možno integrovať člen po člene;

$\boxed{\mathbf{327}}$ **1**. $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{2n+2}-x^{2n}\right) = \begin{cases} -x^2\,, & \text{ak } |x|<1 \\ 0\,, & \text{ak } |x|=1\end{cases}$, podľa vety 6 z odseku 2.1 je $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx = -\int_{-1}^{1}x^2\,dx$; pozri tiež pr. 383.1;

$\boxed{\mathbf{330}}$ **1**. rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{5/2}}$ konverguje napr. v bode 0 a rad derivácií $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{3/2}}$ konverguje rovnomerne na $\mathbf{R}$, na ohraničenom intervale $(-a,a)$ sú teda splnené predpoklady vety 9', rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{5/2}}$ možno preto derivovať člen po člene v každom bode $x\in(-a,a)$; táto úvaha platí pre každé $a>0$, preto $f'(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{3/2}}$; spojitosť funkcie f' vyplýva priamo z dôsledku vety 7'; **2.** rovnomernú konvergenciu radu derivácií na $\mathbf{R}$ možno dokázať Weierstrassovým kritériom, dôkaz rovnomernej konvergencie radu derivácií na každom z intervalov $(-a,a)$ — čo pre naše potreby stačí— je jednoduchší: $\left|\dfrac{2\cdot(-1)^{n+1}x}{(n+x^2)^2}\right|\le\dfrac{2a}{n^2}$, $x\in(-a,a)$; **3.** pri dôkaze rovnomernej konvergencie radu derivácií na $\mathbf{R}$ použite nerovnosť $|\cos nx|\le 1$ a integrálne kritérium;

$\boxed{\mathbf{331}}$ **2a)** $D(f)=(1,\infty)$, rad k–tych derivácií $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^k n}{n^x}$ konverguje rovnomerne na každom intervale (a,∞), kde $a>1$, podľa Weierstrassovho kritéria (k dôkazu konvergencie majorantného číselného radu pozri návod k pr. 214.7); na každom ohraničenom intervale (a,b), kde $a>1$, sú splnené predpoklady tvrdenia z pr. 331.1, a daný rad možno teda k–krát derivovať člen po člene v každom bode $x\in(a,b)$; spojitosť funkcie $f^{(k)}$ vyplýva z jej diferencovateľnosti;

$\boxed{\mathbf{332}}$ nech $F_n:[a,b]\to\mathbf{R}$ je primitívna funkcia k funkcii f_n taká, že $F_n(a)=0$, potom postupnosť $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovuje predpokladom vety 9;

$\boxed{\mathbf{333}}$ **1.** neplatí napr. $I=\mathbf{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x}{2^n}$; **2.** platí, dôkaz sa zakladá na myšlienkach použitých pri riešení pr. 330.1;

$\boxed{\mathbf{334}}$ **2.** pozri pr. 300.13 alebo pr. 192 a 193, ktoré umožňujú skonštruovať postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ požadovaných vlastností k ľubovoľnej spojitej funkcii $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, pre ktorú neexistuje $f'(0)$;

$\boxed{\mathbf{335}}$ **1**. $\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ $\left(a=-1\,,\ R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}}=\dfrac{1}{3}\right)$; **2**. $(-2,6)$ $\left(a=2\,,\ R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=4\right)$; **3**. $(-e^3,e^3)$; **4**. $R=0$, pre mocninové rady s polomerom konvergencie 0 sme pojem intervalu konvergencie nezaviedli; **5**. $(-\infty,\infty)$ pre $a\in(0,1)$, $(-1,1)$ pre $a=1$; pre $a>1$ je $R=0$; **6**. $(2,4)$ $\left(\text{pri výpočte } R \text{ na základe vety 11 využite, že } \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}=0\right)$; **7**. $(-e,e)$ $\Bigg($na

---

funkcií a rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ *konverguje na kompaktnej množine* M *bodove k spojitej funkcii, tak rad* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ *konverguje rovnomerne na* M (pozri [24,str. 134, dôsledok vety 2] alebo [10, odst. 431, veta 2]).

výpočet R možno použiť vetu 12 alebo využiť rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}$, pozri poznámku za pr. 224$\Big)$; **8**. $\left(-2^{-1/4},2^{1/4}\right)$ [14]; **9**. $\left(-\dfrac12,\dfrac12\right)$ $\Big($v postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $b_n:=\sqrt[n]{|a_n|}$, konvergujú podpostupnosti $\{b_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_{4k-2}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_{4k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{k\to\infty} b_{4k}=\lim\limits_{k\to\infty} b_{2k-1}$, pozri aj riešenie pr. I.160$\Big)$; **10**. $(1,5)$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\sin(n^2/2^n)}{n^2/2^n}}\cdot\dfrac{(\sqrt[n]{n})^2}{2}=\dfrac12\right)$;

$\boxed{\textbf{336}}$ **1**. $(-1,1)$ pre $p\le 0$, $[-1,1)$ pre $p\in(0,1]$, $[-1,1]$ pre $p>1$; **2**. $(-3,-1)$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt[n]{n})^4\sqrt[n]{1+3/n^4}}{(\sqrt[n]{n})^3\sqrt[n]{1+4/n^2}}\right.$, možno tiež použiť vetu 12$\Big)$ [15]; **3**. $(-4,4)$ $\Big($divergencia v bodoch $x=4$ a $x=-4$ vyplýva z vety 6' v odseku 3.3: $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|>1$, $n\in\mathbf{N}$, kde $b_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$, resp. $b_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n\Big)$; **4**. $(-1,1)$ $\Big(\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k!]{k!}$ $(=\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{m})$ $=1$, pozri tiež postup v bode a) poznámky [14] k riešeniu pr. 335.8$\Big)$; **5**. $\{0\}$ pre $a\in(0,1]$, $\mathbf{R}$ pre $a>1$ $\Big($možno použiť vetu 12 aj vetu 11: $\sqrt[n]{\dfrac{n!}{a^{n^2}}}=\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}\cdot\dfrac{n}{a^n}$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}=\dfrac1e$, pozri poznámku za pr. 224$\Big)$; **6**. $[-2,0)$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sin\alpha_n)/\alpha_n}{(\sin\alpha_{n+1})/\alpha_{n+1}}\cdot\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n}\right.$, kde $\alpha_n:=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, podobne možno pomocou rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\alpha_n}{\alpha_n}=1$ nájsť aj $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$; v bode 0 má daný rad rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, konvergencia v bode -2 vyplýva z Leibnizovho kritéria$\Big)$; **7**. $[-2,0]$ $\Big($postupujte ako v pr. 336.6, využite rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}=1$, kde $\alpha_n=$

---

[14]treba si uvedomiť, že postupnosťou $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ koeficientov tohto mocninového radu nie je postupnosť 0,2,4,8,16,..., ale postupnosť 0,0,0,0,2,0,0,0,4,0,0,0,8,0,0,0,16,0,... (pozri tiež poznámku [21] k úvodu odseku 4.3.1), pri hľadaní čísla R možno v tomto prípade zvoliť niektorý z nasledujúcich postupov:

a) použiť priamo vetu 11: postupnosťou $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť $0,0,0,\sqrt[4]{2},0,0,0,\sqrt[8]{4},0,\dots,\sqrt[4n]{2^n},0,0,0,\dots$, ktorej hromadnými hodnotami sú čísla 0 a $\sqrt[4]{2}$ (pozri riešenie pr. I.160), preto $R=\dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$;

b) použiť substitúciu $x^4=t$, ktorou dostaneme mocninový rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^nt^n}{n^2}$ s polomerom konvergencie $R_1=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n}}=\dfrac12$; podľa definície polomeru konvergencie rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^nt^n}{n^2}$ konverguje pre $|t|<R_1$ a diverguje pre $|t|>R_1$, preto rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^nx^{4n}}{n^2}$ konverguje pre $|x^4|<R_1$ a diverguje pre $|x^4|>R_1$;

c) na vyšetrenie konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^nx^{4n}}{n^2}$ použiť d'Alembertovo alebo Cauchyho kritérium (vety 6' a 7' z odseku 3.3, z nich sú napokon odvodené aj vety 11, 12), pozri tiež pr. 339.3

[15]nie ja ťažké dokázať nasledujúce tvrdenie: „ak Q je racionálna funkcia, ktorá je kladná na $[1,\infty)$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[k]{Q(n)}\,x^n$ má polomer konvergencie 1" (vyšetrenie oboru konvergencie tohto radu prenechávame snaživému čitateľovi)

$-\dfrac{4}{3n+2}\Big)$; **8**. $[-1,1)$ $\left(\text{využite rovnosť } \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{a^u-1}{u}=\ln a\,,\ a>0\right)$; **9**. $\left(-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right)$ $\Big($pre $x=\dfrac{1}{e}$, $x=-\dfrac{1}{e}$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie [16]$\Big)$; **10**. $(-1,1)$ $\big($z nerovností $1\le |a_n|\le n$ vyplýva $1\le \sqrt[n]{|a_n|}\le \sqrt[n]{n}$, preto $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$ [17]$\big)$; **11**. $\left[-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ $\left(\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{3\sqrt[n]{1+(-2/3)^n}}{\sqrt[n]{n}}\right.$; v prípade $x=-\dfrac{2}{3}$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n3^n}$ súčtom radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$, z ktorých prvý diverguje a druhý konverguje; postup pre $x=-\dfrac{4}{3}$ je obdobný$\Big)$; **12**. $(-a,a)$; **13**. $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ $\Big($rad $\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{2m}$, kde $a_n:=\dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$, diverguje v bodoch $\dfrac{1}{4}$ a $-\dfrac{1}{4}$, rad $\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{2m-1}$ v týchto bodoch konverguje, preto rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje pre $x=\dfrac{1}{4}$ a $x=-\dfrac{1}{4}\Big)$; **14**. $[-1,1)$ (pozri pr. 240);

338 $R=1$ $\big($konvergencia pre $|x|<1$ vyplýva z vety 10, keby daný rad konvergoval pre niektoré x také, že $|x|>1$, musel by podľa vety 10 konvergovať absolútne v bode 1$\big)$;

339 **1a**) $R=\min\{R_1,R_2\}$ $\Big($rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ konverguje, ak $|x|<R_1\wedge|x|<R_2$ (súčet dvoch konvergentných radov konverguje) a iste diverguje, ak $R_2<|x|<R_1$ (súčet konvergentného a divergentného radu diverguje)$\Big)$; **1b**) $R\ge R_1$ $\big($ak zvolíme $a_n=-b_n$ tak, že rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ má konečný polomer konvergencie, vidíme, že skutočne môže nastať prípad $R>R_1\big)$; **2a**) $r=R^k$, ak $R\in\mathbf{R}_0^+$; $r=\infty$, ak $R=\infty$ $\big($ak $b_n\ge 0$, $n\in\mathbf{N}$, a $\limsup\limits_{n\to\infty}b_n=R\in\mathbf{R}_0^+$, tak $\limsup\limits_{n\to\infty}b_n^k=R^k$: podpostupnosť $\{b_{n_s}\}_{s=1}^{\infty}$ totiž konverguje k číslu b práve vtedy, keď $\lim\limits_{s\to\infty}b_{n_s}^k=b^k$ $(k>0)$, preto množina H_1 hromadných hodnôt postupnosti $\{b_n^k\}_{n=0}^{\infty}$ má tvar $H_1=\{h^k\,;\,h\in H\}$, kde H je množina hromadných hodnôt postupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, v prípade $R=\infty$ je postup rovnaký$\big)$; **2b**) $r=\sqrt[k]{R}$, ak $R\in\mathbf{R}_0^+$; $r=\infty$, ak $R=\infty$ (pozri postup b) v poznámke [14] k riešeniu pr. 335.8); **3.** na vyšetrenie konvergencie daého radu použite d'Alembertovo kritérium (veta 6' z odseku 3.3);

341 **1.** podľa vety 10 rad konverguje v bode $x=1$, a teda tam spĺňa nutnú podmienku konvergencie; **2.** podľa vety 11 je $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$, preto aspoň jedna podpostupnosť $\left\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right\}_{k=1}^{\infty}$ má limitu väčšiu ako 1 alebo rovnú ∞, potom $\lim\limits_{k\to\infty}|a_{n_k}|=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right)^{n_k}=\infty$ $\big($možno tiež dokazovať nepriamo: ak $|a_k|\le K$, $n\in\mathbf{N}$, tak $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\le\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{K}=\lim\sqrt[n]{K}=1\big)$;

342 **2**. $\dfrac{2x}{(1-x)^3}$, $x\in(1,1)$ $\Big($ak $f(x):=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$, tak $\int_0^x f(t)\,dt=x^2g(x)$, kde $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$; $\int_0^x g(t)\,dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=-1+\dfrac{1}{1-x}$, $x\in(-1,1)$; preto $f(x)=\left(x^2\left(-1+\dfrac{1}{1-x}\right)'\right)'$, $x\in$

---

[16] $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\Big/e^n=e^{E(n)}$, kde $E(n)=n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-n=n^2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)-n=n-\dfrac{1}{2}+n^2o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)-n=-\dfrac{1}{2}+n^2o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, preto $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\Big/e^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-1/2+n^2o(1/n^2)}=e^{-1/2}$; pripomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty}n^2o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=0$

[17] pri výpočte polomeru konvergencie R sme mohli tiež využiť vzťah $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=\ln n+\varepsilon_n$, kde $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ (pozri pr. 220), potom $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\cdots+1/n}{1+\cdots+1/(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n+\varepsilon_n}{\ln(n+1)+\varepsilon_{n+1}}=1$

$(-1,1)\Big)$; **3**. $\dfrac{2x(6-x)}{(2-x)^3}$, $|x|<2$ $\Big($najprv sme použili substitúciu $\dfrac{x}{2}=t$; nech $f(t):=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)t^n$, zrejme $f(0)=0$, pre $t\in(-1,1)$, $t\neq 0$ je $f(t)=\dfrac{1}{t}\,g(t)$, kde $g(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)t^{n+1}$; pre g dostávame $g(t)=\left(t^3\left(-1+\dfrac{1}{1-t}\right)'\right)'=\dfrac{t^2(3-t)}{(1-t)^3}$, $|t|<1$, teda pre $t\in(-1,1)$, $t\neq 0$ je $f(t)=\dfrac{t(3-t)}{(1-t)^3}$; pretože pravá strana má pre $t=0$ hodnotu 0, môžeme tento predpis použiť aj pre $t=0\Big)$; **4**. $\dfrac{x(x-3)}{3(x+3)^3}$, $|x|<3$;

$\boxed{\mathbf{343}}$ **1**. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$; **2**. 0 pre $x=0$, $\dfrac{1}{4x^2}\left(2\operatorname{arctg}2x+\ln\dfrac{1+2x}{1-2x}\right)$ pre $x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)\setminus\{0\}$ (použili sme substitúciu $2x=t$); **3**. $2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)$, $|x|\le 1$ (pre body $x=1$, $x=-1$ sme využili poznámku 1 za riešením pr. 343.4);

$\boxed{\mathbf{344}}$ **1**. $\ln 2$; **3**. $\dfrac{3}{2}$ $\left(=g\left(\dfrac{1}{3}\right),\ \text{kde } g(t):=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2t^n\right)$; **4**. $2-2\ln 2$ $\left(=g(1),\ \text{kde } g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}\right)$;

$\boxed{\mathbf{345}}$ **1**. napr. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n$; **2**. nech $f_n(x):=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_nx^n$, $x\in[0,1]$; $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_nx^n$, $x\in[0,1)$; postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ je neklesajúca pre každé $x\in[0,1]$, preto $f_n(x)\le f(x)$, $n=0,1,\ldots$, $x\in[0,1)$, a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k=\lim_{x\to 1-}f_n(x)\le\lim_{x\to 1-}f(x)=S$, teda $\left\{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\left(=\{f_n(1)\}_{n=0}^{\infty}\right)$ je zhora ohraničená neklesajúca — tj. konvergentná — postupnosť, odtiaľ už na základe poznámky za riešením pr. 344.2 vyplýva dokazované tvrdenie [18]; tento príklad ukazuje, že za istých predpokladov možno implikáciu z poznámky za riešením pr. 344.2 obrátiť;

$\boxed{\mathbf{346}}$ podľa poznámky za riešením pr. 344.2 je $A=\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)$, $B=\displaystyle\lim_{x\to 1-}g(x)$, kde $f(x):=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $g(x):=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$; rad $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ je Cauchyho súčin radov $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, ktoré absolútne konvergujú v každom bode intervalu $(-1,1)$ (pozri vetu 10), preto podľa vety 17 z odseku 3.4 pre každé $x\in(-1,1)$ platí $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=f(x)g(x)$, potom — opäť podľa poznámky za riešením pr. 344.2 — $C=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=AB$;

$\boxed{\mathbf{347}}$ **1**. derivácia párnej (nepárnej) funkcie (pokiaľ existuje) je nepárna (párna) funkcia, pritom pre nepárnu funkciu g platí $g(0)=0$; **2**. ak f je súčet radu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, tak $f(x)=0$ pre $x\in[0,\varepsilon)$ (vyplýva to z predpokladov a zo spojitosti funkcie f v bode 0), potom podľa vety 17 je $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{f_+^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{0}{n!}=0$, $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$;

$\boxed{\mathbf{348}}$ **1**. $a^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\ln^n a}{n!}\,x^n$, $x\in\mathbf{R}$; **2**. $\operatorname{ch}ax=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in\mathbf{R}$; **3**. $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(n+1)!}$, $x\in\mathbf{R}$; **4**. $x\sin 2x\cos 3x=\dfrac{1}{2}x(\sin 5x-\sin x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{5^{2n-1}-1}{2(2n-1)!}\,x^{2n}$, $x\in\mathbf{R}$; **5**. $\sin^3 x=\sin x\,\cdot$

[18] toto tvrdenie možno dokázať aj bez použitia uvedenej poznámky, v takom prípade zostáva dokázať rovnosť $S=\sup\{f_n(1)\,;\,n\in\mathbf{N}\}$, na to okrem predchádzajúceho využijeme ešte skutočnosť, že funkcie f_n $(n=0,1,\ldots)$ a f sú neklesajúce (pozri pr. 296.1), potom druhá vlastnosť suprema vyplýva z nerovnosti $S-f_n(1)=\big(S-f(1-\delta)\big)+\big(f(1-\delta)-f_n(1-\delta)\big)+\big(f_n(1-\delta)-f(1)\big)\le\big(S-f(1-\delta)\big)+\big(f(1-\delta)-f_n(1-\delta)\big)$ a z tvrdení $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta\in(0,1)\ :\ S-f(1-\delta)<\varepsilon/2$ (ktoré vyplýva z rovnosti $\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=S$) a $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta\in(0,1)\ \exists n\in\mathbf{N}\ :\ f(1-\delta)-f_n(1-\delta)<\varepsilon/2$ $\big($to platí, pretože $f_n\to f$ na $[0,1)\big)$

$\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{3(-1)^n}{4(2n-1)!}(3^{2n-2}-1)x^{2n-1}$ [19], $x \in \mathbf{R}$; **6**. $\dfrac{1}{a+bx} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}}x^n$, $|x| < \left|\dfrac{a}{b}\right|$; **7**. $\dfrac{5x-4}{x+2} = 5 - 7\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{2}} = -2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{7(-1)^{n-1}}{2^n}x^n$, $|x|<2$; **8**. $\dfrac{1}{x^2-2x-3} = -\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{4}\left((-1)^{n+1} - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$, $|x| < 1$; **9**. $\dfrac{1}{1+x+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde $a_n = \begin{cases} 1, & \text{ak } n = 3k,\ k \in \mathbf{N}\cup\{0\} \\ -1, & \text{ak } n = 3k+1,\ k \in \mathbf{N}\cup\{0\} \\ 0, & \text{ak } n = 3k+2,\ k \in \mathbf{N}\cup\{0\} \end{cases}$ (to možno zapísať aj v tvare $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{2\pi(n+1)}{3}$), $|x| < 1$ (pre $x \neq 1$ je $\dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{1-x}{1-x^3}$); **10**. $\dfrac{x}{(1-x^3)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{3n+1}$, $|x|<1$ (Maclaurinov rad funkcie $\dfrac{1}{(1-u)^2}$ môžeme nájsť napr. derivovaním člen po člene Maclaurinovho radu funkcie $\dfrac{1}{1-u}$); **11**. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} = \dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!\,a^{2n+1}}x^{2n}$, $|x| \le a$; **12**. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$; **13**. $\ln(12-x-x^2) = \left(\ln 3 + \ln\left(1-\dfrac{x}{3}\right)\right) + \left(\ln 4 + \ln\left(1+\dfrac{x}{4}\right)\right) = \ln 12 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{4^n} - \dfrac{1}{3^n}\right)x^n$, $x \in [-3,3)$; **14**. $\ln(1+x+x^2+x^3) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, kde $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{ak } n = 2k-1 \text{ alebo } n = 4k-2,\ k \in \mathbf{N} \\ -\dfrac{3}{n}, & \text{ak } n = 4k,\ k \in \mathbf{N} \end{cases}$, $x \in (-1,1]$ (daný rad má polomer konvergencie $R = 1$, pričom je súčtom dvoch radov, z ktorých jeden konverguje v bode $x = 1$ a diverguje v bode $x = -1$ a druhý konverguje v bode $x = 1$ aj v bode $x = -1$); **15**. $(1+x)\ln(1+x) = x + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n(n-1)}$, táto rovnosť platí pre $x \in (-1,1]$, oborom konvergencie uvedeného radu je interval $[-1,1]$, jeho súčet má v bode -1 hodnotu 0 $\left(= -1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-1)} = \lim_{x\to -1+}(1+x)\ln(1+x)\right)$, funkciu $(1+x)\ln(1+x)$, $x \in (-1,1]$, možno teda v bode -1 „spojite dodefinovať“

$\boxed{\textbf{349}}$ **1**. $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$; **3**. $\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) = \ln a + \dfrac{x}{a} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!\,a^{2n+1}(2n+1)}x^{2n+1}$, $|x| \le a$ (Maclaurinov rad funkcie f' konverguje v bodoch $x = a$, $x = -a$ — pozri riešenie pr. 348.11, preto tam podľa tvrdenia b) vety 16 konverguje aj Maclaurinov rad funkcie f [20]); **4**. $f'(x) = \dfrac{x}{1+\dfrac{x^4}{4}}$, $|x| \neq \sqrt{2}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{2+x^2}{2-x^2} = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)2^{2n+1}}$, táto rovnosť platí pre $x \in (-\sqrt{2},\sqrt{2})$, oborom konvergencie uvedeného radu je interval $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ (funkciu $\operatorname{arctg}\dfrac{2+x^2}{2-x^2}$, $x \in (-\sqrt{2},\sqrt{2})$, možno teda „spojite dodefinovať“ v bodoch $-\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}$); **5**. $f''(x) =$

---

[19] $= \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{3(-1)^{m+1}}{4(2n+1)!}(3^{2m}-1)x^{2m+1}$, ak položíme $m = n-1$

[20] konvergenciu v bodoch $x = a$, $x = -a$ sme samozrejme rovnako dobre mohli dokázať aj Leibnizovým kritériom

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2} = -1+\dfrac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)}\,x^{2n+2}$; **6**. $x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$, $|x|\le 1$; **7**. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)}$, $x\in\mathbf{R}$ [21]; **8**. $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, oborom konvergencie tohto radu je interval $[-1,1]$ (existujú teda konečné limity $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1+} f(x)$ [22]);

$\boxed{\mathbf{350}}$ **1**. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, kde $b_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ (nech I je interval konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, potom pre $x\in J := I\cap(-1,1)$ ($(-1,1)$ je interval konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, tj. Maclaurinovho radu funkcie $\dfrac{1}{1-x}$) konvergujú rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolútne (veta 10), preto podľa vety 17 z odseku 3.4 konverguje na intervale J ich Cauchyho súčin k funkcii $\dfrac{f(x)}{1-x}$); **2a**) $\ln^2(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(1+\dfrac12+\cdots+\dfrac1n\right)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $x\in[-1,1)$ (najprv nájdite Maclaurinov rad funkcie f', ten má polomer konvergencie $R=1$ (pozri pr. 336.10), preto aj náš rad má ten istý polomer konvergencie (veta 15), konvergencia uvedeného radu v bode -1 vyplýva z Leibnizovho kritéria (pozri tiež pr. I.171, I.172)); **2b**) $(\operatorname{arctg} x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\dfrac13+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}\right)\dfrac{x^{2n}}{n}$, $|x|\le 1$ (v bodoch 1 a -1 konverguje uvedený rad relatívne, preto jeho polomer konvergencie je $R=1$, pozri riešenie pr. 338);

$\boxed{\mathbf{351}}$ **1**. $\dfrac{1}{(x^2-2x+3)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n+1)(x-1)^{2n}}{2^{n+2}}$, $|x-1|<\sqrt2$ (podľa návodu stačí nájsť Maclaurinov rad funkcie $f(t+a)=\dfrac{1}{(t^2+2)^2}$: derivovaním člen po člene Maclaurinovho radu funkcie $\dfrac{1}{(2+u)}$ $\left(=\dfrac12\cdot\dfrac{1}{1+u/2}\right)$ nájdeme Maclaurinov rad funkcie $\dfrac{1}{(2+u)^2}$ a do neho dosadíme $u=t^2$); **2**. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-10x+29}} = \dfrac12+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!\,(x-5)^{2n}}{2^{2n+1}\,(2n)!!}$ [23], $|x-5|\le 2$; **3**. $(2x+1)\sin x\sin(x+1) = (\cos 1-1)\left(x+\dfrac12\right)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n}}{(2n)!}\left(x+\dfrac12\right)^{2n+1}$, $x\in\mathbf{R}$; **4**. $\ln(x^2-9x+20) = \ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac1n\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)(x-3)^n$, $x\in[1,5)$ (pre $t\in(-\infty,1)$ je $\ln(t^2-3t+2)=\ln(1-t)+\ln(2-t)$);

$\boxed{\mathbf{352}}$ (pozri tiež riešenia pr. 342, 343) **1**. $e^{x^2}(1+2x^2)$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)x^{2n}}{n!} = \left(x\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x^2)^n}{n!}\right)' = \right.$

---

[21] pripomeňme, že na integrál $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6 z odseku 2.1

[22] čísla $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} := \lim_{x\to 1-} f(x)$, $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} := \lim_{x\to -1+} f(x)$ sú tzv. *nevlastné Riemannove integrály*, pozri napr. [1] alebo [10]; z hľadiska Newtonovho integrálu (pozri poznámku za odsekom 2.5) z konvergencie uvedeného radu v bodoch 1 a -1 vyplýva existencia $(N)\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ a $(N)\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$; zrejme v tomto prípade pojmy Newtonovho integrálu $(N)\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\left((N)\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\right)$ a nevlastného Riemannovho integrálu $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\left(\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\right)$ splývajú

[23] $= \dfrac12+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!\,(x-5)^{2n}}{2^{3n+1}\,n!}$

$\left(xe^{x^2}\right)'\Big)$; **2**. $\frac{1}{4}e^{x/2}(x+2)^2$ $\left(= f_1\left(\frac{x}{2}\right) + f_2\left(\frac{x}{2}\right),\right.$ kde $f_2(t) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$, $f_1(t) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2t^n}{n!} = t\big(t(e^t-1)'\big)'\Big)$; **3**. $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x - \frac{x}{2}\sin x$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2x^{2n}}{(2n)!} = x\left(-\frac{1}{2}x\sin x\right)'\right)$; **4**. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$ $\Big($pre $x\in(-1,1)$, $x\neq 0$ je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\,x^{2n} = \frac{1}{x^2}\int_0^x t\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-1\right)dt$, výsledok pre $x=1$, $x=-1$ vyplýva z poznámky 1 za riešením pr. 343.4, resp. poznámky za riešením pr. 344.2 (konvergenciu uvedeného radu v týchto bodoch dokážeme Raabeho kritériom) alebo z pr. 345.2 (kedy konvergenciu v bodoch $x=1$, $x=-1$ netreba samostatne dokazovať)$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{353}}$ (pozri tiež riešenie pr. 344) **1**. $2e$; **2**. $3e^2$; **3**. $\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$ $\left(=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} - \lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}\right)\right.$; iná možnosť: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = g(1)$, kde $g(x) := \left.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}\,x^{2n-1}\right)$; **4**. $\frac{1}{\sqrt{2}}-1$; **5**. $\frac{\pi}{2}$ $\big(=\arcsin 1$, pozri tiež pr. 349.2$\big)$;

$\boxed{\mathbf{354}}$ ak použijeme Lagrangeov tvar zvyšku Taylorovho polynómu, dostaneme $\big($pre pevné $x\in(a,b)\big)$: $\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}\big(\vartheta_n(x)\big)}{(n+1)!}\right||x-x_0|^{n+1} \leq \frac{Mc^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$; pritom $\lim_{n\to\infty}\frac{Mc^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (možno to dokázať postupom z pr. 222);

$\boxed{\mathbf{355}}$ napr. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ak } x\neq 0\\ 0, & \text{ak } x=0\end{cases}$;

$\boxed{\mathbf{356}}$ **2**. $1.968\,0\pm 0.000\,1$ $\left(\sqrt[4]{15} = 2\sqrt[4]{1-\frac{1}{16}}\right.$; pri odhade R_n sme použili postup z poznámky za riešením pr. 356.2, $\left.|R_n| \leq \frac{2}{4(n+1)}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^k\right)$; **3**. $0.245\,0\pm 0.000\,1$; **4**. $0.182\,3\pm 0.000\,1$; **5**. $2.718\,282\pm 0.000\,001$ $\big($pri odhade R_n sme použili Lagrangeov tvar zvyšku; postup výpočtu možno ľahko „zmechanizovať“: vypočítanú aproximáciu n–tého člena stačí vydeliť číslom $n+1$, aby sme dostali aproximáciu $(n+1)$–vého člena$\big)$;

$\boxed{\mathbf{357}}$ nájdite Maclaurinov rad funkcie $\ln\frac{1+x}{1-x}$ a zvoľte a tak, aby platilo $\frac{1+a}{1-a} = 1+\frac{1}{n}$; $\ln 2 = 0.693\,147\pm 0.000\,001$, $\ln 3 = 1.098\,61\pm 0.000\,01$ $\Big($každý z prvých štyroch členov radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)5^{2n-1}}$ sme vypočítali s presnosťou 10^{-7}, pre štvrtý zvyšok R_4 tohto radu platí $|R_4| \leq \frac{1}{18\cdot 25^4} < 1.5\cdot 10^{-7}$; pripočítali sme číslo $\ln 2$ vypočítané s presnosťou 10^{-6} a výsledok sme zaokrúhlili na 5 desatinných miest (absolútna chyba, ktorej sme sa tým dopustili, nie je väčšia než $5\cdot 10^{-6}\big)$; pre absolútnu chybu ε takto získanej aproximácie čísla $\ln 3$ platí $\varepsilon \leq 4\cdot 10^{-7}+1.5\cdot 10^{-7}+10^{-6}+5\cdot 10^{-6} = 65.5\cdot 10^{-7} < 10^{-5}\Big)$;

$\boxed{\mathbf{358}}$ **1**. $3.141\ 59\ \pm\ 0.000\ 01$; **2**. $0.309\ 0\ \pm\ 0.000\ 1$ $\Big(\sin 18^\circ = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n-1}}{(2n-1)!\,10^{2n-1}}$; čísla $\frac{3.141\,59}{10}$, $-\frac{(3.141\,59)^3}{6\cdot 10^3}$, $\frac{(3.141\,59)^5}{120\cdot 10^5}$ sú aproximáciami čísel $\frac{\pi}{10}$, $-\frac{\pi^3}{6\cdot 10^3}$, $\frac{\pi^5}{120\cdot 10^5}$, ktorých absolútna chyba nie je väčšia ako 10^{-6}, overenie tohto tvrdenia prenechávame čitateľovi$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{359}}$ **1**. 1.605 ± 0.001 $\big($pred použitím odhadu $|R_n| \leq |b_{n+1}|$ nezabudnite preveriť monotónnosť postupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}\big)$; **2**. 0.905 ± 0.001; **4**. 0.026 ± 0.001 $\Big($podobne ako v poznámke 2 za riešením pr.356.1 — ak naviac ešte využijeme nerovnosť $n!\geq 2^{n-1}$ — možno dokázať odhad $|R_n|=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{2}{k!\,(2k+3)27\cdot 9^k}\leq \dfrac{4}{27}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{1}{2^k\,9^k\,(2k+3)}\leq\dfrac{4}{27(2n+5)}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{18}\right)^k\Big)$;

360 nech r je polomer kružnice; $\triangle OAC$ má plochu $\dfrac{d}{2}r\cos\vartheta=r\sin\vartheta\cdot r\cos\vartheta=\dfrac12 r^2\sin 2\vartheta$, plocha kruhového segmentu zodpovedajúceho uhlu 2ϑ je $r^2\vartheta$, preto $p=r^2\vartheta-\dfrac12 r^2\sin 2\vartheta=r^2\left(\vartheta-\dfrac12\sin 2\vartheta\right)=r^2\left(\vartheta-\dfrac12\left(\vartheta-\dfrac{\vartheta^3}{6}+\dfrac{\vartheta^5}{120}-\cdots\right)\right)=r^2\left(\dfrac{2\vartheta^3}{3}-\dfrac{2\vartheta^5}{15}+\cdots\right)$, súčasne $\dfrac23 dh=\dfrac23(2r\sin\vartheta)(r-r\cos\vartheta)=\dfrac43 r^2\sin\vartheta(1-\cos\vartheta)=\dfrac43 r^2\left(\vartheta-\dfrac{\vartheta^3}{6}+\dfrac{\vartheta^5}{120}-\cdots\right)\left(\dfrac{\vartheta^2}{2}-\dfrac{\vartheta^4}{24}+\cdots\right)$, ak použijeme Cauchyho súčin radov, dostávame $\dfrac23 dh=r^2\left(\dfrac{2\vartheta^3}{3}-\dfrac{\vartheta^5}{6}+\cdots\right)$, teda rady pre p a pre $\dfrac23 dh$ sa líšia až členmi s ϑ^5, čo slovne vyjadrujeme „s presnosťou do ϑ^5 platí $p\approx\dfrac23 dh$“;

361 **1**. $(1,\infty)$ $\Big($pre pevné $x\in\mathbf{R}$ má daný rad rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}\Big)$; **2**. $(-2,2)$ $\big($v bodoch $x=2$, $x=-2$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie [24]$\big)$; **3**. $\mathbf{R}\backslash\{1\}$ (pre $x=-1$ pozri pr. 240); **4**. $(-1,\infty)$ $\Big($pre $x\leq -1$ je $\left|\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\dfrac{n-x}{n+1}\geq 1$, pre $x>-1$, $x\notin\mathbf{N}\cup\{0\}$ použite postup z pr. 240$\Big)$; **5.** konverguje na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ pre $|a|>1$, diverguje v každom bode pre $|a|\leq 1$ $\Big($v prípade $x=0$ alebo $|a|\leq 1$ má daný rad rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac1n$; využite rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$ — pozri poznámku za pr. 224$\Big)$; **6**. $\mathbf{Z}$ (pozri bod 2 v poznámke [34] k riešeniu pr. 243.4); **7**. $[0,\infty)\cup\{-k\pi\,;\,k\in\mathbf{N}\}$ $\big($v prípade $e^x<1\wedge x\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, je $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-nx}=\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx$ neexistuje$\big)$; **8**. $(0,\pi)$ pre $q>p$ (možno použiť Dirichletovo kritérium), diverguje v každom bode $x\in(0,\pi)$ pre $q\leq p$ (nie je splnená nutná podmienka konvergencie); **9**. $\mathbf{R}$ (pozri pr. I.156.5); **10.** diverguje pre každé $x\in\mathbf{R}$ (nie je splnená nutná podmienka konvergencie [25];

362 **1**. $\dfrac{x}{1-x}$, $x\in(-1,1)$ $\left(S_n(x)=x\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left|1+x^{2^{k-1}}\right|\right)'=x\left(\ln\left|\dfrac{1-x^{2^n}}{1-x}\right|\right)'\right.$ pre $x\neq 1$, $x\neq -1$, pre $|x|<1$ je $\lim\limits_{n\to\infty}2^n x^{2^n}=0$ (subst. $2^n=t$), pre $x\notin[-1,1)$ je $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ nevlastná$\Big)$; **2**. $-\operatorname{ctg}x+\dfrac1x$ pre $0<|x|<\pi$, 0 pre $x=0$ $\left(S_n(x)=-\left(\ln\left|\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{x}{2^k}\right|\right)'\right.$ pre $0<|x|<\pi\Big)$;

363 **1.** platí (použite matematickú indukciu) $K_n(x):=\dfrac{a_1}{x}-\left(\dfrac{a_1}{a_2+x}+\cdots+\dfrac{a_1\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right)=$

---

[24] v prípade $x=2$ je $\left(\dfrac n2\right)^n\left(e^{2/n}-1\right)^n=\left(\left(1+h(n)\right)^{1/h(n)}\right)^{g(n)}$, kde $h(n)=\dfrac n2\left(e^{2/n}-1\right)-1$, $g(n)=nh(n)=1+no\left(\dfrac1n\right)$, v prípade $x=-2$ je $\left(\dfrac n2\right)^n\left(e^{-2/n}-1\right)^n=(-1)^n e^{-2}\left(\dfrac n2\right)^n\left(e^{2/n}-1\right)^n$

[25] z nerovností $\cos\cos x>x$ pre $x\in(-\infty,a)$, $\cos\cos x<x$ pre $x\in(a,\infty)$, kde a je jediné riešenie rovnice $\cos\cos x=x$ $\Big($pre $f(x)=\cos\cos x-x$ je $f'(x)\leq 0$, pričom $f'(x)=0$ len pre $x=\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, preto f je klesajúca, ďalej $f\left(\dfrac\pi2\right)<0<f(0)\Big)$, $|\cos\cos x|\leq 1$, $x\in\mathbf{R}$, a z rastu funkcie $\cos\cos x$ na $\left[0,\dfrac\pi2\right]$ vyplýva, že pre každé $y\in[0,1]$ je postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $y_1=y$, $y_{n+1}=\cos\cos y_n$, ohraničená a monotónna, teda konvergentná, pritom (pozri pr. I.156) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$; odtiaľ vyplýva rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, kde $x_1=\cos x$, $x_{n+1}=\cos x_n$ (stačí uvažovať postupnosti $\{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}\big)$, zrejme $a\neq 0$

$\dfrac{a_1\cdots a_{n+1}}{x(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)} = \dfrac{a_1}{x}\,e^{E(x)}$, kde $E(x) = -\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(1+\dfrac{x}{a_k}\right)$, rad $-\sum\limits_{k=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{a_k}\right)$ diverguje k $-\infty$ $\left(\text{má rovnaký charakter ako rad } -x\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{a_k}\right)$, preto $\lim\limits_{n\to\infty}K_n(x) = 0$ pre každé $x > 0$; **2.** $\dfrac{1}{x-1} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k!}{(x+1)\cdots(x+k)} = \dfrac{(n+1)!}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)}$, $x > 1$; z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)}$, $x > 1$, vyplýva rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)} = 0$ pre každé $x > 1$; **3a)** $\dfrac{1}{x}$ $\left(\text{v pr. 363.1 stačí položiť } a_n = \dfrac{1}{n}\right)$; **3b)** $\dfrac{x}{1-x}$ pre $|x| < 1$, $\dfrac{1}{1-x}$ pre $|x| > 1$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y^{2^{n-1}}}{1-y^{2^n}} = \dfrac{y}{1-y^2}\left(1+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{y}{1+y^2}\cdot\dfrac{y^2}{1+y^4}+\cdots\right)\right.$, pre $y\in(0,1)$ položte v pr. 363.1 $x = 1$, $a_n = y^{2^{n-1}}$; pre $y > 1$ použite substitúciu $\left.t = \dfrac{1}{y}\right)$; **3c)** $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ pre $|x| > 1$, $\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$ pre $|x| < 1$ $\left(f_n(x) = \dfrac{x}{1-x}\left(\dfrac{1}{1-x^n} - \dfrac{1}{1-x^{n+1}}\right)\right)$;

364 z nerovností z pr. 228.2 vyplýva $-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} < F(x) - \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $x > 0$;

365 **1.** konverguje nerovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ $\left(\lim\limits_{x\to 0}\big(f_n(x) - f(x)\big) = \infty,\ n\in\mathbf{N}\right)$; **2.** rovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\in[0,\alpha]$ $\left(|f_n(x)| \le nx\sin\dfrac{\pi x^n}{2} \le \dfrac{\pi}{2}nx^{n+1} \le \dfrac{\pi}{2}n\alpha^{n+1}\right)$; **3.** rovnomerne k $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$; **4a)** nerovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$ $\big(\lim\limits_{x\to 0}|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{n},\ n\in\mathbf{N}\big)$; **4b)** rovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 1$; **5.** rovnomerne k $f(x) = \dfrac{\pi x}{2}$, $x > 0$ $\left(|f_n(x) - f(x)| =^{26}\ |x|\left|\operatorname{arctg}\dfrac{1}{nx}\right| \le |x|\dfrac{1}{|nx|} = \dfrac{1}{n}\right)$; **6.** nerovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ $\left(\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)| = f_n\left(\sqrt[n]{\dfrac{1+\sqrt{7}}{6}}\right)\right)$; **7.** nerovnomerne k $f(x) = \begin{cases}1, & \text{ak } x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\\ 0, & \text{ak } x = k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}$ (pozri tvrdenie z poznámky [3] k riešeniu pr. 300.11c); **8.** rovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\ge 0$ $\Big($z nerovnosti $\ln(1+x)\le x$, $x > -1$, vyplýva pre $x\in(-1,0)$: $|\ln(1+x)| \le \dfrac{|x|}{1-|x|}$ [27], pre $x\ge 0$ je $|\ln(1+x)| \le |x| \le \dfrac{|x|}{1-|x|}$; pritom $\left|\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $x\ge 0\Big)$; **9a)** nerovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x\in(0,2)$ $\left(\lim\limits_{x\to 0+}\big(f(x) - f_n(x)\big) = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}\left(1 - nx\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)\right) = \infty\right)$; **9b)** rovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 2$; **10.** rovnomerne k $f(x) = \ln x$, $x\in[1,a]$ $\Big($ak funkciu e^y zapíšeme pomocou jej Maclaurinovho polynómu a zvyšku v Lagrangeovom tvare a položíme $y = \dfrac{\ln x}{n}$, dostaneme $|f_n(x) - f(x)| = \left|n\big(e^{(\ln x)/n} - 1\big) - \ln x\right| = \left|n\left(1 + \dfrac{\ln x}{n} + \dfrac{\ln^2 x}{2n^2}e^{(\vartheta_n\ \ln x)/n} - 1\right) - \ln x\right| \le \dfrac{1}{2n}\ln^2 a\cdot e^{(\ln a)/n}$; pripomeňme, že $\vartheta_n\in(0,1)\Big)$; **11.** rov-

---

[26] $= |x|\left|\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} nx - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)\right| = |x|\big|\operatorname{arctg}\big(-\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} nx)\big)\big| =$

[27] $|\ln(1+x)| = \ln\dfrac{1}{1+x} = \ln\left(1 - \dfrac{x}{1+x}\right) \le -\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{|x|}{1-|x|}$, $x\in(-1,0)$

nomerne k $f(x)\equiv 1$, $x\in(0,10)$ $\left(|f_n(x)-f(x)| = \dfrac{x}{2n\left(1+\dfrac{\vartheta_n\cdot x}{n}\right)^2},\ x\in(0,10)\right)$; **12a)** rovnomerne k $f(x)=e^x$, $x\in[a,b]$ $\Bigl(|f_n(x)-f(x)| = |e^x|\bigl|1-e^{E_1(x)}\bigr| \le e^b\bigl(1-e^{E_2}\bigr)$, $x\in[a,b]$, kde $E_1(x) = -\dfrac{x^2}{2n}\cdot\dfrac{1}{\left(1+\vartheta_n\dfrac{x}{n}\right)^2}$, $E_2 = -\dfrac{M^2}{2n}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{M}{n}\right)^2}$, pričom $M = \max\{|a|,|b|\}\Bigr)$; **12b)** nerovnomerne k $f(x)=e^x$, $x\in\mathbf{R}$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-f_n(x)| = \lim\limits_{x\to\infty} e^x\left(1-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\Big/e^x\right)=\infty\right)$;

$\boxed{\mathbf{367}}$ **2.** $n\left(f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)\right) = f'\left(x+\vartheta_n\dfrac{1}{n}\right)$, kde $\vartheta_n\in(0,1)$, pri odhade $|f_n(x)-f(x)|$, $x\in[a,b]$, využite rovnomernú spojitosť funkcie f' na $[a,b+1]$; **3.** $f_n\to\displaystyle\int_0^1 f(x+y)\,dy$, $x\in[a,b]$; $\left|f_n(x)-\displaystyle\int_0^1 f(x+y)\,dy\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+y)\right)dy\right| \le \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+y)\right|dy$, $x\in[a,b]$, ďalej využite rovnomernú spojitosť funkcie f na intervale $[a,b+1]$: ak platí implikácia $\xi,\eta\in[a,b+1]$, $|\xi-\eta|<\delta \Longrightarrow |f(\xi)-f(\eta)|<\varepsilon$ a $\dfrac{1}{n}<\delta$, tak $\displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+y)\right|dy \le \frac{\varepsilon}{n}$, $k=0,1,\dots,n-1$;

$\boxed{\mathbf{368}}$ **1.** platí (funkcia x^α je rovnomerne spojitá na $[0,\infty)$ pre $\alpha\in(0,1]$ (rovnomerná spojitosť na $[0,a]$ vyplýva z vety 6 pred pr. I.251, rovnomerná spojitosť na $[a,\infty)$ z pr. I.342.1), tj. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ r,s>0\wedge|r-s|<\delta\Longrightarrow|r^\alpha-s^\alpha|<\varepsilon$, teda ak $\forall n>n_0:\ |f_n(x)-f(x)|<\delta$, tak $\forall n>n_0:\ |f_n^\alpha(x)-f^\alpha(x)|<\varepsilon$ [28]); **2.** neplatí (platilo by, keby sme naviac predpokladali napr. ohraničenosť funkcí f, g: $|f_ng_n-fg|\le|f_n||g_n-g|+|g||f_n-f|$);

$\boxed{\mathbf{369}}$ **1a)** konverguje rovnomerne k $f(x)=1+x^4$, $x\in[a,b]$ (daný rad je geometrický, teda ľahko možno nájsť jeho súčet aj čiastočné súčty); **1b)** nerovnomerne k $f(x)=\begin{cases}1+x^4, & \text{ak } x\in[a,b]\setminus\{0\}\\ 0, & \text{ak } x=0\end{cases}$ (pozri tvrdenie v poznámke [3] k riešeniu pr. 300.11c); **2.** konverguje rovnomerne; **3.** konverguje rovnomerne (konvergencia majorantného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{a^n}{[n/2]!}$ vyplýva z konvergencie radov $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty\frac{a^{2k}}{k!}$ a $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty\frac{a^{2k-1}}{(k-1)!}$); **4.** konverguje rovnomerne na $\mathbf{R}$ (majorantný rad je $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2n\ln^{3/2}(n+1)}$); **5.** konverguje nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(n)=\dfrac{\pi}{2}$); **6a)** konverguje nerovnomerne na $(0,1)$ (vypočítajte $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$); **6b)** konverguje rovnomerne na $(1,\infty)$ (majorantným číselným radom je napr. $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n\ln^2 2n}$); **7a)** konverguje nerovnomerne na $(0,\delta)$ (nekonverguje totiž v bode 0, pozri pr. 309); **7b)** konverguje rovnomerne na (δ,∞); **8.** konverguje nerovnomerne (vypočítajte $f_n(2^{-n})$); **9a)** konverguje rovnomerne na $[\alpha,\infty)$; **9b)** konverguje nerovnomerne na $(0,\infty)$ (daný rad nekonverguje v bode 0 [29]); **10.** konverguje rovnomerne na $[1,\infty)$ (Abelovo kritérium); **11a)** konverguje nerovnomerne na $[0,\delta]$ (pre $x=\dfrac{1}{n^2}$ je $\dfrac{nx}{(1+x)\cdots(1+nx)}+$

---

[28] analogicky možno dokázať tvrdenie „ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ kladných funkcií rovnomerne konverguje na (a,b) k ohraničenej funkcii f, tak pre každé $\alpha>0$ platí $f_n^\alpha\rightrightarrows f^\alpha$“

[29] z neexistencie $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ vyplýva neexistencia $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n}$, preto pre niektorú podpostupnosť $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ postupnosti $\{n\}_{n=1}^\infty$ existuje nenulová $\lim\limits_{k\to\infty}\sin\sqrt{n_k}$, potom $\lim\limits_{k\to\infty}n_k\sin\sqrt{n_k}$ je nevlastná, preto v bode 0 nie je splnená nutná podmienka konvergencie; ďalej pozri pr. 309

$\dots + \dfrac{(n+n)x}{(1+x)\cdots(1+2nx)} \geq n\dfrac{1/n}{(1+2/n)^{2n}} \to e^{-4}$ pre $n \to \infty\Big)$ [30]; **11b)** konverguje rovnomerne na $[\delta,\infty)$ $\Big($majorantný rad je $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+\delta)^{n-1}}\Big)$; **12.** konverguje rovnomerne na $\mathbf{R}$ $\Big($použite Abelovo kritérium, ku konvergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ pozri pr. 274.11$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{370}}$ $\alpha > 2$ $\big($pre $\alpha > 2$ použite Weierstrassovo kritérium; pre $\alpha < 0$ je $\lim\limits_{x\to 0+} f_n(x) = \infty$, pre $\alpha = 0$ je $\lim\limits_{x\to 0+} f_n(x) = 1$, preto pre $\alpha \leq 0$ nie je na $(0,\infty)$ splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie; pre $\alpha \in (0,2]$ nájdite súčet $S(x)$ daného radu (ktorý je geometrický) a využite, že pre $\alpha = 2$ je $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = 1 \neq S(0) = 0$, pre $\alpha \in (0,2)$ je $\lim\limits_{x\to 0+} S(x) = \infty\big)$;

$\boxed{\mathbf{372}}$ z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{|a_n|}$ vyplýva rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{|a-a_n|}\Big/\dfrac{1}{|a_n|}\right) = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{|b-a_n|}\Big/\dfrac{1}{|a_n|}\right)$, preto rad $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x-a_n}$ konverguje absolútne v bodoch a, b; ďalej pozri pr. 312;

$\boxed{\mathbf{373}}$ nie, uvažujte napr. $f_n(x) = \dfrac{\sin \pi n x}{n}$;

$\boxed{\mathbf{374}}$ platí;

$\boxed{\mathbf{375}}$ z každého otvoreného pokrytia kompaktu I možno vybrať konečné podpokrytie; ak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na každej z množín $K_1, K_2, \dots, K_p$, tak rovnomerne konverguje aj na ich zjednotení;

$\boxed{\mathbf{376}}$ **1**. $D(f) = \mathbf{R}$, f je spojitá $\Big($rad $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \cdot \dfrac{1}{1+(x/n)^2}$ konverguje rovnomerne a rad $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{x^2+n^2}$ lokálne rovnomerne na $\mathbf{R}\Big)$; **2**. $D(f) = \mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$, f je spojitá, $\lim\limits_{x\to n} f(x) = \infty$ pre každé $n \in \mathbf{N}$ $\big($pri vyšetrovaní lokálne rovnomernej konvergencie uvedeného radu možno použiť napr. myšlienku riešenia pr. 372, ďalej pozri poznámku 2 k riešeniu pr. 330.4$\big)$; **3**. $D(f) = \mathbf{R}\setminus\{2k\pi\,;\, k\in\mathbf{Z}\}$, f je spojitá;

$\boxed{\mathbf{377}}$ F má periódu ω;

$\boxed{\mathbf{378}}$ **1.** v každom bode intervalu I má každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, vlastné jednostranné limity, preto podľa vety 7 aj funkcia f má v každom bode intervalu I vlastné jednostranné limity; **2.** $f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak } |x| < \dfrac{1}{n\pi} \\ \sin\dfrac{1}{x}\,, & \text{ak } |x| \geq \dfrac{1}{n\pi} \end{cases}$;

$\boxed{\mathbf{379}}$ nech je dané $\varepsilon > 0$; f je rovnomerne spojitá na $[a,b]$, preto existuje $\delta > 0$ tak, že $(*)$ $x,y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; rozdeľme interval $[a,b]$ deliacimi bodmi $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ na konečný počet častí, z ktorých každá je kratšia ako δ; platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_m) = f(x_m)$ pre $m = 0,\dots,k$, preto $(**)$ $\exists N \in \mathbf{N}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > N$ $\forall m \in \{0,1,\dots,k\}$: $|f_n(x_m) - f(x_m)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; nech $n > N$ a $x \in [x_m, x_{m+1}]$, $m \in \{0,1,\dots,k-1\}$, predpokladajme, že funkcia f_n je neklesajúca a $f_n(x) > f(x)$ (postup v ostatných prípadoch je analogický), potom $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_{m+1}) - f(x) = |f_n(x_{m+1}) - f(x)| \leq |f_n(x_{m+1}) - f(x_{m+1})| + |f(x_{m+1}) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$ (v závere sme využili nerovnosti $(*)$ a $(**)\big)$, teda $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbf{N}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > N$ $\forall x \in [a,b]$: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ [31];

---

[30] iná možnosť: $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x)\cdots\big(1+(n-1)x\big)} - \dfrac{1}{(1+x)\cdots(1+nx)}$, odtiaľ $S_n(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)\cdots(1+nx)}$, $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak} \quad x = 0 \\ 1\,, & \text{ak} \quad -x \notin \mathbf{N} \end{cases}$

[31] nie je ťažké dokázať, že ak f je nekonštantná funkcia, tak existuje $M \in \mathbf{N}$ tak, že f_n sú neklesajúce pre všetky $n > M$ alebo f_n sú nerastúce pre všetky $n > M$, potom (pozri pr. 296.1) f je neklesajúca, resp.

$\boxed{\mathbf{380}}$ pozri pr. 296.2 a I.458;

$\boxed{\mathbf{381}}$ **1.** napr. $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, kde f_1 je funkcia s periódou 1, pričom $f_1(x) = |x|$ pre $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $f_n(x) = \frac{1}{4^{n-1}} f_1\left(4^{n-1}x\right)$; spojitosť f vyplýva z rovnomernej konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $\mathbf{R}$; pre $x = \frac{k}{4^m}$ $(k \in \mathbf{Z},\ m \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ a $n > m$ je $f(x) = 0$; nech $a = \frac{k}{4^m}$, $h = \frac{1}{4^{2m+1}}$, potom $f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{m} \big(f_k(a+h) - f_k(a)\big) + \sum_{k=m+1}^{2m+1} f_k(a+h) \geq -mh + (m+1)h > 0$, analogicky $f(a-h) - f(a) > 0$; pritom pre každý interval I existujú $k \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ tak, že $\frac{k}{4^m} - \frac{1}{4^{2m+1}}, \frac{k}{4^m}, \frac{k}{4^m} + \frac{1}{4^{2m+1}} \in I$;

2. za g možno zvoliť primitívnu funkciu k funkcii $f|[0,1]$, kde f je funkcia z pr. 381.1, pritom využite tvrdenie ,,ak f je konvexná (konkávna) a diferencovateľná na I, tak f' je neklesajúca (nerastúca) na I“ (na jeho dôkaz stačí prejsť k limite pre $z \to x+$, resp. $z \to y-$ v nerovnostiach $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, resp. $\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ $\quad (x, y, z \in I,\ x < z < y)$);

$\boxed{\mathbf{382}}$ **1.** napr. $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, kde $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sgn}(x - a_n)$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť obasahujúca všetky racionálne čísla; uvedený rad konverguje rovnomerne (Weierstrassovo kritérium), každá z funkcií f_n je spojitá v každom iracionálnom čísle, preto aj f je spojitá v každom iracionálnom čísle; funkcia $\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty} f_n$ je spojitá v bode a_k, $\lim_{x\to a_k+} f_k(x) > f_k(a_k) > \lim_{x\to a_k-} f_k(x)$, preto $\lim_{x\to a_k+} f(x) > f(a_k) > \lim_{x\to a_k-} f(x)$;

$\boxed{\mathbf{383}}$ **1.** nech $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, $|f_n(x)| < K$ pre $x \in [a,b)$, $n \in \mathbf{N}$; pretože $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b-\delta]$ pre každé $\delta \in (0, b-a)$ (pozri pr. 375), platí podľa vety 8 $f \in \mathcal{R}[a, b-\delta]$ pre každé $\delta \in (0, b-a)$, súčasne f je ohraničená na $[a,b]$, preto $f \in \mathcal{R}[a,b]$ (pozri pr. 147 a poznámku 2 za vetou 6 z odseku 2.1); $\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx = \int_a^{b-\delta} + \int_{b-\delta}^b$, pritom $\int_{b-\delta}^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq 2K\delta$ $\Big($ak $|f_n(x)| \leq K$ a $f_n \to f$ na $[a,b)$, tak $|f(x)| \leq K$ na $[a,b)$ a $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2K\Big)$; ak pre $n > N$ a $x \in \left[a, b - \frac{\varepsilon}{4K}\right]$ je $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, tak $\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ pre $n > N$;

2. napr. $f_n(x) = \begin{cases} 2nx^2, & \text{ak } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \\ 0, & \text{ak } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$;

$\boxed{\mathbf{384}}$ **1.** 0 $\left(x^n \ln x \rightrightarrows 0\right.$ na $(0,1]$, ďalej pozri pr. 301, nezabudnite preveriť integrovateľnosť funkcií $\frac{x^n \ln x}{1+x^2}$ na $\left.[0,1]\right)$; **2.** 0 $\big(\sin^n x$ konverguje na $[0,1)$ lokálne rovnomerne k 0, pozri pr. 383.1, porovnaj s riešením pr. 113.4$\big)$; **3.** 0 $\Big($z nerovnosti $\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}} \leq \frac{nx}{n\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, $x \in (0,1]$, vyplýva rovnomerná ohraničenosť postupnosti $\left\{\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ na $(0,1]$; $\left|\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{a}}$ pre $x \in [a,1]$, preto

---

nerastúca

$\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}} \rightrightarrows 0$ na $[a,1]$, $a>0$, možno použiť pr. 383.1 [32]$\Big)$; $\underline{\mathbf{4}}$. 0 $\left(\int_0^{1+1/n} = \int_0^1 + \int_1^{1+1/n}\right.$, pritom $x^n \ln x \rightrightarrows 0$ na $(0,1]$; $|x^n \ln x| \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $x \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$, a preto $\int_1^{1+1/n} x^n \ln x\, dx \le \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$ pre $n \to \infty\Big)$; $\underline{\mathbf{5}}$. 0 $\left(\left\{\frac{1}{1+nx}\right\}_{n=1}^{\infty}\right.$ konverguje na $(0,1]$ lokálne rovnomerne k 0, f je ohraničená, ďalej pozri pr. 301, 383.1$\Big)$;

385 $\ln\frac{3}{2}$ (pozri pr. 362.2);

386 $\underline{\mathbf{1}}$. napr.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak } x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q} \text{ alebo } x = 0 \\ 1\,, & \text{ak } x = \dfrac{p}{q}\,,\ p\,,q \in \mathbf{N} \text{ sú nesúdeliteľné},\ p \le q\,,\ q \in \{1,2,\ldots,n\} \\ \dfrac{1}{q-n}\,, & \text{ak } x = \dfrac{p}{q}\,,\ p\,,q \in \mathbf{N} \text{ sú nesúdeliteľné},\ p \le q\,,\ q > n \end{cases};$$

$f = \chi|[0,1]$ (riemannovská integrovateľnosť funkcie f_n na $[0,1]$ sa dokáže rovnako ako v prípade Riemannovej funkcie χ — pozri pr. 64, nerovnomernú konvergenciu možno dokázať priamo z definície alebo na základe vety 8); $\underline{\mathbf{2}}$. napr. $f_n(x) = x^n \chi(x)$, $x \in [0,1]$, $f(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$;

387 podľa pr. 192 a 193 existuje postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojite diferencovateľných monotónnych funkcií taká, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$; potom aj $gf_n \rightrightarrows gf$ na $[a,b]$; podľa pr. 119 $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists c_n \in [a,b]$: $\int_a^b f_n(x)g(x)\,dx = f_n(a)\int_a^{c_n} g(x)\,dx + f_n(b)\int_{c_n}^b g(x)\,dx$; z postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyberme konvergentnú postupnosť $\{c_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, nech $\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k} = c \in [a,b]$, potom $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b f_{n_k}(x)g(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\left(f_{n_k}(a)\int_a^{c_{n_k}} g(x)\,dx + f_{n_k}(b)\int_{c_{n_k}}^b g(x)\,dx\right) = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx$;

388 $\underline{\mathbf{1}}$. $D(f) = \mathbf{R}$, $D(f') = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $\left(f'_+(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \ne -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = f'_-(0)\right.$; na výpočet $f'_+(0)$, resp. $f'_-(0)$ stačí použiť vetu 9' na intervale $I = [0,1]$, resp. $I = [-1,0]\Big)$; $\underline{\mathbf{2}}$. $D(f) = [0,\infty)$, $D(f') = (0,\infty)$ $\Big(f'(0) = -\infty$: každá z funkcií $g_n(x) := \dfrac{n}{1+n^2}\,e^{-nx}$ je klesajúca na $(0,\infty)$, preto $g := \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ je nerastúca na $(0,\infty)$, teda existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim\limits_{x\to 0+} g(x)$; keby platilo $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) \in \mathbf{R}$, musel by rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ konvergovať v bode 0 (vyplýva to z podobných úvah ako v riešení pr. 345.2), čo je spor; preto $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+}\big(-g(x)\big) = -\infty$, ďalej pozri pr. I.384.1$\Big)$;

389 využite, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n$ konverguje rovnomerne na každom kompaktnom intervale $I' \subset I$ (pozri pr. 375) a vetu 9';

390 pripomeňme, že pre $x \ne 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx$;

391 podľa vety 9 je $\varphi'(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\big(f^{(n)}(x)\big)' = \lim\limits_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$; z rovnosti $\varphi' = \varphi$ vyplýva $\varphi(x) = Ce^x$ $\big(\varphi(x) \equiv 0\ \ (= 0\cdot e^x)$ je zrejme riešením rovnice $\varphi' = \varphi$; ak $\varphi(a) \ne 0$ pre niektoré $a \in \mathbf{R}$, uvažujme maximálny interval $I \subset \mathbf{R}$ taký, že $a \in I$, $\varphi(x) \ne 0$ pre $x \in I$ $\big($zo spojitosti funkcie φ vyplýva, že taký interval existuje a je otvorený; ak $I = (b,c)$ a $b \in \mathbf{R}$, tak $\varphi(b) = 0$, podobne $\varphi(c) = 0$ v prípade $c \in \mathbf{R}\big)$; pre $x \in I$ platí $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \big(\ln|\varphi(x)|\big)' = 1$, preto $\ln|\varphi(x)| = x + K$,

---

[32] z uvedeného vyplýva dokonca rovnomerná konvergencia postupnosti $\left\{\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ na $(0,1]$

odtiaľ $|\varphi(x)| = e^K e^x$; φ nemení na I znamienko, preto $\varphi(x) = e^K e^x$ (ak $\varphi(a) > 0$), $x \in I$, alebo $\varphi(x) = -e^K e^x$, $x \in I$; pretože získaná funkcia je nenulová na $\mathbf{R}$, platí $I = \mathbf{R}\big)$;

$\boxed{\textbf{392}}$ nech $n \in \mathbf{N}$, $a, x \in I$, $x > a$, nech $K_n \cap (a,x) = \{k_1, \ldots, k_m\}$, pričom $k_0 := a < k_1 < k_2 < \cdots < k_m < x =: k_{m+1}$; potom (ak použijeme Lagrangeovu vetu o strednej hodnote) $\big|f_n(x) - f_n(a)\big| \le \sum_{p=0}^{m} \big|f_n(x_{p+1}) - f_n(x_p)\big| = \sum_{p=0}^{m} \big|f_n'(\vartheta_p)\big| |x_{p+1} - x_p| \le a_n \sum_{p=0}^{m} |x_{p+1} - x_p| = a_n |x - a|$; analogicky sa postupuje pre $x < a$; odtiaľ $|f_n(x)| \le |f_n(a)| + a_n|x-a|$, z čoho vyplýva rovnomerná konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $[b,c]$, kde $b \le a \le c$ $\big(|x-a| \le \max\big\{|b-a|, |c-a|\big\}\big)$; rovnako možno dokázať nerovnosť $\left|\dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}\right| \le a_n$ pre ľubovoľné $x, x_0 \in I$, $x \ne x_0$, z ktorej na základe vety 7' vyplýva tvrdenie o derivovaní člen po člene;

$\boxed{\textbf{393}}$ **1.** diferencovateľnosť funkcie f v každom bode $x \in (0,1) \setminus \mathbf{Q}$ vyplýva z pr. 392, pre $x = a_k$ ($k \in \mathbf{N}$) zapíšme funkciu f v tvare $f(x) = \dfrac{|x - a_k|}{3^k} + \sum_{\substack{n=1\\ n\ne k}}^{\infty} \dfrac{|x - a_n|}{3^n}$, druhý zo sčítancov má deriváciu v bode a_k (pr. 392), prvý má v bode a_k navzájom rôzne jednostranné derivácie;

$\boxed{\textbf{394}}$ **1**. $[-1,3]$ pre $p > 2$, $[-1,3)$ pre $0 < p \le 2$, $(-1,3)$ pre $p \le 0$ (pozri pr. 225.6 a 270.7); **2**. $\mathbf{R}$ $\left(\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \cdot \dfrac{n}{e^{n^{\alpha-1}}}\right.$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$ — pozri poznámku za pr. $\left.224\right)$; **3**. $(-9,9)$ $\Big($postupujte ako v pr. 336.6, využite rovnosti $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$, $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1 - \cos u}{u^2} = \dfrac{1}{2}\Big)$; **4**. $\mathbf{R}$ pre $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $[-1,1]$ pre $m \in (0,\infty) \setminus \mathbf{N}$, $(-1,1]$ pre $m \in (-1,0)$, $(-1,1)$ pre $m \le -1$ $\Big(|f_n(1)| = 1$ pre $m = -1$, $\left|\dfrac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)}\right| > 1$ pre $m < -1$, v prípade $m \in (-1,0)$, $x = 1$ pozri pr. 270.6$\Big)$; **5**. $\left[-\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a}\right)$ pre $a \ge b > 0$, $\left[-\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{b}\right]$ pre $0 < a < b$ $\left(\sqrt[n]{\dfrac{a^n}{n} + \dfrac{b^n}{n^2}} = \dfrac{a}{\sqrt[n]{n}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right)^{1/n}\right.$ pre $a \ge b$, podobne postupujte pre $\left. b > a\right)$; **6**. $[-4,-2]$ (použite vetu 6' z odseku 3.3); **7**. $[-1,1]$ pre $a > 1$, $(-1,1)$ pre $a \in (0,1]$ $\Big($pri vyšetrovaní konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-\sqrt{n}}$, $a > 1$, možno použiť porovnávacie kritérium — z rovnosti $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{a^x} = 0$ vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{a^{\sqrt{n}}} = 0$ — alebo pr. 234.1b a d'Alembertovo kritérium$\Big)$; **8**. $[-1,1]$; **9**. $(-1,1]$ $\left(\dfrac{f_n(-1)}{f_{n+1}(-1)} = e^E\right.$, kde $E = {}^{33}\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, preto $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{f_n(-1)}{f_{n+1}(-1)} - 1\right) = \dfrac{1}{2}$; $\ln\left|\dfrac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)}\right| = -1 + n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, ďalej použite postup z pr. $\left.240\right)$; **10**. $(0,2)$ $\big(\nu(n) = [\log n] + 1$, v bodoch 0 a 2 nie je splnená nutná podmienka konvergencie$\big)$; **11**. $[-1,1]$ $\Big($pri výpočte $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ možno využiť pr. I.206.1; konvergencia radu $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(1)$ vyplýva z konvergencie radov $\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k+1}(1)$ (Dirichletovo kritérium), $\sum_{k=1}^{\infty} f_{4k}(1)$ (Leibnizovo kritérium) a $\sum_{k=1}^{\infty} f_{4k-2}(1)$; podobne možno postupovať v prípade $x =$

---

[33] $= 1 + n\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 + n\left(-\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{n}{2n^2} - \left(\dfrac{n}{2(n+1)^2} - \dfrac{n}{2n^2}\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right) =$

$-1\Big)$; **12**. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right), \sum_{k=1}^{\infty} f_{4k-2}\left(\frac{1}{3}\right), \sum_{k=1}^{\infty} f_{8k-4}\left(\frac{1}{3}\right)\right.$ konvergujú a $\sum_{k=1}^{\infty} f_{8k}\left(\frac{1}{3}\right)$ diverguje, preto $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ diverguje v bode $x = \frac{1}{3}$, podobne pre $\left.x = -\frac{1}{3}\right)$; **13**. $[-1,1]$ $\Big($pre $x = 1$ pozri pr. 274.11; konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}$ vyplýva z konvergencie radov $\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k^2,\, k\in\mathbf{N}}}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}$ (Leibnizovo kritérium) a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[k]+k^2}}{k^2}\Big)$; **14.** konverguje len v bode 0 $\big($množinou hromadných hodnôt postupnosti $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ je interval $[-1,1]$, pozri [13, str. 74, kap. 2, §2, pr. 6]$\big)$;

395 **1.** $R \geq R_1R_2$ (využite pr. I.206.2; viete uviesť príklad, v ktorom bude platiť $R > R_1R_2$?); **2**. $R = \max\{1, R_1\}$ $\Big($ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť, tak $R_1 \geq 1$ (pozri pr. 341.2) a z nerovností $0 \leq |a_n| \leq K$ dostávame $\frac{|a_n|}{1+K} \leq \frac{|a_n|}{1+|a_n|} \leq |a_n|$, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{1+K}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{1+|a_n|}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ $\left(\text{pri výpočte } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{1+K}} \text{ využite rovnosť } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1+K}} = 1 \text{ a pr. I.206.1}\right)$; ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená postupnosť, tak $R_1 \leq 1$ (pozri pr. 341.1) a existuje podpostupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že $\lim_{k\to\infty} |a_{n_k}| = \infty$, potom $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{n_k}|}{1+|a_{n_k}|} = 1$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{\frac{|a_{n_k}|}{1+|a_{n_k}|}} = 1$, súčasne z nerovnosti $\frac{|a_n|}{1+|a_n|} < 1$ vyplýva $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{1+|a_n|}} \leq 1$, preto $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{1+|a_n|}} = 1\Big)$; **3**. $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ (vyplýva to z vety 17 z odseku 3.4 a z vety 10); ak $a_n > 0$, $b_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, tak $R = \min\{R_1, R_2\}$ (využite pr. 254; príklad dokumentujúci nerovnosť $R > \min\{R_1, R_2\}$ možno odvodiť z pr. 256);

396 **1**. $\mu x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, \mu(1^2-\mu^2)(3^2-\mu^2)\cdots\big((2n-1)^2-\mu^2\big)x^{2n+1}$; $I = \mathbf{R}$, ak $\mu = 0$ alebo $\mu \in \{2k+1\,;\, k \in \mathbf{Z}\}$; $I = [-1,1]$ v ostatných prípadoch $\big($platí $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + \mu^2 f(x) = 0$, $x \in (-1,1)$, ďalej pozri postup z pr. I.327.6 [34]$\big)$; **2**. $\frac{1}{7}\left(\ln 3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2\cdot 18^n - 1}{2n\cdot 9^n} x^{2n}\right)$; $I = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (pri hľadaní intervalu I sme využili poznámku 2 za riešením pr. 348.16); **3**. $-2x^2 + 2x^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}\, 2^{2n+1}\big(x^{4n+4} - x^{4n+2}\big)$, $I = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ (využili sme výsledok pr. 349.2); **4**. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[n/2]}x^{2n+1}}{(2n+1)2^n}$, $I = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; **5**. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)x^n$, $I = (-1,1)$; **6**. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, $I = [-1,1]$; **7**. $\ln\pi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{2^{4n}(4n+1)}$, $I = (-2,2)$; **8**. $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2(2n+1)}$, $I = [-1,1]$ $\left(f'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}\right)$; **9**. $2x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, x^{2n+1}$, $I = [-1,1]$ $\Big(f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{sgn}\,(1-2x^2)$, súčtom uvedeného radu je funkcia

[34] existencia $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbf{N}$ (porovnaj s poznámkou za riešením pr. I.327.6) vyplýva z nasledujúceho tvrdenia (pozri [10, odsek 446]): ak funkcie f, g sú súčty mocninových radov so stredom 0 a $f(0)$ je vnútorný bod množiny $D(g)$, tak funkciu $g \circ f$ možno v niektorom okolí bodu 0 rozložiť do mocninového radu so stredom 0

$S(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{ak} \quad |x| \le 1/\sqrt{2} \\ \pi - f(x)\,, & \text{ak} \quad x \in (1/\sqrt{2}, 1] \\ -\pi - f(x)\,, & \text{ak} \quad x \in [-1, -1/\sqrt{2}) \end{cases}\Bigg)$; **10**. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{16n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{16n+1}\,,\ I = (-1,1)$ $\Bigg(f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1-x^{16}}\,, & \text{ak} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\} \\ \dfrac{1}{16}\,, & \text{ak} \quad x = 1 \end{cases}\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{397}}$ **1.** pri hľadaní Maclaurinovho radu derivácie ľavej strany použite Cauchyho súčin radov; konvergencia v bodoch $x = 1$, $x = -1$ vyplýva z Leibnizovho kritéria, pri dôkaze rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} = 0$ využite rovnosť (3.2) z pr. 220; nezabudnite, že treba zdôvodniť, prečo sa pravá strana dokazovanej rovnosti rovná jej ľavej strane; **2.** najprv nájdite Maclaurinov rad funkcie $\ln^2(1+x)$ (pozri pr. 396.5); konvergencia v bode 1 vyplýva z Leibnizovho kritéria podobne ako v pr. 397.1, z rovnosti (3.2) z pr. 220 vyplýva aj divergencia uvedeného radu v bode $x = -1$; **3.** pre $f(x) = \dfrac{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$ platí $(1+x^2)f'(x) = 1 - xf(x)$, z čoho možno odvodiť rekurentný vzťah $f^{(n+1)}(0) = -f^{(n-1)}(0)\,,\ n \in \mathbf{N}$; konvergencia v bodoch $x = 1$, $x = -1$ vyplýva z Leibnizovho kritéria (použite postup z pr. 240); pri dokazovaní rovnosti pravej a ľavej strany využite fakt, že Maclaurinove rady funkcií $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ a $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ konvergujú na $(-1,1)$ k týmto funkciám, a vetu 17 z odseku 3.4; **4.** pre $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ platí $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$, z čoho možno odvodiť rekurentný vzťah $f^{(n+1)}(0) = n^2 f^{(n-1)}(0)\,,\ n \in \mathbf{N}$; **5.** pri hľadaní Maclaurinovho radu derivácie ľavej strany využite výsledok pr. 397.3;

$\boxed{\mathbf{399}}$ $F(x) = 2\pi \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$, $x \in (-1,1)$ [35] $\Bigg($z rovnosti $\ln(1-u) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u^n}{n}\,,\ u \in [-1,1)$, vyplýva $F(x) = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos^n t}{n}\,dt$; získaný rad konverguje pre pevné $x \in (-1,1)$ rovnomerne na $[0, 2\pi]$, preto $F(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\int_0^{2\pi} \cos^n t\,dt\right) = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{n}$ $\Bigg($využili sme rovnosti $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^n t\,dt = \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos^n t\,dt = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt = (-1)^n \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos^n t\,dt$ a výsledok pr. 96.1 spolu s pr. 93.3a$\Bigg)$, potom $F'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{x} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} = -\frac{2\pi}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right), & \text{ak} \quad 0 < |x| < 1 \\ 0\,, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$, pri hľadaní primitívnej funkcie použite substitúciu $1 + \sqrt{1-x^2} = t$ a uvážte, že $F(0) = 0\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{400}}$ **1**. $\operatorname{ch} x$; **2**. $x\,,\ x > 0$; **3**. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; **4**. x pre $|x| < 1$, $\dfrac{1}{x}$ pre $|x| \ge 1$ $\Bigg(\dfrac{1}{2}t +$

---

[35] pokiaľ má čitateľ ešte stále pochybnosti o elementárnosti funkcie F $\Bigg($nedôveru môže vzbudzovať definičný obor: definičným oborom elementárnej funkcie $2\pi \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$ je totiž intrval $[-1,1]\Bigg)$, nech si jej predpis zapíše napr. v tvare $\dfrac{x^2-1}{x^2-1}\, 2\pi \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+2} = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}, & \text{ak} \quad 0<|t|\le 1 \\ 0\,, & \text{ak} \quad t=0 \end{cases} = \dfrac{t}{1+\sqrt{1-t^2}}\Bigg)$; **5**. $\cos\sqrt{x}$ pre $x \ge 0$; $\operatorname{ch}\sqrt{-x}$ pre $x<0$ $\big($pre $x\ge 0$ $(x<0)$ použite substitúciu $x=t^2$ $(x=-t^2)\big)$; **6**. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^n}{(2n+1)!} =$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\,\operatorname{sh}\sqrt{x} - \operatorname{ch}\sqrt{x}\right), & \text{ak} \quad x>0 \\ 0\,, & \text{ak} \quad x=0 \\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{-x}}\,\sin\sqrt{-x} - \cos\sqrt{-x}\right), & \text{ak} \quad x<0 \end{cases} \qquad \Bigg(= x\big(xg'(x)\big)',\ \text{kde}\ g(x) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 1\,, & \text{ak} \quad x \ge 0 \\ \dfrac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} - 1\,, & \text{ak} \quad x<0 \end{cases} \Bigg);$$ **7**. $\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{-1/3} - 1\,,\ -2 \le x < 2$ (k oboru konvergencie daného radu pozri vzorec 5 z úvodu k odseku 4.3.2);

$\boxed{\mathbf{401}}$ **1**. $3 - 2\ln 2 - \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{6}$ $\left(= \lim\limits_{x\to 1-} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} - 3\lim\limits_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}\right)$; **2**. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ $\left(= \lim\limits_{x\to 1-} \left(x^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right)$; **3**. $-\dfrac{1}{2}\ln^2 2$ (využite pr. 396.5); **4**. $-\dfrac{\pi^2}{16}$ $\left(\text{rad } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)x^{2n-1}\right.$ je Cauchyho súčinom radov $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}$ a $\left.\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}\right)$;

$\boxed{\mathbf{402}}$ ak $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows f(x)$ na $\mathbf{R}$, tak z nutnej podmienky rovnomernej konvergencie vyplýva $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}$, $n>n_0$ $\forall x \in \mathbf{R}$: $|a_n x^n| < 1$, preto $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > n_0$: $a_n = 0$;

$\boxed{\mathbf{403}}$ rad $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má polomer konvergencie $R=\infty$ $\Big($zo vzťahov $|a_n| \le \dfrac{M}{n!}$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{M}{n!}} = 0$ — pozri pr. I.186.3 alebo poznámku za pr. 224 — vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0\Big)$, z tvrdenia c) vety 16 vyplýva: pre $x \in (-b,b)$ platí $|f^{(k)}(x)| = \left|\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n x^{n-k}\right| \le \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}|a_n||x|^{n-k} \le \sum_{n=k}^{\infty} M\,\frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = Me^b$, ďalej pozri dôkaz pr. 354;

$\boxed{\mathbf{404}}$ **1a**) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \int_0^1 e^{-x\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{-\varphi(x)}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\varphi^n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}\cdot \int_0^1 \varphi^n(x)\,dx\right)$, kde $\varphi(x) = \begin{cases} x\ln x\,, & \text{ak} \quad x\in(0,1] \\ 0\,, & \text{ak} \quad x=0 \end{cases}$ $\Bigg($rovnomerná konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\varphi^n(x)$ vyplýva z lokálne rovnomernej konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,z^n$ na $\mathbf{R}$ a z ohraničenosti funkcie $\varphi\Bigg)$, z rekurentného vzťahu $\displaystyle\int_0^1 x^m \ln^n x\,dx = \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m\ln^{n-1}x\,dx$ vyplýva $\displaystyle\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$; **1b**) pozri riešenie pr. 399; **2a**) $1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)^2}$; **2b**) $2 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\left(\displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,dx = -\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\ln x\right)dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^n\ln x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right.$;

rovnomerná konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,x^n\ln x$ na $(0,1]$ vyplýva z Weierstrassovho kritéria$\Big)$ [36];

$\boxed{\mathbf{405}}$ $\pi = 3.141\,592\,654 \pm 10^{-9}$, pri dôkaze rovnosti (4.19) sme použili vzorce $2\operatorname{arctg}\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ pre $\alpha^2 < 1$, $\operatorname{arctg}\alpha - \operatorname{arctg}\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$ pre $\alpha\beta > 0$ (pozri riešenie pr. I.87.1);

$\boxed{\mathbf{406}}$ $\ln 2 = 0.693\,147\,2 \pm 10^{-7}$, $\ln 3 = 1.098\,612\,3 \pm 10^{-7}$, $\ln 5 = 1.609\,437\,9 \pm 10^{-7}$, $\ln 6 = 1.791\,760 \pm 10^{-6}$, $\ln 10 = 2.302\,585 \pm 10^{-6}$ $\left(\text{inverzná matica k matici } \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ je } \begin{pmatrix} -\ 7 & 2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \\ -16 & 4 & 7 \end{pmatrix}\right.$, $\ln\dfrac{9}{10} = -0.105\,360\,516 \pm 10^{-9}$, $\ln\dfrac{24}{25} = -0.040\,821\,995 \pm 10^{-9}$, $\ln\dfrac{81}{80} = 0.012\,422\,520 \pm 10^{-9}\Big)$;

$\boxed{\mathbf{407}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. $2.835\,4 \pm 10^{-4}$ $\left(\displaystyle\int_2^4 e^{1/x}\,dx = \int_2^4 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,x^n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_2^4\frac{dx}{x^n}\right)\right.$, približnú hodnotu $\ln 2$ pozri v riešení pr. 357$\Big)$; $\underline{\mathbf{2}}$. $8.040\,5 \pm 10^{-4}$ $\left(\displaystyle\int_{10}^{100}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \int_{10}^{100}\frac{\ln(1+1/x)+\ln x}{x}\,dx = \int_{10}^{100}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nx^{n+1}}\right)dx + \int_{10}^{100}\frac{\ln x}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\int_{10}^{100}\frac{dx}{x^{n+1}}\right) + \frac{3}{2}\ln^2 10\right.$, približnú hodnotu $\ln 10$ pozri v riešení pr. 406; treba si uvedomiť, že Maclaurinov rad funkcie $\ln(1+x)$ nekonverguje v žiadnom bode intervalu $[10,100]$, preto sme použili uvedené úpravy$\Big)$;

[36]dosadením $x = \pi$ do rovnosti z poznámky [37] k pr. 249 možno dokázať rovnosť $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (iný spôsob dôkazu tejto rovnosti pozri v [10, odsek 440, pr. 7, alebo odsek 511, pr. 4])