Part I
Limita funkcie

Upozornenie pre čitateľa. Keďže cieľom prvého odseku tejto kapitoly je zaviesť základný pojem matematickej analýzy – pojem limity, je v ňom veľa miesta venovaného prípravným úvahám; naviac sa tu vyskytuje z hľadiska matematickej serióznosti nečestný ťah: dve definície toho istého pojmu (v paragrafoch .5 a .7). Preto považujeme za vhodné zaradiť návod

AKO ČÍTAŤ NASLEDUJÚCI ODSEK

Čitateľ, ktorý si nepraje byť siahodlho privádzaný k definícii limity, ktorú budeme v ďalšom používať, môže začať čítanie až paragrafom .7, z predchádzajúceho textu potrebuje len definície .2 a .4.

Pre čitateľa, ochotného prehrýzať sa celým textom, máme tiež zopár informácií. Na zavedenie pojmu limita sa spravidla používa jedna z dvoch definícií: *Heineho* (ktorú uvádzame v paragrafe .5) alebo *Cauchyho* (paragraf .7). Keďže Heineho definícia sa nám zdala vhodnejšia na osvetlenie tohto (nie úplne jednoduchého) pojmu, privádzame čitateľa v prvých paragrafoch odseku Definícia limity k limite funkcie použitím limity postupnosti; vo vete .6 potom ukážeme, že takto zavedený pojem možno popísať aj iným spôsobom. Ten iný spôsob je práve Cauchyho definícia limity, ktorú budeme využívať ako základnú v našich ďalších úvahách. Jej vyslovením v paragrafe .7 končí obdobie prípravných rečí. Heineho definícia v paragrafe .5 nám teda slúži len ako pomôcka a v ďalšom texte sa na ňu ako na definíciu nikdy nebudeme odvolávať; veta .6 dokazujúca ekvivalenciu obidvoch uvedených prístupov však ukazuje, že naša nečestnosť (je dobrým zvykom uvádzať jedinú definíciu nového pojmu) nebola až taká strašná.

1 Definícia limity

.1 Definícia. Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

- *konverguje k číslu* $l \in \mathbf{R}$, ak
$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists N \in \mathbf{N}\big)\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\big(|a_n - l| < \varepsilon\big) \tag{1}$$
- *diverguje k* ∞, ak
$$\big(\forall K \in \mathbf{R}\big)\big(\exists N \in \mathbf{N}\big)\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\big(a_n > K\big) \tag{2}$$
- *diverguje k* $-\infty$, ak
$$\big(\forall K \in \mathbf{R}\big)\big(\exists N \in \mathbf{N}\big)\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\big(a_n < K\big) \tag{3}$$
- *osciluje*, ak nenastane ani jedna z predchádzajúcich možností.

Poznámka. Výroky (1), (2), (3) majú podobnú štruktúru:
$$\big(\forall \heartsuit\big)\big(\exists N \in \mathbf{N}\big)\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\big(V(a_n, \heartsuit)\big)\ ,$$
kde $V(a_n, \heartsuit)$ hovorí, že číslo a_n leží v intervale popísanom pomocou $\heartsuit$ (v prvom prípade je to interval $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ (tj.$(l - \heartsuit, l + \heartsuit)$), v druhom (K, ∞) (tj. $(\heartsuit, \infty)$), v treťom $(-\infty, K)$ (tj. $(-\infty, \heartsuit)$). Zavedieme teraz niekoľko pojmov, použitie ktorých umožní zapisovať (1), (2), (3) jednotným spôsobom; to sa v budúcnosti ukáže ako prospešné (vyhneme sa tým napríklad opakovaniu niektorých úvah, ktoré sú podobné vo všetkých troch prípadoch).

.2 Definícia. Množinu $\mathbf{R}^* := \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ budeme nazývať *rozšírená reálna os* a jej prvky budeme volať *body* (pričom pre označenie prvkov množiny $\mathbf{R}$ budeme okrem toho naďalej používať aj pomenovanie *čísla*).

Nech $l \in \mathbf{R}$. Každý interval tvaru $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, budeme nazývať *okolím* (alebo presnejšie ε-*okolím*) *bodu* l; číslo ε sa bude nazývať *polomer okolia*. Každý interval tvaru (K, ∞) (resp. $(-\infty, K)$), kde $K \in \mathbf{R}$, budeme nazývať *okolím bodu* ∞ (resp. *okolím bodu* $-\infty$). Okolie bodu $b \in \mathbf{R}^*$ budeme označovať $O(b)$, špeciálne ε-okolie bodu $l \in \mathbf{R}$ aj znakom $O(\varepsilon, l)$. Množiny tvaru $O(b) \setminus \{b\}$ budeme nazývať *prstencové okolie bodu* b a označovať $P(b)$; pokiaľ nebude hroziť nedorozumenie, budeme namiesto $O(b)$ alebo $P(b)$ písať len O alebo P.

Poznámka. Zrejme v prípade $b = \infty$ a $b = -\infty$ je pojem prstencové okolie totožný s pojmom okolie a zavádzame ho pre tieto prípady len kvôli zjednoteniu terminológie.♠

Zavedenie pojmu okolia nám umožňuje pristupovať k situáciám popísaným výrokmi (1), (2), (3) jednotne:

.3 Definícia. Hovoríme, že *postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* $b \in \mathbf{R}^*$, ak

$$\big(\forall O(b)\big)\big(\exists P(\infty)\big)\big(\forall n \in P(\infty) \cap \mathbf{N}\big)\big(a_n \in O(b)\big) \tag{4}$$

Bod b sa označuje $\lim_{n\to\infty} a_n$. Ak $b \in \mathbf{R}$, hovoríme o *vlastnej* (alebo *konečnej*) *limite*, v prípade $b = \infty$ alebo $b = -\infty$ o *nevlastnej limite*. Postupnosti, ktoré majú vlastnú limitu, sa nazývajú *konvergentné*, ostatné postupnosti (tj. postupnosti, ktoré majú nevlastnú limitu alebo nemajú limitu) sa nazývajú *divergentné*.♠

Definíciou limity postupnosti sme naplnili presným obsahom našu pôvodnú pracovnú formuláciu "pre rastúce n sa hodnoty a_n približujú k bodu b". Naším ďalším cieľom je definovať pojem limity funkcie f v bode a, tj. popísať, čo presne myslíme formuláciou "pre x blížiace sa k a sa hodnoty $f(x)$ blížia k b", upresnime ešte, že "x blížiace sa k a" si v tomto prípade predstavujeme ako "$x \neq a$ približujúce sa k a" [1]. Je zrejmé, že ak sa chceme k bodu a približovať takýmto spôsobom, musíme požadovať, aby bol hromadným bodom definičného oboru funkcie f v zmysle nasledujúcej definície.

.4 Definícia. Bod $b \in \mathbf{R}^*$ sa nazýva *hromadný bod množiny* $M \subset \mathbf{R}$, ak v každom jeho prstencovom okolí leží aspoň jeden prvok množiny M. [2]♠

Jednou z možností je popísať "blíženie sa k bodu a" pomocou postupností, pre ktoré máme už tento pojem korektne definovaný [3]. Ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov rôznych od a má limitu a, potom je skutočne x_n rôzne od a a blíži sa k a, požiadavka "pre takéto x sa hodnoty $f(x)$ blížia k b" získa potom podobu $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Keďže k bodu a sa takýmto spôsobom môžeme blížiť prostredníctvom rôznych postupností $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, je prirodzené požadovať, aby pri *každom* takom približovaní sa k bodu a sa hodnoty $f(x_n)$ približovali k b.

.5 Definícia. Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Hovoríme, že *funkcia f má v bode a limitu* b $(\in \mathbf{R}^*)$, ak pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)\backslash\{a\}$ takú, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, platí $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$.♠

Ukážeme teraz, že takto definovanú limitu funkcie f v bode a možno popísať rovnakým spôsobom ako je v (4) popísaná limita postupnosti [4].

.6 Veta. *Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f, nech $b \in \mathbf{R}^*$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*
(a) *pre každú postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$ *takú, že* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *platí* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$;
(b) $\big(\forall O(b)\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in P(a) \cap D(f)\big)\big(f(x) \in O(b)\big)$.

Dôkaz. :-) Skôr ako začneme vlastný dôkaz, skúsme sa zamyslieť nad vlastnosťou (b). Ak si graf funkcie f predstavíme znázornený v podobe "šípka z x do $f(x)$", tak (b) hovorí toto: akokoľvek si zvolíme okolie $O(b)$ bodu b, vždy vieme nájsť prstencové okolie $P(a)$ bodu a tak, že

- všetky šípky začínajúce v $P(a)$ končia v $O(b)$

alebo nepatrne inak povedané:

- ak si chceme byť istí, že $f(x)$ bude ležať v $O(b)$, stačí zabezpečiť, aby x ležalo v $P(a)$.(-:

[1] Pojmom limita funkcie f v bode a chceme totiž vyjadriť správanie sa funkcie f v "bezprostrednej blízkosti bodu a", ale nezaujíma nás, čo sa deje v bode a, tj. či tam je alebo nie je funkcia f definovaná, resp. akú funkčnú hodnotu tam nadobúda. (Otázkou, či sa funkcia f v bode a správa tak, ako by sa dalo očakávať od jej správania sa "v bezprostrednej blízkosti bodu a", sa budeme zaoberať v nasledujúcej kapitole.) Všimnime si ešte, že požiadavka $x \neq a$ bola automaticky splnená v našich ilustračných príkladoch, v ktorých funkcia f nebola v bode a definovaná.

[2] Výrok *bod* ∞ $(-\infty)$ *je hromadný bod množiny* M je zrejme len iné vyjadrenie skutočnosti, že množina M je zhora (zdola) neohraničená. (Teda skutočne novým pojmom je len pojem hromadného bodu pre prípad $b \in \mathbf{R}$, pre $b = \infty$ a $b = -\infty$ definujeme tento pojem kvôli zjednoteniu terminológie.)

[3] Samozrejme, že ďalšou možnosťou je ihneď chápať definíciu .7 ako presné vyjadrenie pracovnej formulácie "pre x blížiace sa k a sa $f(x)$ blíži k b", a nezdržiavať sa sprostredkovaním tohto pojmu cez postupnosti.

[4] Čitateľ, ktorého doteraz trápilo, prečo sme v (4) použili práve prstencové okolie $P(\infty)$ (keď sme v uvedenom prípade mohli rovnako dobre použiť aj okolie $O(\infty)$), teraz už asi vidí, že dôvodom bola snaha, aby (4) a výrok (b) z nasledujúcej vety mali rovnakú podobu.

Dokážeme najprv implikáciu $(b) \Rightarrow (a)$. Predpokladajme teda, že platí (b). Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$ je postupnosť s limitou a. Chceme dokázať, že $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$, tj. že platí

$$\big(\forall O(b)\big)\big(\exists N \in \mathbf{N}\big)\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\big(f(a_n) \in O(b)\big)\,.$$

:-) Ak chceme dokázať tvrdenie zapísané v predchádzajúcom riadku, vidíme, že máme zodpovedať nasledujúcu otázku: ak je dané okolie $O(b)$ bodu b, pre ktoré čísla $n \in \mathbf{N}$ vieme zaručiť, že $f(a_n)$ leží v $O(b)$? Jednu možnosť poskytuje predpoklad (b): $f(a_n)$ bude iste ležať v $O(b)$, ak a_n bude ležať v $P(a)$, čo prvú položenú otázku prevádza na druhú: pre ktoré n vieme zaručiť, že a_n leží v $P(a)$? Na to ale dávajú odpoveď predpoklady $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ a $(\forall n \in \mathbf{N})(a_n \neq a)$. Z prvého z nich vyplýva, že k okoliu $O(a) := P(a) \cup \{a\}$ iste existuje $N_1 \in \mathbf{N}$ tak, že pre $n \in \mathbf{N}, n > N_1$ už platí $a_n \in O(a)$, druhý z nich zaručuje, že z inklúzie $a_n \in O(a)$ vyplýva inklúzia $a_n \in P(a)$. Pre $n \in \mathbf{N}, n > N_1$ teda platí $a_n \in P(a)$, a teda – podľa predchádzjúcich úvah – aj $f(a_n) \in O(b)$.(-:

Teda znova stručne: Zvolíme okolie $O(b)$ bodu b. K okoliu $O(b)$ nájdeme prstencové okolie $P(a)$ bodu a tak, že platí

$$x \in P(a) \Longrightarrow f(x) \in O(b) \tag{5}$$

(existencia okolia $P(a)$ vyplýva z predpokladu (b)). K okoliu $O(a) := P(a) \cup \{a\}$ nájdeme $N_1 \in \mathbf{N}$ tak, že

$$n > N_1 \Longrightarrow a_n \in O(a)$$

(existencia čísla N_1 vyplýva z nášho predpokladu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$). Z podmienky

$$(\forall n \in \mathbf{N})(a_n \neq a)$$

potom vyplýva

$$n > N_1 \Longrightarrow a_n \in P(a) \tag{6}$$

a z (6) a (5) dostávame

$$\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N_1\big)\big(f(a_n) \in O(b)\big)\,.$$

Naša úvaha je správna pre každé pevne zvolené okolie $O(b)$, teda

$$\big(\forall O(b)\big)\big(\exists N \in \mathbf{N}\big)\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\big(f(a_n) \in O(b)\big)\,,$$

čo sme chceli dokázať.△

Implikáciu $(a) \Rightarrow (b)$ budeme dokazovať nepriamo (tj. dokážeme implikáciu $\neg(b) \Rightarrow \neg(a)$). Nech teda

$$\big(\exists O(b)\big)\big(\forall P(a)\big)\big(\exists x \in P(a) \cap D(f)\big)\big(f(x) \notin O(b)\big)\,. \tag{7}$$

:-) Našou snahou je teraz dopracovať sa od tohto výroku (v ktorom čitateľ iste spoznal negáciu tvrdenia (b)) k výroku $\neg(a)$, tj. ukázať, že existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$ tak, že platí rovnosť $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ale číslo b nie je limitou postupnosti $\{f(a_n)\}$.(-:

Predpokladajme najprv, že $a \in \mathbf{R}$. Nech $n \in \mathbf{N}$; označme $P_n(a) := (a - 1/n, a + 1/n) \setminus \{a\}$, potom $P_n(a)$ je iste prstencové okolie bodu a, a preto podľa (7) existuje aspoň jedno číslo $x \in P_n(a)$ tak, že $f(x) \notin O(b)$. Zvoľme jedno z čísel s touto vlastnosťou a označme ho a_n. Ak to urobíme pre každé $n \in \mathbf{N}$, dostaneme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že

- $(\forall n \in \mathbf{N})(|a_n - a| < 1/n)$ (to je len iný zápis inklúzie $a_n \in P_n(a)$), z tejto vlastnosti vyplýva, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (dôkaz prenechávame vždy ochotnému čitateľovi);
- $\big(\forall n \in \mathbf{N}\big)\big(f(a_n) \notin O(b)\big)$, odtiaľ ale vyplýva, že číslo b nemôže byť limitou postupnosti $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ (pretože v takom prípade by až na konečný počet ležali všetky členy tejto postupnosti v okolí $O(b)$).

Z existencie postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s uvedenými vlastnosťami vyplýva tvrdenie $\neg(a)$, čím je náš dôkaz v prípade $a \in \mathbf{R}$ skončený.△

V prípade $a = \infty$, resp. $a = -\infty$ je postup rovnaký, ale namiesto $P_n(a) := (a - 1/n, a + 1/n)$ volíme $P_n(\infty) := (n, \infty)$, resp. $P_n(-\infty) := (-\infty, -n)$.

Poznámka. V prípade dôsledne axiomatického budovania základov matematickej analýzy je potrebné na zdôvodnenie existencie postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorú sme použili v dôkaze implikácie $(a) \Rightarrow (b)$ predchádzajúcej vety, použiť axiómu nazývanú *axióma výberu.* Jedna z jej možných formulácií znie:

Nech $\{A_\alpha; \alpha \in I\}$, kde I je neprázdna množina indexov, je systém neprázdnych množín [5] *. Potom existuje zobrazenie $I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ také, že pre každé $\alpha \in I$ je $f(\alpha) \in A_\alpha$.*

Treba upozorniť, že v matematike existujú smery nepovažujúce dôkazy založené na axióme výberu za korektné, preto aj v tomto texte ju budeme používať pokiaľ možno len v nevyhnutných prípadoch.♠

Po tejto dlhotrvajúcej delostreleckej príprave môžeme vysloviť definíciu limity v tejto jednotnej podobe.

[5] príklady ozrejmujúce pojem *systém množín* nájde čitateľ v poznámke k leme .46

.7 Definícia. Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Hovoríme, že *funkcia f má v bode a limitu b ($\in \mathbf{R}^*$)* (a zapisujeme $\lim_{x\to a} f(x) = b$ alebo $f(x) \to b$ *pre* $x \to a$), ak

$$\big(\forall O(b)\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in P(a) \cap D(f)\big)\big(f(x) \in O(b)\big) . \tag{8}$$

Ak $b \in \mathbf{R}$ (resp. $a \in \mathbf{R}$), hovoríme o *konečnej* (alebo *vlastnej*) *limite* (resp. o *limite v konečnom bode*), v prípade $b = \infty$ alebo $b = -\infty$ (resp. $a = \infty$ alebo $a = -\infty$) o *nevlastnej* (alebo *nekonečnej*) *limite* (resp. *limite v nevlastnom bode*).

Poznámka. 1. Výrok (8) možno zrejme zapísať aj v tvare

$$\big(\forall O(b)\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in D(f)\big)\big(x \in P(a) \Rightarrow f(x) \in O(b)\big) . \tag{9}$$

Všeobecná formulácia (8), resp (9), v sebe obsahuje 9 špeciálnych prípadov (zodpovedajúcich možnostiam $a \in \mathbf{R}$, $a = \infty$ alebo $a = -\infty$ a rovnakým možnostiam pre b), v každom z nich môžeme (8), resp. (9) nahradiť konkrétnejším zápisom. V prípade $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$ môžeme okolia bodu b popísať ich polomerom ε a okolia bodu a ich polomerom δ, a (9) dostane tak podobu

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)\big(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\big) \tag{10}$$

(kde nerovnosť $0 < |x-a|$ zrejme zabezpečuje, že $x \neq a$, tj. že x leží v *prstencovom* okolí bodu a).

V prípade $a \in \mathbf{R}, b = -\infty$ môžeme okolia bodu b popísať ich pravým koncovým bodom K, okolia bodu a opäť popíšeme ich polomerom δ a (9) bude v tvare

$$\big(\forall K \in \mathbf{R}\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)\big(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < K\big) .$$

(Ďalšie prepisovanie prenechávame čitateľovi.)

2. Definícia limity postupnosti v (4), resp. v (1), (2), (3), je zrejme špeciálnym prípadom definície (8), ktorý dostaneme, ak zvolíme $D(f) = \mathbf{N}$.♠

Skôr ako vyslovíme prvé tvrdenia o limitách, uveďme niekoľko elementárnych pomocných úvah zhrnutých do nasledujúcej lemy.

.8 Lema. (a) *Nech $n \in \mathbf{N}$. Ak $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sú prstencové okolia bodu $a \in \mathbf{R}^*$, tak aj $P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n$ je prstencové okolie bodu a.* (Analogické tvrdenie platí aj pre okolia.)

(b) *Nech $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a \neq b$. Potom existujú okolie $O(a)$ bodu a a okolie $O(b)$ bodu b tak, že $O(a) \cap O(b) = \emptyset$.*

(c) *Ak $b \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod množiny $M \subset \mathbf{R}$ a $N \supset M$, tak b je aj hromadný bod množiny N.*

(d) *Nech $\mathcal{P}$ je prstencové okolie bodu $b \in \mathbf{R}^*$. Potom b je hromadný bod množiny $M \subset \mathbf{R}$ práve vtedy, keď je aj hroamdným bodom množiny $M \cap \mathcal{P}$.*

Dôkaz. Napovieme len, že dôkaz implikácie *ak b je hromadný bod množiny M, tak je aj hromadný bod množiny $M \cap \mathcal{P}$* sa zakladá na tejto úvahe: ak $P(b)$ je prstencové okolie bodu b, tak aj $\mathcal{P} \cap P(b)$ je prstencovým okolím tohto bodu; keďže b je hromadný bod množiny M, leží v $\mathcal{P} \cap P(b)$ aspoň jeden prvok množiny M, čo ale znamená, že v $P(b)$ leží aspoň jeden prvok množiny $M \cap \mathcal{P}$.♠

Prvá z našich viet o limitách ukazuje, že pojem limity je definovaný jednoznačne v nasledujúcom zmysle:

.9 Veta. *Funkcia má v každom hromadnom bode svojho definičného oboru najviac jednu limitu* (tj. *ak $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f a $r = \lim_{x\to a} f(x), s = \lim_{x\to a} f(x)$, tak $r = s$*).

Dôkaz. Sporom, nech $r \neq s$ a nech r aj s sú limitou funkcie f v bode a. Potom podľa lemy .8(b) existujú okolie $O(r)$ bodu r a okolie $O(s)$ bodu s tak, že $O(r) \cap O(s) = \emptyset$. Keďže $r = \lim_{x\to a} f(x)$, k okoliu $O(r)$ musí podľa definície limity existovať prstencové okolie P_1 bodu a tak, že

$$\big(\forall x \in P_1 \cap D(f)\big)\big(f(x) \in O(r)\big) .$$

Z rovnakých dôvodov k okoliu $O(s)$ existuje prstencové okolie P_2 bodu a tak, že

$$\big(\forall x \in P_2 \cap D(f)\big)\big(f(x) \in O(s)\big) .$$

Pre prvky neprázdnej množiny $P_1 \cap P_2 \cap D(f)$ (je skutočne neprázdna?) potom musí platiť $f(x) \in O(r) \cap O(s) = \emptyset$, čo je zrejme nemožné. Týmto sporom je náš dôkaz skončený.♠

Uveďme v závere tohto odstavca niekoľko tvrdení súvisiacich s definíciou limity, ktoré využijeme v ďalších úvahách. Prvé tri, zhrnuté do lemy .10, sa týkajú ohraničenosti.

.10 Lema. *Nech* $b = \lim_{x\to a} f(x)$ [6] *. Potom*
(a) *ak* $b \in \mathbf{R}$, *tak funkcia* f *je ohraničená v niektorom prstencovom okolí* $P(a)$ *bodu* a (tj. na množine $P(a) \cap D(f)$);
(b) *ak* $b > 0$ *alebo* $b = \infty$, *tak* f *je v niektorom prstencovom okolí bodu* a *ohraničená zdola kladnou konštantou,* tj.

$$\big(\exists P(a)\big)\big(\exists M > 0\big)\big(\forall x \in P(a) \cap D(f)\big)\big(f(x) \geq M\big) ;$$

(c) *ak* $b < 0$ *alebo* $b = -\infty$, *tak* f *je v niektorom prstencovom okolí bodu* a *ohraničená zhora zápornou konštantou.*

Dôkaz. Dokážeme len tvrdenie (a). Z definície limity v (8) vyplýva, že ku každému okoliu $O(b)$ bodu b vieme nájsť prstencové okolie bodu a s istými vlastnosťami. Keď ku každému, tak iste aj k okoliu $O := (b-1, b+1)$ [7]. Existuje teda prstencové okolie P bodu a, pre ktoré platí

$$\big(\forall x \in P \cap D(f)\big)\big(f(x) \in O\big) ,$$

tj.

$$\big(\forall x \in P \cap D(f)\big)\big(b - 1 < f(x) < b + 1\big) .$$

Posledný výrok hovorí, že na $P \cap D(f)$ je funkcia f ohraničená, čím je dôkaz skončený [8].△
K dôkazu tvrdenia (b) pre prípad $b > 0$ len napovieme, že postup je rovnaký ako v dôkaze (a), ale okolie O teraz zvolíme tak, aby jeho polomer bol menší než b.♠

Vzťahom limity funkcie a limity jej zúženia sa zaoberajú nasledujúce tvrdenia.

.11 Lema. (a) *Nech funkcia* g *je zúžením funkcie* f *na množinu* M. *Ak* a *je hromadný bod množiny* M [9] *a existuje* $\lim_{x\to a} f(x)$, *tak existuje aj* $\lim_{x\to a} g(x)$ *a platí* $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x)$.
(b) *Nech sa funkcie* f, g *zhodujú na niektorom prstencovom okolí* $\mathcal{P}$ *bodu* $a \in \mathbf{R}^*$, tj. nech

$$D(f) \cap \mathcal{P} = D(g) \cap \mathcal{P} \tag{11}$$

a

$$\big(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(f)\big)\big(f(x) = g(x)\big) . \tag{12}$$

Potom platí: ak existuje jedna z limít $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$ [10], *tak existuje aj druhá a obidve limity sa rovnajú.*
(c) *Nech* f_1, *resp.* f_2 *je zúženie funkcie* f *na množinu* M_1, *resp.* M_2. *Ak limity* $\lim_{x\to a} f_1(x)$, $\lim_{x\to a} f_2(x)$ *existujú* [11], *ale sú rôzne, tak* $\lim_{x\to a} f(x)$ *neexistuje.*
(d) *Nech* f_1, *resp.* f_2 *je zúženie funkcie* f *na množinu* M_1, *resp.* M_2. *Ak* $\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = b \in \mathbf{R}^*$ *a naviac platí rovnosť* $M_1 \cup M_2 = D(f)$, *tak existuje aj* $\lim_{x\to a} f(x)$ *a rovná sa* b [12].

---

[6] Predpoklad *nech* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ chápeme ako "zhustenú podobu" formulácie *nech* a *je hromadný bod definičného oboru funkcie* f, *nech v* a *existuje limita funkcie* f *a rovná sa* b.

[7] Pri druhom čítaní tohto dôkazu by už čitateľovi malo byť jasné, že nebolo podstatné, že sme si zvolili práve okolie $(b-1, b+1)$, rovnako by nám v tomto prípade poslúžilo ľubovoľné iné okolie bodu b.

[8] Tvrdenie (a) lemy zostane v platnosti, ak v ňom slová *v niektorom prstencovom okolí* nahradíme slovami *v niektorom okolí* (v prípade $a \notin D(f)$ je to zrejmé; v prípade $a \in D(f)$ je množina $f(O(a) \cap D(f))$, kde $O(a) := P \cup \{a\}$, zjednotením ohraničených množín $f(P \cap D(f))$ a $\{f(a)\}$). V prípadoch (b) a (c) to nemusí byť pravda (prečo?).

[9] z inklúzie $M \subset D(f)$ vyplýva, že a je potom aj hromadný bod množiny $D(f)$ (lema .8(c))

[10] predpoklad existencie jednej z uvedených limít v sebe "automaticky" obsahuje predpoklad, že a je hromadný bod definičného oboru príslušnej funkcie (a vzhľadom na podmienku (11) potom (podľa lemy .8(c),(d)) aj hromadný bod definičného oboru druhej z funkcií f, g)

[11] znovu pripomeňme, že predpokladajúc existenciu týchto limít, predpokladáme automaticky, že a je hromadný bod množiny M_1 aj množiny M_2 (a teda podľa lemy .8(c) iste aj definičného oboru funkcie f)

[12] S týmto tvrdením samozrejme možno vystrájať všelijaké duševné prostocviky, napr. ho indukciou zovšeobecniť na prípad $D(f) = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$ (kde n je niektoré prirodzené číslo) alebo ho upravovať použitím lemy .11(b). Iniciatíve čitateľa (ani menovateľa) sa medze nekladú, žiadame len, aby dosiahnuté výsledky boli správne.

Dôkaz. (b). Nasledujúce úvahy sú síce elementárne, ale kvôli prehľadnosti dôkaz urobíme v dvoch krokoch. Najprv dokážeme tento špeciálny prípad tvrdenia (b):

Nech $\mathcal{P}$ je prstencové okolie bodu a. Potom funkcia f má v bode a limitu b práve vtedy, keď ju tam má jej zúženie na množinu $\mathcal{P}$ (tj. funkcia $f_1 := f|_{\mathcal{P}\cap D(f)}$).

Treba teda dokázať, že nasledujúce dva výroky sú ekvivalentné:

$$\big(\forall O(b)\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in P(a) \cap D(f)\big)\big(f(x) \in O(b)\big) \quad (\text{tj. } \lim_{x\to a} f(x) = b) \tag{13}$$

$$\big(\forall O(b)\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in P(a) \cap (\mathcal{P} \cap D(f))\big)\big(f(x) \in O(b)\big) \quad (\text{tj. } \lim_{x\to a} f_1(x) = b) \tag{14}$$

To, že z (13) vyplýva (14), by malo byť zrejmé: ak pre všetky prvky množiny $P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O(b)$, tak to iste platí aj pre všetky prvky jej podmnožiny $P(a) \cap \mathcal{P} \cap D(f)$. Ak chceme odvodiť tvrdenie (13) z tvrdenia (14), stačí si uvedomiť, čo vlastne požaduje (13): ku každému okoliu $O(b)$ máme nájsť nejaké prstencové okolie (označme ho teraz $S(a)$) bodu a tak, aby platilo $x \in S(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O(b)$. K okoliu $O(b)$ ale podľa (14) existuje $P(a)$ tak, že platí $x \in \big(P(a) \cap \mathcal{P}\big) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O(b)$. Potom zrejme $S(a) := P(a) \cap \mathcal{P}$ je hľadané prstencové okolie (to, že je to skutočne prstencové okolie, vyplýva z tvrdenia (a) lemy .8 [13]).$\triangle$

Teraz už ľahko dokážeme tvrdenie (b) našej lemy. Označme $f_1 := f|_{\mathcal{P}\cap D(f)}, g_1 := g|_{\mathcal{P}\cap D(g)}$, potom z (11) a (12) vyplýva rovnosť

$$f_1 = g_1 \ . \tag{15}$$

Ak $\lim_{x\to a} f(x) = b$, tak podľa nášho pomocného tvrdenia (alebo aj podľa tvrdenia (a) tejto lemy) aj $\lim_{x\to a} f_1(x) = b$, z (15) potom vyplýva $\lim_{x\to a} g_1(x) = b$ a napokon opäť z nášho pomocného tvrdenia [14] dostávame, že aj $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

(c) Tvrdenie vyplýva z časti (a) a z vety .9. Budeme dokazovať sporom. Nech $r := \lim_{x\to a} f_1(x), s := \lim_{x\to a} f_2(x)$. Keby existovala $\lim_{x\to a} f(x)$, museli by podľa časti (a) tejto lemy platiť rovnosti $\lim_{x\to a} f(x) = r$, $\lim_{x\to a} f(x) = s$, čo – keďže $r \neq s$ – je v spore s tvrdením vety .9.

(d) Nech $\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = b$ a $M_1 \cup M_2 = D(f)$, chceme dokázať

$$\big(\forall O(b)\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in P(a) \cap D(f)\big)\big(f(x) \in O(b)\big) \ . \tag{16}$$

Zvoľme teda okolie $O(b)$ a hľadajme prstencové okolie $P(a)$ s požadovanou vlastnosťou. K nášmu okoliu $O(b)$ existuje – pretože $\lim_{x\to a} f_1(x) = b$ – prstencové okolie $P_1(a)$ bodu a také, že

$$\big(\forall x \in P_1(a) \cap M_1\big)\big(f_1(x) \in O(b)\big) \ .$$

Keďže pre $x \in M_1$ je $f_1(x) = f(x)$, môžeme predchádzajúce tvrdenie zapísať v podobe

$$\big(\forall x \in P_1(a) \cap M_1\big)\big(f(x) \in O(b)\big) \ . \tag{17}$$

Pretože aj $\lim_{x\to a} f_2(x) = b$, existuje aj prstencové okolie $P_2(a)$ bodu a také, že

$$\big(\forall x \in P_2(a) \cap M_2\big)\big(f(x) \in O(b)\big) \tag{18}$$

(podobne ako predtým sme využili, že pre $x \in M_2$ je $f_2(x) = f(x)$).

Ukážeme teraz, že za hľadané prstencové okolie $P(a)$ môžeme zvoliť okolie $P(a) := P_1(a) \cap P_2(a)$, tj. že pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ skutočne platí $f(x) \in O(b)$. Z predpokladu $M_1 \cup M_2 = D(f)$ [15] vyplýva $P(a) \cap D(f) = P(a) \cap (M_1 \cup M_2) = P(a) \cap M_1 \ \cup \ P(a) \cap M_2 \subset P_1(a) \cap M_1 \ \cup \ P_2(a) \cap M_2$, teda každý prvok $x \in P(a) \cap D(f)$ leží v $P_1(a) \cap M_1$ alebo $P_2(a) \cap M_2$. Podľa (17) a (18) pre všetky prvky týchto množín platí inklúzia $f(x) \in O(b)$. Tým je implikácia $x \in P(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O(b)$ dokázaná. Keďže naše úvahy sú správne, nech na začiatku zvolíme akékoľvek okolie $O(b)$, je tým výrok (16) dokázaný.

Poznámka. 1. Nenápadne vyzerajúce tvrdenie (b) lemy je často používaným teoretickým nástrojom pri výpočte limít: ak máme v bode a nájsť limitu funkcie f (zadanej spravidla v nejakej zakuklenej a komplikovanej podobe) a podarí sa nám ukázať, že na niektorom prstencovom okolí bodu a sa funkcia f zhoduje s nejakou nám

[13] čitateľ by si mal rozmyslieť, že predpoklad $\mathcal{P}$ *je prstencové okolie bodu* a (ktorý využívame jedine v tomto mieste dôkazu) nemožno vynechať.

[14] tentokrát ovšem už nie z tvrdenia (a) tejto lemy

[15] tento predpoklad je v tomto dôkaze podstatný

už známou (čo sa limít týka) funkciou g, potom tvrdenie (b) lemy umožňuje previesť hľadanie limity funkcie f na hľadanie limity funkcie g.

2. Z dôkazu tvrdenia (d) by malo byť zrejmé, že toto tvrdenie zostane v platnosti, ak podmienku $M_1 \cup M_2 = D(f)$ nahradíme predpokladom $M_1 \cup M_2 = D(f) \setminus \{a\}$.♠

Dôkaz nasledujúceho tvrdenia zatiaľ presahuje naše možnosti (po vybudovaní dostatočného teoretického aparátu sa k nemu samozrejme vrátime; pozri príklad .34, cvičenie .35 a paragrafy .72 a .73). Dôvodom jeho vyslovenia už v tomto okamihu je snaha umožniť čiatateľovi použiť teoretické poznatky o limitách pri riešení príkladov, ktorých počet by sa nemožnosťou používať elementárne funkcie značne zredukoval.

.12 Veta. (a) *Ak f je elementárna funkcia a číslo $a \in D(f)$ je hromadným bodom množiny $D(f)$, tak $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; (d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

2 Limita funkcií $f \pm g, fg, \frac{f}{g}, g \circ f$

V tomto odstavci uvedieme sériu viet popisujúcich "počítanie s limitami", tj. umožňujúcich hľadanie limít funkcií $f \pm g, fg, \frac{f}{g}, g \circ f$, ak poznáme limity funkcií f a g.

Začnime zopár drobnosťami, ktoré budeme potrebovať v niektorých nasledujúcich úvahách.

.13 Lema. *Nech $k \in \mathbf{R}$. Potom platí*

(a) *ak $f(x) = k$ pre všetky $x \in \mathbf{R}$, tak $\lim_{x\to a} f(x) = k$ pre každé $a \in \mathbf{R}^*$;*

(b) *ak $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbf{R}$* [16]*, tak $\lim_{x\to a}(k \cdot f(x)) = k \cdot b$;*

(c) *ak $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, tak $\lim_{x\to a}(f(x) + k) = \infty$;*

(d) *ak $k > 0$ a $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, tak $\lim_{x\to a} \big(k \cdot f(x)\big) = \infty$.*

Ďalej platí

(e) *ak $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbf{R}$, tak $\lim_{x\to a} |f(x)| = |b|$;*

(e_1) *$\lim_{x\to a} f(x) = 0$ práve vtedy, keď $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$;*

(f) *$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ práve vtedy, keď $\lim_{x\to a} \big(-f(x)\big) = -\infty$.*

Dôkaz. (b). V prípade $k = 0$ je to zrejmý dôsledok časti (a) a lemy .13(a); predpokladajme teraz, že $k \neq 0$.

:-) Ak pre všetky čísla $x \in D(f)$ ležiace v prstencovom okolí P bodu a platí $|f(x) - b| < \varepsilon$, tak pre tie isté čísla platí aj $|k \cdot f(x) - k \cdot b| < |k| \cdot \varepsilon$. Z tejto triviality vyplýva: ak chceme nájsť prstencové okolie P tak, aby pre $x \in D(f)$ ležiace v ňom platilo $|k \cdot f(x) - k \cdot b| < \varepsilon$, stačí hľadať P s vlastnosťou $x \in P \cap D(f) \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{|k|}$. (-:

Nech $\lim_{x\to a} f(x) = b$, chceme dokázať tvrdenie

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in P(a) \cap D(f)\big)\big(|k \cdot f(x) - k \cdot b| < \varepsilon\big) . \tag{19}$$

Nech je teda dané $\varepsilon > 0$. K číslu $\frac{\varepsilon}{|k|}$ existuje – keďže $\lim_{x\to a} f(x) = b$ – prstencové okolie $P(a)$ tak, že

$$x \in P(a) \cap D(f) \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{|k|} .$$

Pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ potom platí $|k \cdot f(x) - k \cdot b| < \varepsilon$, teda $P(a)$ má vlastnosť požadovanú v (19). Keďže táto úvaha je správna pre každé $\varepsilon > 0$, je tým tvrdenie (19) dokázané.

(d) Nech $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, chceme dokázať výrok

$$\big(\forall M \in \mathbf{R}\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in P(a) \cap D(f)\big)\big(k \cdot f(x) > M\big) .$$

[16] opätovne (a už naposledy – dúfajúc, že sa nám už podarilo vytvoriť u čitateľa potrebný pavlovovský reflex) upozorňujeme, že hovoriac "nech $\lim_{x\to a} f(x) = b$" máme vždy na mysli toto "nech a je hromadný bod množiny $D(f)$, nech existuje limita funkcie f v bode a a nech sa rovná b"

Zvoľme teda $M \in \mathbf{R}$ a hľadajme prstencové okolie požadovaných vlastností. K číslu $\frac{M}{k}$ existuje (pretože $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$) prstencové okolie $P(a)$ tak, že pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) > \frac{M}{k}$. Keďže $k > 0$, platí pre tieto x aj nerovnosť $k \cdot f(x) > M$, čo znamená, že nájdené okolie $P(a)$ spĺňa naše požiadavky.

(e) Dôkaz je založený na nerovnosti $\Big||r| - |s|\Big| \le |r - s|$ a jednoduchej z toho vyplývajúcej úvahe *ak pre $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $|f(x) - b| < \varepsilon$, tak pre tie isté x platí aj $\Big||f(x)| - |b|\Big| < \varepsilon$.*

(e_1) Stačí si uvedomiť, že inklúzie $f(x) \in O(\varepsilon, 0)$ a $|f(x)| \in O(\varepsilon, 0)$ sú obidve ekvivalentné s nerovnosťou $|f(x)| < \varepsilon$.

.14 Veta. *Nech funkcie f a g sú definované na množine M. Ak $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a funkcia g je ohraničená, tak $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = 0$.*

Dôkaz. Zvoľme $K > 0$ tak, aby platilo $(\forall x \in M)(|g(x)| \le K)$. Chceme dokázať výrok

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in P(a) \cap M\big)\big(|f(x)g(x)| < \varepsilon\big)\ .$$

Zvoľme teda $\varepsilon > 0$ a hľadajme prstencové okolie s požadovanou vlastnosťou. Keďže $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, iste existuje okolie $P(a)$ bodu a tak, že

$$\big(\forall x \in P(a) \cap M\big)\left(|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}\right)\ .$$

Nie je ťažké ukázať, že $P(a)$ spĺňa naše požiadavky: keďže pre všetky $x \in M$ je $|g(x)| \le K$, vyplýva z nerovnosti $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$ nerovnosť $|f(x)g(x)| < \varepsilon$, preto

$$(\forall x \in P(a) \cap M)(|f(x)g(x)| < \varepsilon)\ .$$

Poznámka. Použitím časti (b) lemy .11 môžeme práve dokázané tvrdenie sformulovať vo všeobecnejšej podobe, napr.:

Nech funkcie f a g sú definované na množine M. Ak $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a funkcia g je ohraničená v niektorom prstencovom okolí $\mathcal{P}$ bodu a (tj. na množine $\mathcal{P} \cap M$), *tak* $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = 0$.

$\big($Ak totiž definujeme $f_1 := f|_{\mathcal{P}\cap M}, g_1 := g|_{\mathcal{P}\cap M}$, tak funkcie f_1, g_1 spĺňajú predpoklady vety .14, teda $\lim_{x\to a} \big(f_1(x)g_1(x)\big) = 0$, podľa časti (b) lemy .11 potom – keďže $(fg)|_{\mathcal{P}\cap M} = f_1 g_1$ – aj $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = 0\big)$.

.15 Veta. *Nech funkcie f a g sú definované na množine M, nech $\lim_{x\to a} f(x) = r \in \mathbf{R}, \lim_{x\to a} g(x) = s \in \mathbf{R}$. Potom*

(a) $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = r + s$, tj.

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\ ;$$

(b) $\lim_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big) = r - s$, tj.

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)\ ;$$

(c) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = r \cdot s$, tj.

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\ ;$$

(d) *ak $s = \lim_{x\to a} g(x) \ne 0$, tak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r}{s}$*, tj.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ .$$

Dôkaz. (a) :-) Začnime ešte raz predbežnou úvahou. Ak R, resp. S je prstencové okolie bodu a také, že

$$(\forall x \in R \cap M)(|f(x) - r| < \varepsilon_1)\ ,$$

resp.

$$(\forall x \in S \cap M)(|g(x) - s| < \varepsilon_2)\ ,$$

tak pre $x \in R \cap S \cap M$ bude platiť

$$\big|\big(f(x)+g(x)\big) - (r+s)\big| = |(f(x)-r) + (g(x)-s)| \leq |f(x)-r| + |g(x)-s| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2\ ,$$

pritom $R \cap S$ je podľa lemy .8 prstencové okolie bodu a. Ak teda hľadáme prstencové okolie, pre prvky x ktorého by platilo $\big|\big(f(x)+g(x)\big) - (r+s)\big| < \varepsilon$, stačí napísať číslo ε v tvare súčtu dvoch kladných čísel ε_1 a ε_2 a nájsť príslušné prstencové okolia R a S. (-:

Chceme dokázať

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in P(a) \cap M\big)\big(|(f(x)+g(x)) - (r+s)| < \varepsilon\big)\ .$$

Zvoľme teda $\varepsilon > 0$ a hľadajme prstencové okolie $P(a)$ s požadovanou vlastnosťou. Keďže $\lim_{x\to a} f(x) = r$ a $\lim_{x\to a} g(x) = s$, existujú prstencové okolia $P_1(a)$ a $P_2(a)$ tak, že

$$(\forall x \in P_1(a) \cap M)\left(|f(x) - r| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\ , \quad (\forall x \in P_2(a) \cap M)\left(|g(x) - s| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\ .$$

Prstencové okolie $P(a) := P_1(a) \cap P_2(a)$ potom vyhovuje našim požiadavkám, pretože pre všetky $x \in P(a) \cap M$ platí

$$\big|\big(f(x)+g(x)\big) - (r+s)\big| \leq |f(x)-r| + |g(x)-s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .\triangle$$

Tvrdenie (b) možno odvodiť z lemy .13(b) a z tvrdenia (a): Keďže $\lim_{x\to a} g(x) = s$, platí podľa lemy .13(b) (v ktorej položíme $k = -1$) rovnosť $\lim_{x\to a}\big(-g(x)\big) = -s$; z existencie konečných limít $\lim_{x\to a} f(x) = r, \lim_{x\to a}\big(-g(x)\big) = -s$ potom podľa tvrdenia (a) tejto vety vyplýva rovnosť $\lim_{x\to a}\big(f(x) + (-g(x))\big) = r - s$, čo sme chceli dokázať.$\triangle$

Tvrdenie (c) možno dokázať nasledujúcim výpočtom (ktorý hneď zdôvodníme):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) &= \\
&\stackrel{\alpha}{=} \lim_{x\to a}\big[\big(f(x) - r + r\big)g(x)\big] = \\
&\stackrel{\beta}{=} \lim_{x\to a}[(f(x)-r)g(x)] + \lim_{x\to a}[r \cdot g(x)] = \\
&\stackrel{\gamma}{=} 0 + r \cdot s = r \cdot s\ .
\end{aligned}$$

Podľa lemy .13(b) [17] je $\lim_{x\to a}[r\cdot g(x)] = r\cdot s$. Funkcia g je ohraničená v niektorom prstencovom okolí bodu a (lema .10) a $\lim_{x\to a}(f(x)-r) = 0$ (lema .13(a) a tvrdenie (b) našej vety), preto $\lim_{x\to a}[(f(x)-r)g(x)] = 0$ (tvrdenie v poznámke za vetou .14). Tým sme zdôvodnili rovnosť γ. Rovnosť β vyplýva z tvrdenia (a) a rovnosť α by mala byť zrejmá [18].$\triangle$

(d) Dokážeme naše tvrdenie najprv za dodatočného predpokladu

$$\big(\exists K > 0\big)\big(\forall x \in D(g)\big)\big(|g(x)| > K\big) \tag{20}$$

a potom ukážeme, že všeobecný prípad $\lim_{x\to a} f(x) = r, \lim_{x\to a} g(x) = s \neq 0$ možno vždy previesť na túto špeciálnu situáciu.

Nech teda $\lim_{x\to a} f(x) = r \in \mathbf{R}, \lim_{x\to a} g(x) = s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ a nech platí (20). Dokážeme najprv, že $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{s}$, tj.

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in P(a) \cap M\big)\left(\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{s}\right| < \varepsilon\right)\ .$$

[17] všimnime si, že na dôkaz tvrdenia (c) používame lemu .13(b), ktorá sama je špeciálnym prípadom tohto tvrdenia (ak jednu z funkcií f, g zvolíme konštantnú), túto situáciu dokazovania všeobecnejšieho tvrdenia pomocou jeho špeciálnych prípadov zažijeme častejšie

[18] Pre čitateľa ovšem nebude na škodu, ak skúsi dokázať tvrdenie (c) bez použitia všelijakých špinavých trikov obdobne ako sme dokazovali tvrdenie (a).

Nech je teda dané $\varepsilon > 0$, hľadajme $P(a)$ požadovaných vlastností. Pretože $\lim_{x\to a} g(x) = s$, existuje prstencové okolie $P(a)$ bodu a s vlastnosťou

$$\big(\forall x \in P(a) \cap M\big)\big(|g(x) - s| < K \cdot |s| \cdot \varepsilon\big) . \tag{21}$$

Toto $P(a)$ spĺňa naše požiadavky, pretože pre $x \in P(a) \cap M$ podľa (20) a (21) platí

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s - g(x)}{s \cdot g(x)}\right| \le \frac{|g(x) - s|}{K \cdot |s|} < \frac{K \cdot |s| \cdot \varepsilon}{K \cdot |s|} = \varepsilon .$$

Tým je dokázaná rovnosť $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{s}$. Keďže $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, podľa tvrdenia (c) tejto vety vyplýva z existencie konečných limít $\lim_{x\to a} f(x) = r, \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{s}$ rovnosť $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r}{s}$, čím je naše tvrdenie – za doplňujúceho predpokladu (20) – dokázané. $\triangle$

Nech sú teraz splnené len predpoklady bodu (d), tj. $\lim_{x\to a} f(x) = r \in \mathbf{R}, \lim_{x\to a} g(x) = s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Potom $\lim_{x\to a} |g(x)| = |s|$ (lema .13(e)), preto (podľa lemy .10(b)) existuje kladná konštanta $K > 0$ a prstencové okolie $\mathcal{S}$ bodu a tak, že

$$(\forall x \in \mathcal{S} \cap M)(|g(x)| > K) .$$

Pre funkcie $f_1 := f|_{\mathcal{S}\cap M}, g_1 := g|_{\mathcal{S}\cap M}$ potom platí $\lim_{x\to a} f_1(x) = r, \lim_{x\to a} g_1(x) = s$ (lema .11(a)) a g_1 spĺňa podmienku (20), preto podľa už dokázaného je $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{r}{s}$. Z lemy .11(b) potom – keďže funkcie $\frac{f}{g}$ a $\frac{f_1}{g_1}$ sa zhodujú na $\mathcal{S} \cap M$ – vyplýva rovnosť $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r}{s}$, ktorú sme chceli dokázať.

Poznámka. V prípade (a) možno predpoklad $D(f) = D(g) = M$ z predchádzajúcej vety nahradiť všeobecnejším predpokladom *a je hromadný bod množiny $D(f+g)$* $(= D(f) \cap D(g))$. Ak totiž položíme $f_1 := f|_{D(f+g)}, g_1 := g|_{D(f+g)}$, tak $\lim_{x\to a} f_1(x) = r$, $\lim_{x\to a} g_1(x) = s$ (lema .11(a)), $D(f_1) = D(g_1)$, podľa vety .15 teda platí $\lim_{x\to a} \big(f_1(x) + g_1(x)\big) = r + s$, čo je ovšem (keďže $f + g = f_1 + g_1$) to isté ako $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = r + s$.

Podobne možno uvažovať aj v prípadoch (b), (c) a (d).

.16 Cvičenie. Bez použitia vety .12 dokážte rovnosti $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ $(a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$, $\lim_{x\to a} x^{-n} = a^{-n}$ $(a \in \mathbf{R} \setminus \{a\}, n \in \mathbf{N})$, $\lim_{z\to 0} \frac{z}{(z+1)^n - 1} = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$.♠

Zaoberajme sa teraz zloženou funkciou $g \circ f$.

:-) Predstavme si grafy funkcií g, f v podobe "šípka z bodu do funkčnej hodnoty" a funkciu $g\circ f$ ako "cestovanie s prestupom": z bodu $x \in D(f)$ nás funkcia f dopraví do bodu $f(x)$ a odtiaľ – ak $f(x) \in D(g)$, tj. ak $x \in D(g \circ f)$ – nás g dopraví do bodu $g(f(x))$. Nech $\lim_{x\to a} f(x) = b$ (tj. nech šípky začínajúce v bodoch $x \ne a$ stále bližších k a končia stále bližšie k bodu b). Ak chceme, aby $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)$ bola c, tj. aby nás funkcia $g\circ f$ z čísel $x \ne a$ čoraz bližších k a dopravila do čísel čoraz bližších k c (a vieme už, že "po prvej polovici cesty" (realizovanej funkciou f) sa z čísel $x \ne a$ blízkych k a dostaneme do čísel blízkych k b), tak vidíme, že potrebujeme, aby funkcia g z čísel čoraz bližších k b dopravovala do čísel čoraz bližších k c. Je teda prirodzené požadovať, aby $\lim_{y\to a} g(y) = c$.

Ak sa však – skôr než sa vydáme s funkciou $g \circ f$ na cesty z bodov $x \ne a$ blížiacich sa k a (pritom stále predpokladáme, že $\lim_{x\to a} f(x) = b$) – ešte raz zamyslíme, zistíme, že na to, aby sme pri našom cestovaní končili čoraz bližšie k c, nestačí len predpoklad $\lim_{y\to b} g(y) = c$ – ten totiž nekladie žiadnu podmienku na funkčnú hodnotu $g(b)$; v prípade $b \in D(g)$ teda nevieme, kam nás funkcia g z bodu b dopraví. Preto ak nechceme na ceste zažiť nečakané komplikácie, potrebujeme buď zabezpečiť, že pri cestovaní s funkciou $g \circ f$ nebudeme prechádzať cez bod b (to zaručuje predpoklad (a) alebo (b) z nasledujúcej vety) alebo – ak sa už ceste cez b nemožno vyhnúť – potrebujeme podmienku "pre $y \ne b$ blížiace sa k b sa $g(y)$ blíži k c" rozšíriť aj na $y = b$, čo je možné len pre $g(y) = c$ (čo je podmienka (c) z nasledujúcej vety). (-:

.17 Veta. *Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie $g \circ f$,* [19] *nech* $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{y\to b} g(y) = c \in \mathbf{R}^*$. *Ak je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok*

(a) $(\forall x \in D(f) \setminus \{a\})(f(x) \ne b)$;

(b) $b \notin D(g)$;

(c) $g(b) = c$; [20]

tak $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = c$.

[19] predpoklad, že a je hromadný bod množiny $D(g \circ f)$, nemožno vypustiť; tento fakt totiž vo všeobecnosti nemožno odvodiť z toho, že a je hromadný bod množiny $D(f)$ a b je hromadný bod množiny $D(g)$ (tieto dva predpoklady – ako sme si už zvykli – sú zahrnuté v požiadavke existencie limít $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{y\to b} g(y)$)

[20] samozrejme, že v tomto prípade musíme predpokladať $c \in \mathbf{R}$

Dôkaz. Chceme dokázať tvrdenie

$$\big(\forall O(c)\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x\in P(a)\cap D(g\circ f)\big)\big(g(f(x))\in O(c)\big) \tag{22}$$

Nech je teda dané okolie $O(c)$ bodu c, hľadajme okolie $P(a)$ požadovaných vlastností. K $O(c)$ existuje – pretože $\lim_{y\to b} g(y)=c$ – prstencové okolie $P(b)$ bodu b s vlastnosťou

$$y\in P(b)\cap D(g)\Rightarrow g(y)\in O(c)\ . \tag{23}$$

K okoliu $O(b):=P(b)\cup\{b\}$ existuje – keďže $\lim_{x\to a} f(x)=b$ – prstencové okolie $P(a)$ bodu a s vlastnosťou

$$x\in P(a)\cap D(f)\Rightarrow f(x)\in O(b)\ . \tag{24}$$

Pre $x\in D(g\circ f)$ je $f(x)\in D(g)$, z (24) preto vyplýva

$$x\in P(a)\cap D(g\circ f)\Rightarrow f(x)\in O(b)\cap D(g)\ . \tag{25}$$

:-) Potrebujeme dokázať implikáciu

$$x\in P(a)\cap D(g\circ f)\Rightarrow g(f(x)\in O(c)\ ;$$

to by sa dalo urobiť "spojením" (25) a (23), keby ovšem na pravej strane implikácie (25) stála namiesto množiny $O(b)\cap D(g)$ množina $P(b)\cap D(g)$ (alebo keby naopak na ľavej strane implikácie (23) bolo $O(b)\cap D(g)$, a nie $P(b)\cap D(g)$. (-:

Ak platí (a) alebo (b), tak z (25) vyplýva

$$x\in P(a)\cap D(g\circ f)\Rightarrow f(x)\in P(b)\cap D(g)\ ; \tag{26}$$

z (26) a (23) už vidno, že potom $P(a)$ má skutočne vlastnosť požadovanú v (22).

Ak je splnený predpoklad (c), tak z (23) vyplýva

$$y\in O(b)\cap D(g)\Rightarrow g(y)\in O(c) \tag{27}$$

a z (25) a (27) opäť vidno, že $P(a)$ je hľadané prstencové okolie.

Poznámka. 1. Z tvrdenia (b) lemy .11 vyplýva, že veta .17 zostane v platnosti, ak podmienku (a) nahradíme predpokladom

(a') *existuje prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a tak, že*

$$\big(\forall x\in\mathcal{P}\cap D(f)\big)\big(f(x)\neq b\big)\ .$$

$\big($Ak totiž označíme $f_1:=f|_{\mathcal{P}\cap D(f)}$, možno na funkcie f_1 a g aplikovať vetu .17 (f_1 spĺňa teraz predpoklad (a)), podľa ktorej $\lim_{x\to a}(g\circ f_1)(x)=c$. Pretože $g\circ f_1=(g\circ f)|_{\mathcal{P}\cap D(g\circ f)}$, platí podľa lemy .11(b) aj rovnosť $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=c.\big)$

2. V úvahách o limitách postupností viackrát použijeme tvrdenie *ak* $\lim_{n\to\infty} a_n=a\in\mathbf{R}^*$, *tak aj* $\lim_{n\to\infty} a_{n+k}=a$ (kde k je niektoré celé číslo), ktoré síce možno odvodiť z vety o limite zloženej funkcie, ale – vzhľadom na jeho jednoduchosť – za prirodzenejšie považujeme dokázať ho samostatne (čo ako zvyčajne prenechávame na čitateľa).

Príklad. Na vete .17 sa (okrem iného) zakladá použitie substitúcií pri hľadaní limít; predveďme to na výpočte limity $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}$ ($n\in\mathbf{N}$).

Skúsme (v snahe zbaviť sa odmocnín a v nádeji, že nám to nejak pomôže) položiť $y=\sqrt[n]{x}-1$; potom $\sqrt[n]{x}=y+1, x=(y+1)^n$ a limitovaný výraz zapísaný pomocou y má podobu $\frac{y}{(y+1)^n-1}$. Našu pôvodnú funkciu $h(x)=\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}$ môžeme teraz zapísať v tvare $h=g\circ f$, kde $f(x)=\sqrt[n]{x}, g(y)=\frac{y}{(y+1)^n-1}$. Pretože $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)=0$ (veta .12) a $\lim_{y\to0} g(y)=\frac{1}{n}$ (cvičenie .16), vyplýva z vety .17 (oprávnenie na jej použitie je dané splnením podmienky (a): funkcia f je totiž prostá a $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$) rovnosť $\lim_{x\to1} h(x)=\lim_{y\to0} g(y)$, tj.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}=\Big|\sqrt[n]{x}-1=y\Big|=\lim_{y\to0}\frac{y}{(y+1)^n-1}=\frac{1}{n}\ .$$

Teda použitím substitúcie $y=f(x)$ limitovanú funkciu h napíšeme v tvare $h=g\circ f$ a veta .17 nám potom (pokiaľ budeme oprávnení ju použiť) umožní previesť hľadanie limity funkcie $h=g\circ f$ na hľadanie limity vonkajšej zložky g.♠

Informácie o limite podielu dvoch funkcií z tvrdenia (d) vety .15 doplňme ešte nasledujúcim poznatkom.

.18 Veta. (a) *Nech* $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$. *Potom* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

(b) *Nech* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. *Ak funkcia* f *je nezáporná (nekladná) na niektorom prstencovom okolí* $\mathcal{P}$ *bodu* a *a bod* a *je hromadný bod množiny* $D(\frac{1}{f})$, *tak* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ $\left(\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty\right)$.

Dôkaz. (b) Dokážeme najprv, že $\lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$, tj. že

$$\left(\forall K \in \mathbf{R}\right)\left(\exists P(a)\right)\left(\forall x \in P(a) \cap D\left(\frac{1}{|f|}\right)\right)\left(\frac{1}{|f(x)|} > K\right) . \tag{28}$$

Zvoľme teda K a hľadajme príslušné prstencové okolie $P(a)$. Ak $K \le 0$, vyhovuje požiadavkám tvrdenia (28) každé prstencové okolie $P(a)$ $\left(\text{pre všetky } x \in D\left(\frac{1}{|f|}\right) \text{ totiž platí } \frac{1}{|f(x)|} > 0 \ge K\right)$.

Nech teraz $K > 0$. K číslu $\frac{1}{K}$ existuje (pretože $\lim_{x\to a} f(x) = 0$) prstencové okolie $P(a)$ tak, že

$$\left(\forall x \in P(a) \cap D(f)\right)\left(|f(x)| < \frac{1}{K}\right) .$$

Z tejto nerovnosti vyplýva

$$\left(\forall x \in P(a) \cap D\left(\frac{1}{f}\right)\right)\left(\frac{1}{|f(x)|} > K\right) ,$$

čo znamená, že $P(a)$ je prstencové okolie s vlastnosťou požadovanou v (28), a teda skutočne platí rovnosť $\lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$.$\triangle$

Teraz už ľahko dokážeme tvrdenie (b). Ak

$$\left(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(f)\right)\left(f(x) \ge 0\right) ,$$

možno použiť tvrdenie (b) lemy .11: funkcie $\frac{1}{f}$ a $\frac{1}{|f|}$ sa zhodujú na prstencovom okolí $\mathcal{P}$, preto $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$.

Ak

$$\left(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(f)\right)\left(f(x) \le 0\right) ,$$

tak sa na prstencovom okolí $\mathcal{P}$ zhodujú funkcie $\frac{1}{f}$ a $-\frac{1}{|f|}$, a preto platí $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to a}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right) = -\infty$ (prvá rovnosť vyplýva z lemy .11(b), druhá z lemy .13(f)).♠

Naším ďalším cieľom je dokázať analógiu tvrdení (a), (b) a (c) vety .15 pre prípad, že aspoň jedna z limít $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ je nevlastná.

.19 Lema. *Nech* M *je definičný obor funkcií* f, g. *Ak* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *a*

$$\left(\forall x \in M \setminus \{a\}\right)\left(f(x) \le g(x)\right) , \tag{29}$$

tak existuje aj $\lim_{x\to a} g(x)$ *a rovná sa* ∞.

Dôkaz. Realizáciu elementárneho dôkazu, založeného na úvahe *ak pre* $x \in P(a) \cap M$ *platí* $f(x) > K$, *tak z (29) vyplýva, že pre tie isté* x *platí aj* $g(x) > K$, prenechávame čitateľovi.

Poznámka. 1. Z časti (b) lemy .11 vyplýva – podobne ako už viackrát predtým – že tvrdenie predchádzajúcej lemy zostane v platnosti, ak podmienku (29) nahradíme podmienkou

$$\left(\forall x \in \mathcal{P} \cap M\right)\left(f(x) \le g(x)\right) ,$$

kde $\mathcal{P}$ je niektoré prstencové okolie bodu a.

2. Čitateľovi by nemalo robiť ťažkosti dokázať (buď kopírovaním dôkazu lemy .19 alebo aplikáciou jej tvrdenia na funkcie $-f, -g$) toto tvrdenie:

Nech M *je definičný obor funkcií* f, g. *Ak* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ *a* $\left(\forall x \in \mathcal{P} \cap M\right)\left(f(x) \ge g(x)\right)$ – *kde* $\mathcal{P}$ *je niektoré prstencové okolie bodu* a – *tak* $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$.

.20 Veta. *Nech funkcie f, g sú definované na množine M.*

(a) *Ak* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *a funkcia g je zdola ohraničená na niektorom prstencovom okolí $\mathcal{P}$ bodu a, tak* $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \infty$.

(b) *Ak* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *a funkcia g je na niektorom prstencovom okolí $\mathcal{P}$ bodu a zdola ohraničená kladnou konštantou, tak* $\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = \infty$.

Dôkaz. (b) Nech $k > 0$ je číslo také, že

$$\big(\forall x \in \mathcal{P}\cap M\big)\big(g(x) > k > 0\big) \tag{30}$$

Pretože $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, existuje podľa tvrdenia (b) lemy .11 prstencové okolie $\mathcal{S}$ bodu a tak, že

$$\big(\forall x \in \mathcal{S}\cap M\big)\big(f(x) > 0\big)\ . \tag{31}$$

Potom $\mathcal{R} := \mathcal{P}\cap\mathcal{S}$ je prstencové okolie bodu a (lema .8(a)) také, že pre $x \in \mathcal{R}\cap M$ platia nerovnosti $g(x) > k$ a $f(x) > 0$ súčasne $\big($prvá z nich vyplýva z inklúzie $\mathcal{R}\cap M \subset \mathcal{P}\cap M$ a z (30), druhá z inklúzie $\mathcal{R}\cap M \subset \mathcal{S}\cap M$ a (31)$\big)$. Jednoduchá úvaha *ak $g(x) > k$ a $f(x) > 0$, tak $f(x)g(x) > k\cdot f(x)$* potom implikuje

$$\big(\forall x \in \mathcal{R}\cap M\big)\big(f(x)g(x) > k\cdot f(x)\big)\ . \tag{32}$$

Teraz je už všetko dostatočne pripravené na použitie tvrdenia z poznámky za lemou .19: pretože $\lim_{x\to a}\big(k\cdot f(x)\big) = \infty$ (lema .13(d)); vyplýva z nerovnosti (32), že $\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = \infty$, čo sme chceli dokázať.$\triangle$

Z práve dokázanej vety možno odvodiť ďalšie "pravidlá pre počítanie s nevlastnými limitami", ktoré zapíšeme v nasledujúcej symbolickej podobe:

$$\left.\begin{array}{ccc}
\infty + b = \infty & \infty\cdot b = \infty \quad \text{pre} \quad b > 0 & \infty\cdot\infty = \infty \\
-\infty + b = -\infty & \infty\cdot b = -\infty \quad \text{pre} \quad b < 0 & \infty\cdot(-\infty) = -\infty \\
\infty + \infty = \infty & (-\infty)\cdot b = -\infty \quad \text{pre} \quad b > 0 & (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty \\
-\infty - \infty = -\infty & (-\infty)\cdot b = \infty \quad \text{pre} \quad b < 0 &
\end{array}\right\} \tag{33}$$

Pritom napr. zápis $\infty\cdot b = \infty$ *pre* $b > 0$ tu chápeme ako symbolickú skratku tvrdenia

Nech funkcie f, g sú definované na množine M, nech $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = b > 0$. *Potom* $\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = \infty$.

Nasledujúci dôkaz tohto tvrdenia je príkladom úvah, ktorými možno dokázať výroky obsiahnuté v (33).

Keďže $\lim_{x\to a} g(x) = b > 0$, je funkcia g v niektorom prstencovom okolí $\mathcal{P}$ bodu a zdola ohraničená kladnou konštantou (lema .10(b)), z vety .20 potom vyplýva $\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = \infty$.$\triangle$

Zvyšné tvrdenia obsiahnuté v strednom stĺpci (33) môžeme dokázať podobne alebo ich odvodiť z práve dokázaného použitím lemy .13(f) (obtiažnosť je v obidvoch prípadoch rovnaká, tj. žiadna). Dokumentujme stručne druhý z navrhnutých postupov na dôkaze pravidla $\infty\cdot b = -\infty$ *pre* $b < 0$. Nech $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = b < 0$. Keďže $\lim_{x\to a}\big(-g(x)\big) = -b > 0$, platí $\lim_{x\to a}\big(-f(x)g(x)\big) = \lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot(-g(x))\big) = \infty$ (prvá rovnosť by mala byť zrejmá, druhá vyplýva z už dokázaného tvrdenia $\infty\cdot b = \infty$ *pre* $b > 0$), podľa .13(f) je potom $\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = -\infty$.

.21 Cvičenie. Dokážte rovnosti $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } n \text{ párne} \\ -\infty & \text{pre } n \text{ nepárne} \end{cases}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n} = 0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n} = 0$ $(n \in \mathbf{N})$.

.22 Neurčité výrazy. Limita $\frac{1}{0}$. Ak teraz urobíme dôkladnú inventúru, zistíme, že naša zbierka viet o výpočte limít funkcií $f \pm g, fg, \frac{f}{g}$ pomocou limít funkcií f, g nie je kompletná – nedoriešili sme úplne prípad $\frac{1}{0}$ ("nakúsnutý" vo vete .18(b)) a nevyslovili sme žiadne všeobecné tvrdenia o limitách typu $\infty-\infty, 0\cdot\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ [21] (v tomto zozname chýbajúcich tvrdení vedome neuvádzame typy $0\cdot(-\infty), \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}$

[21] čitateľovi je iste jasné, že napr. pod *limitou typu* $\frac{r}{s}$ (kde $r, s \in \mathbf{R}^*$) rozumieme limitu funkcie $\frac{f}{g}$ takej, že $\lim_{x\to a} f(x) = r, \lim_{x\to a} g(x) = s$

a $\frac{-\infty}{-\infty}$, keďže skúmanie každého z nich možno použitím lemy .13(f) previesť na skúmanie prípadu $0\cdot\infty$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$).

Dokončime najprv náš rozbor prípadu $\frac{1}{0}$, tj. hľadania $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}$ za predpokladu $\lim_{x\to a} f(x)=0$. Ak a je hromadný bod množiny $D\left(\frac{1}{f}\right)$ (inak by o limite funkcie $\frac{1}{f}$ v bode a nemalo ani zmysel uvažovať), nastane práve jedna z troch možností [22]

- funkcia f je nezáporná v niektorom prstencovom okolí bodu a;
- funkcia f je nekladná v niektorom prstencovom okolí bodu a;
- v každom prstencovom okolí bodu a nadobúda funkcia f kladné aj záporné hodnoty.

V prvom z týchto prípadov – ako už vieme – platí (veta .18(b)) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, v druhom $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$. Dokážeme, že $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje, ak nastane tretí prípad; vtedy je totiž číslo a hromadným bodom množiny $M_1:=\{x\in D(f)\ ;\ f(x)>0\}$ aj množiny $M_2:=\{x\in D(f)\ ;\ f(x)<0\}$. Pre $f_1:=f|_{M_1}$ potom platí $\lim_{x\to a} f_1(x)=0$ (lema .11(a)) a $\big(\forall x\in D(f_1)\big)\big(f_1(x)>0\big)$, preto podľa vety .18(b) je $\lim_{x\to a}\frac{1}{f_1(x)}=\infty$; pre funkciu $f_2:=f|_{M_2}$ ale z analogických úvah dostávame $\lim_{x\to a}\frac{1}{f_2(x)}=-\infty$. Z lemy .11(c) potom vyplýva, že limita $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}$ nemôže existovať.$\triangle$

Vráťme sa teraz k prípadom $\infty-\infty, 0\cdot\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Nasledujúce (prudko elementárne) príklady ukazujú (po doplnení čitateľom), že nemôže existovať žiadne všeobecné tvrdenie, ktoré by umožňovalo nájsť limitu typu $\infty-\infty, 0\cdot\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ <u>*len*</u> na základe znalostí limít $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$; preto sa limity uvedených typov niekedy nazývajú *neurčité výrazy.*

Začnime prípadom $\infty-\infty$, limity v nasledujúcej tabuľke uvažujeme v bode $a=\infty$.

funkcia f	funkcia g	$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-g(x)\big)$
$f(x)=x^2$	$g(x)=x$	∞
$f(x)=x$	$g(x)=x^2$	$-\infty$
$f(x)=x+b$	$g(x)=x$	$b\in\mathbf{R}$
$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{ak } x\in\mathbf{Q}\\ x, & \text{ak } x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$	$g(x)=x$	neexistuje

(34)

Presvedčme sa, že funkcia f v poslednom riadku prvého stĺpca tejto tabuľky má skutočne v bode ∞ limitu ∞ (u ostatných funkcií z prvých dvoch stĺpcov by to malo byť zrejmé): pretože pre všetky $x\ge 1$ je $x^2\ge x$, platí pre všetky x z intervalu $(1,\infty)$ (ktorý je prstencovým okolím bodu ∞) nerovnosť $f(x)\ge x$, z lemy .19 (a z poznámky za ňou) potom vyplýva rovnosť $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

Preverme ešte správnosť údajov v poslednom stĺpci:

- $\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to\infty}\big(x(x-1)\big)=\infty$, posledná rovnosť vyplýva z pravidla $\infty\cdot\infty=\infty$ z (33), keďže $\lim_{x\to\infty} x=\lim_{x\to\infty}(x-1)=\infty$;
- z práve dokázaného a z lemy .13(f) vyplýva $\lim_{x\to\infty}(x-x^2)=-\infty$;
- overovanie tvrdenia ďalšieho riadku je pod našu dôstojnosť;
- neexistencia limity $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-g(x)\big)$ v poslednom riadku vyplýva z lemy .11(c): pre $x\in\mathbf{Q}$ je $f(x)-g(x)=x^2-x$, teda pre $f_1:=(f-g)|_{\mathbf{Q}}$ je $\lim_{x\to\infty} f_1(x)=\infty$ [23]; pre $x\notin\mathbf{Q}$ je $f(x)-g(x)\equiv 0$, teda pre $f_2:=(f-g)|_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}$ je $\lim_{x\to\infty} f_2(x)=0$, podľa lemy .11(c) teda $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-g(x)\big)$ nemôže existovať. $\triangle$

Uveďme ešte príklady pre prípad $0\cdot\infty$, všetky limity v nasledujúcej tabuľke opäť uvažujeme v bode $a=\infty$.

funkcia f	funkcia g	$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)g(x)\big)$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$g(x)=x^2$	∞
$f(x)=-\frac{1}{x}$	$g(x)=x^2$	$-\infty$
$f(x)=\frac{b}{x}$	$g(x)=x$	$b\in\mathbf{R}$
$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ak } x\in\mathbf{Q}\setminus\{0\}\\ \frac{1}{x^2}, & \text{ak } x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$	$g(x)=x$	neexistuje

(35)

[22] treba si uvedomiť, že dôkaz faktu, že nemôže súčasne nastať prvá aj druhá z nasledujúcich možností, je založený práve na predpoklade *a je hromadný bod množiny* $D\left(\frac{1}{f}\right)$

[23] doplňme podrobné zdôvodnenie (ktoré už v prípade funkcie f_2 prenecháme na čitateľa): rovnosť $\lim_{x\to\infty} f_1(x)=\infty$ vyplýva z už dokázanej rovnosti $\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\infty$ a lemy .11(a)

Preverenie správnosti údajov tejto tabuľky už prenechávame na čitateľa (napovieme len, že rovnosť $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, kde f je funkcia z posledného riadku prvého stĺpca, vyplýva na základe vety .18(a) z rovnosti $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \infty$, ktorú sme dokázali v súvislosti s predchádzajúcou tabuľkou [24]) rovnako ako vymýšľanie podobných tabuliek pre prípady $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. K prípadu $\frac{\infty}{\infty}$ ešte jedno upozornenie: pokusy vymyslieť dvojicu funkcií f, g definovaných na M tak, aby $\lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to a} g(x)$ a $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ bola záporná alebo $-\infty$, sú beznádejné. Z lemy .10(c) by potom totiž vyplývalo, že funkcia $\frac{f}{g}$ nadobúda v niektorom prstencovom okolí P_1 bodu a len záporné hodnoty, zatiaľčo z predpokladov $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ by podľa lemy .10(b) súčasne vyplývalo, že v niektorom prstencovom okolí P_2, resp. P_3, bodu a nadobúda funkcia f, resp. funkcia g, len kladné hodnoty. Pre prvky neprázdnej množiny $P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap M$ by potom museli súčasne platiť nerovnosti $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ a $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, čo zrejme nie je možné.♠

Na záver tohto odseku venujme ešte trocha miesta otázke existencie limity súčtu, resp. súčinu v prípade, že $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbf{R}^*$ a $\lim_{x\to a} g(x)$ neexistuje.

Pokiaľ $b \in \mathbf{R}$, dáva odpoveď (úplnú pre prípad súčtu a čiastočnú pre prípad súčinu) nasledujúca lema.

.23 Lema. *Nech funkcie f a g sú definované na množine M, nech $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbf{R}$. Potom*
(a) $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ *existuje práve vtedy, keď existuje* $\lim_{x\to a} g(x)$*;*
(b) $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ *existuje práve vtedy, keď existuje* $\lim_{x\to a} g(x)$*.*

Dôkaz. (a) Implikácia "$\Leftarrow$" je v prípade konečnej $\lim_{x\to a} g(x)$ obsahom tvrdenia (a) vety .15, v prípade nekonečnej $\lim_{x\to a} g(x)$ vyplýva z prvých dvoch tvrdení prvého stĺpca tabuľky (33). Implikácia "$\Rightarrow$" je rovnako elementárna: ak existuje $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) =: r \in \mathbf{R}^*$ a konečná $\lim_{x\to a} f(x)$, tak z rovnosti $g = (f + g) - f$ vyplýva existencia limity $\lim_{x\to a} g(x)$ na základe .15(b) (pre prípad $r \in \mathbf{R}$), resp. podľa prvých dvoch tvrdení [25] v prvom stĺpci tabuľky (33) (pre prípady $r = \infty$ a $r = -\infty$).

Poznámka. Tvrdenie (a) predchádzajúcej lemy možno zrejme ešte doplniť informáciou, že $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big), \lim_{x\to a} g(x)$ – pokiaľ existujú – sú buď obidve ∞ alebo obidve $-\infty$ alebo obidve konečné. Podobne možno doplniť tvrdenie (b) poznatkom (nie veľmi prekvapujúcim), že pokiaľ limity $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big), \lim_{x\to a} g(x)$ existujú, sú buď obidve nevlastné alebo obidve konečné.△

Postačujúce podmienky existencie limity $\lim_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$, resp. $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ v prípade, že jedna z funkcií f, g nemá v bode a limitu, sú sformulované vo vetách .14 a .20.

Príklady z tabuľky (35) ukazujú, že pokiaľ $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} g(x)$ síce existuje, ale funkcia g nespĺňa predpoklady vety .14 (čo – ako vyplýva z lemy .10(a) – je možné len v prípade, že $\lim_{x\to a} g(x)$ je nevlastná), nemožno už vo všeobecnosti o existencii limity $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ nič povedať. (Podobne súvisia príklady z tabuľky (35) s vetou .20(a).)

Len pre zaujímavosť (pre naše ďalšie úvahy to totiž nemá nejaký veľký význam) uveďme ešte príklady ukazujúce, že rozhodnúť vo všeobecnosti o existencii či neexistencii limity $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ nemožno ani v prípade, že $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, funkcia g nespĺňa predpoklady vety .14 a $\lim_{x\to a} g(x)$ neexistuje. Položme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

a za g postupne voľme funkcie

$$g_1(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \\ -x^3, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}, \; g_2(x) = -g_1(x), \; g_3(x) = \begin{cases} bx^2, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \\ -bx^2, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \end{cases},$$

$$g_4(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \\ -x, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}, \; g_5(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{ak } x \in \mathbf{Q} \\ bx^2, & \text{ak } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

(v prípade funkcie g_3 predpokladáme $b \neq 0$, v prípade g_5 nech $a > 0 > b$); z tvrdenia lemy .11(d) vyplýva, že ani jedna z funkcií g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 nemá v bode ∞ limitu. Platí ale $\lim_{x\to a} \big(f(x)g_1(x)\big) = \infty, \lim_{x\to a} \big(f(x)g_2(x)\big) = -\infty, \lim_{x\to a} \big(f(x)g_3(x)\big) = b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \lim_{x\to a} \big(f(x)g_4(x)\big) = 0$ a $\lim_{x\to a} \big(f(x)g_5(x)\big)$ neexistuje [26].

[24] prezradíme ešte viac: naša funkcia $\frac{1}{f}$ sa na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ zhoduje s funkciou v poslednom riadku prvého stĺpca tabuľky (34)

[25] a keď chceme byť úplne (ubíjajúco) podrobní, tak ešte aj podľa tvrdenia (b) lemy .13, umožňujúceho previesť limitu rozdielu na limitu súčtu

[26] Čitateľ nech sa nedá klamať tým, že pri tvorbe našich príkladov sa kŕčovite pridržiavame schémy "$f(x)$= niečo pre $x \in \mathbf{Q}$ a niečo iné pre $x \notin \mathbf{Q}$". V uvedených príkladoch by sme namiesto $x \in \mathbf{Q}, x \notin \mathbf{Q}$ mohli písať napr. $x \in \mathbf{N}$ *je párne*, $x \in \mathbf{N}$ *je nepárne* (tj. uvádzať príklady postupností, lebo aj to sú funkcie) alebo $[x]$ *je párna*, $[x]$ *je nepárna* (kde $[.]$ označuje celú časť) alebo aj horšie veci, ale také, ktoré nám umožňujú použiť tvrdenia (c) a (d) lemy .11.

Čitateľ sa sám môže presvedčiť, že podobná situácia nastane aj v prípade vety .20.

3 O nerovnostiach a limitách

Aby sme sprehľadnili zápis nasledujúcej vety, označme znakom $\prec$ usporiadanie na $\mathbf{R}^*$, ktoré vznikne prirodzeným rozšírením usporiadania $<$ definovaného na $\mathbf{R}$; tj. pre $a, b \in \mathbf{R}$ je $a \prec b$ práve vtedy, keď $a < b$, a naviac platí $-\infty \prec a \prec \infty$ pre každé $a \in \mathbf{R}$.

.24 Veta. *Nech funkcie f, g sú definované na množine M. Ak existujú limity $\lim_{x\to a} f(x) =: r \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x\to a} g(x) := s \in \mathbf{R}^*$ a pre niektoré prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a platí*

$$\big(\forall x \in \mathcal{P} \cap M\big)\big(f(x) \le g(x)\big) , \tag{36}$$

tak platí aj nerovnosť

$$r \preceq s , \quad tj. \quad \lim_{x\to a} f(x) \preceq \lim_{x\to a} g(x) .$$

Dôkaz. Sporom; predpokladajme, že $r \succ s$. Potom existujú okolie $O(r)$ bodu r a okolie $O(s)$ bodu s s vlastnosťou

$$y \in O(r) \wedge z \in O(s) \Rightarrow y > z \tag{37}$$

(tj. $O(r)$ a $O(s)$ sú disjunktné množiny a $O(r)$ "leží vpravo" od množiny $O(s)$).

Pretože $\lim_{x\to a} f(x) = r$, existuje k okoliu $O(r)$ z (37) prstencové okolie $P_1(a)$ bodu a s vlastnosťou

$$x \in P_1(a) \cap M \Rightarrow f(x) \in O(r) ; \tag{38}$$

podobne k okoliu $O(s)$ z (37) existuje prstencové okolie $P_2(a)$ bodu a, pre ktoré platí

$$x \in P_2(a) \cap M \Rightarrow g(x) \in O(s) . \tag{39}$$

Pretože pre ľubovoľný prvok x neprázdnej množiny $A := \mathcal{P} \cap P_1(a) \cap P_2(a) \cap M$ platí súčasne $x \in P_1(a) \cap M$ aj $x \in P_2(a) \cap M$, z (38) a (39) vyplýva

$$\big(\forall x \in A\big)\big(f(x) \in O(r) \wedge g(x) \in O(s)\big) ,$$

z (37) potom dostávame

$$\big(\forall x \in A\big)\big(f(x) > g(x)\big) . \tag{40}$$

Súčasne ale $A \subset \mathcal{P} \cap M$ a z (36) teda vyplýva

$$\big(\forall x \in \mathcal{P} \cap P_1(a) \cap P_2(a) \cap M\big)\big(f(x) < g(x)\big) ,$$

čo – keďže $A \neq \emptyset$ – je spor s (40).

Poznámka. Jednoduchý príklad $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ – kedy platí $\big(\forall x \in (0,\infty)\big)\big(f(x) < g(x)\big)$, ale $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ – ukazuje, že pokiaľ v predpoklade (36) nahradíme neostrú nerovnosť $\le$ ostrou nerovnosťou $<$, nemusí odtiaľ ešte vyplývať, že aj nerovnosť medzi limitami by sa musela zmeniť na ostrú.♠

Lema .19 ukazuje, že v práve dokázanom tvrdení možno v prípade $r = \infty$ predpoklad existencie limity $\lim_{x\to a} g(x)$ vypustiť (podobne možno podľa poznámky za lemou .19 vypustiť predpoklad existencie limity $\lim_{x\to a} f(x)$ v prípade $s = -\infty$). Analógiou tejto lemy pre prípad konečných limít je nasledujúca veta.

.25 Veta. *Nech funkcie f, g, h sú definované na množine M. Ak $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b \in \mathbf{R}$ a pre niektoré prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a platí*

$$\big(\forall x \in \mathcal{P} \cap M\big)\big(f(x) \le g(x) \le h(x)\big) ,$$

tak existuje aj $\lim_{x\to a} g(x)$ a rovná sa b.

Dôkaz. [27] Označme $F := h - f, G := h - g$, z predpokladov našej vety potom dostávame $\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} h(x) - \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (veta .15(b)) a

$$\big(\forall x \in \mathcal{P} \cap M\big)\big(0 \le G(x) \le F(x)\big) . \tag{41}$$

Teraz stačí dokázať rovnosť $\lim_{x\to a} G(x) = 0$, pretože z existencie konečných limít $\lim_{x\to a} G(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} h(x) = b$ bude podľa vety .15(a) vyplývať rovnosť $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} \big(G(x) + h(x)\big) = b$, ktorú sme chceli dokázať.

Chceme teda dokázať výrok

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in P(a) \cap M\big)\big(|G(x)| < \varepsilon\big) . \tag{42}$$

Keďže $\lim_{x\to a} F(x) = 0$, existuje k okoliu $O_\varepsilon(0)$ bodu 0 prstencové okolie $P_1(a)$ bodu a s vlastnosťou

$$\big(\forall x \in P_1(a) \cap M\big)\big(|F(x)| < \varepsilon\big) . \tag{43}$$

Čitateľ teraz na základe (41) a (43) ľahko overí, že prstencové okolie $P(a) := P_1(a) \cap \mathcal{P}$ má vlastnosť požadovanú v (42).

.26 Príklad (klasický [28]). *Ak $a > 0$, tak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.*

Riešenie. Pre $a = 1$ je tvrdenie zrejme pravdivé [29]. Predpokladajme teraz $a > 1$. Potom $\sqrt[n]{a} > 1$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ (to vyplýva z tvrdenia *ak $b \in [0,1]$, tak $\big(\forall n \in \mathbf{N}\big)\big(b^n \le 1\big)$*, ktoré možno dokázať indukciou), a existuje teda nezáporná postupnosť $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ definovaná rovnosťou

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \omega_n . \tag{44}$$

Potom

$$a = (1 + \omega_n)^n = 1 + n\omega_n + \binom{n}{2}\omega_n^2 + \cdots + \omega_n^n . \tag{45}$$

Z nerovnosti $\omega_n \ge 0$ potom vyplýva, že pravá strana rovnosti (45) sa vynechaním členov $\binom{n}{2}\omega_n^2, \ldots \omega_n^n$ nemôže zväčšiť, preto

$$a \ge 1 + n\omega ,$$

a teda

$$0 \le \omega_n \le \frac{a-1}{n} .$$

Keďže $\lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$, vyplýva z vety .25 (v ktorej položíme $M = \mathbf{N}, f(n) \equiv 0, g(n) = \omega_n, h(n) = \frac{a-1}{n}$) rovnosť $\lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$ a z (44) dostávame (veta .15(a))

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1 + \omega_n) = 1 + \lim_{n\to\infty} \omega_n = 1 .$$

Zostáva dokázať naše tvrdenie pre prípad $a \in (0,1)$. Označme $b := \frac{1}{a}$. Potom $b > 1$ a podľa už dokázaného je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Z rovnosti $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ potom podľa vety .15(c) vyplýva

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1 .$$

[27] ako uvidíme, tento dôkaz bude opäť názorným príkladom dokazovania všeobecnejšieho tvrdenia pomocou niektorého jeho špeciálneho prípadu

[28] ak ho v niektorej učebnici diferenciálneho počtu nenájdete, je to dôvod na vyšetrovanie, prečo tam nie je a ako sa bez neho autor zaobišiel

[29] nedôverčivý čitateľ môže zvrat *je zrejme pravdivé* nahradiť slovami *vyplýva z lemy .13(a) a lemy .11(a)*

4 Limity monotónnych funkcií

:-) Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca zhora ohraničená postupnosť, označme $b := \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n$. Ak čísla a_n budeme postupne zakresľovať na číselnú os, tak každé nasledujúce bude ležať napravo od všetkých už zakreslených a naľavo od b (tj. pre rastúce n budú čísla a_n postupovať doprava, ale neprekročia b). Ak si teraz zvolíme $\varepsilon > 0$, musí niektoré z čísel a_n ležať v intervale $(b-\varepsilon, b]$ (pretože inak by b nebolo suprémom), nech je to a_N. Potom všetky za ním nasledujúce členy postupnosti už tiež ležia v tomto intervale, pretože ležia napravo od a_N a naľavo od b (teda akonáhle čísla a_n pri svojom pochode vpravo vstúpia do intervalu $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ – a raz tam vstúpiť musia, keďže $b = \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n$ – tak tam už zostanú). Z týchto úvah ale vyplýva, že b je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Všeobecnejšej formulácii uvedeného faktu a jeho dôsledkom je venovaný tento odsek. (-:

.27 Definícia. Nech f je funkcia definovaná na M. Ak bod $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ je hromadný bod množiny $M_+ := M \cap (a, \infty)$ a existuje $\lim_{x\to a} f_1(x) =: b \in \mathbf{R}^*$, kde $f_1 := f|_{M_+}$, nazýva sa číslo b *limita funkcia f v bode a sprava* a označuje sa $\lim_{x\to a+} f(x)$.

Definíciu *limity funkcie f v bode a zľava* (ktorú označujeme $\lim_{x\to a-} f(x)$) dostaneme, ak v práve uvedenej definícii nahradíme predpoklad $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ inklúziou $a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, množinu M_+ množinou $M_- := M \cap (-\infty, a)$ a funkciu f_1 funkciou $f_2 := f|_{M_-}$.

Limity sprava a zľava sa súhrnne označujú ako *jednostranné limity.*

Poznámka. Zrejme pre $a = \infty$ sú pojmy $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a-} f(x)$ totožné (podobne pre $a = -\infty$ pojmy $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a+} f(x)$). Všeobecnejšie, ak $M \cap (-\infty, a) = M$, tak pojmy $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a-} f(x)$ splývajú (obdobná poznámka sa vzťahuje na limity sprava).♠

Keďže $M_+ \cup M_- = D(f) \setminus \{a\}$, je nasledujúce tvrdenie dôsledkom častí (a) a (d) lemy .11 (a poznámky 2 za ňou).

.28 Lema. *Nech funkcia f je definovaná na množine M a bod $a \in \mathbf{R}$ je hromadný bod množín $M_+ := M \cap (a, \infty)$, $M_- := M \cap (-\infty, a)$. Potom $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje práve vtedy, keď v bode a existujú obidve jednostranné limity funkcie f a rovnajú sa. Limitou funkcie f v bode a je v takom prípade spoločná hodnota jednostranných limít.*♠

Skôr ako vyslovíme nasledujúce tvrdenie, zastavme sa ešte pri jednej drobnosti. Výrok $\lim_{x\to a-} f(x) = b$ ($a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}, b \in \mathbf{R}^*$) hovorí, že

$$\big(\forall O(b)\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x \in D(f)\big)\big(x \in P(a) \cap (-\infty, a) \Rightarrow f(x) \in O(b)\big)\ . \tag{46}$$

Tento všeobecný zápis možno opäť v jednotlivých prípadoch nahradiť konkrétnejším; napr. pre $a, b \in R$ zápisom

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)\big(a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\big)$$

alebo pre $a \in \mathbf{R}, b = \infty$ zápisom

$$\big(\forall K \in \mathbf{R}\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)\big(a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > K\big)\ .$$

Pre potreby nasledujúceho dôkazu podobu výroku (46), ktorá je na náš vkus už priveľmi zaľudnená symbolmi, trochu zjednodušíme. Keďže $P(a) \cap (-\infty, a)$ je interval, ktorý (ak považujeme a za dané) je jednoznačne určený svojím ľavým koncovým bodom ξ, možno (46) prepísať do podoby

$$\big(\forall O(b)\big)\big(\exists\xi < a\big)\big(\forall x \in D(f)\big)\big(\xi < x < a \Rightarrow f(x) \in O(b)\big)\ . \tag{47}$$

.29 Veta. *Ak f je monotónna funkcia definovaná na M a $a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ je hromadný bod množiny $M_- := M \cap (-\infty, a)$, tak existuje $\lim_{x\to a-} f(x)$. Pritom platí*

(a) *ak f je neklesajúca a na množine M_- zhora ohraničená, tak*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \sup_{x\in M_-} f(x)\ ;$$

(b) *ak f je neklesajúca a na množine M_- zhora neohraničená, tak*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \infty\ ;$$

(c) *ak f je nerastúca a na množine M_- zdola ohraničená, tak*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \inf_{x\in M_-} f(x) ;$$

(d) *ak f je nerastúca a na množine M_- zdola neohraničená, tak*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty .$$

Dôkaz. (a) Označme $b := \sup_{x\in M_-} f(x)$. Chceme dokázať, že $\lim_{x\to a-} f(x) = b$, tj. (pozri (47)), že

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\xi < a\big)\big(\forall x \in M\big)\big(\xi < x < a \Rightarrow b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon\big) \tag{48}$$

(pre istotu vysvetlime, že okolie $O(b)$ sme popísali jeho polomerom ε a inklúzia $f(x) \in O(b)$ získala tak podobu $b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$).

Nech je teda dané $\varepsilon > 0$, hľadajme ξ s uvedenou vlastnosťou. Keďže $b = \sup_{x\in M_-} f(x)$, vyplýva z definície supréma funkcie, že k nášmu $\varepsilon > 0$ existuje $\xi \in M_-$ tak, že $f(\xi) > b-\varepsilon$. Ukážeme, že toto ξ vyhovuje našim požiadavkám:

Keďže $\xi \in M_-$, je zrejme $\xi < a$. Pretože funkcia f je neklesajúca, platí

$$\big(\forall x \in M\big)\big(\xi < x \Rightarrow f(\xi) < f(x)\big)$$

z nerovnosti $f(\xi) > b-\varepsilon$ potom dostávame

$$\big(\forall x \in M\big)\big(\xi < x \Rightarrow b-\varepsilon < f(x)\big) . \tag{49}$$

Na druhej strane, z rovnosti $b = \sup_{x\in M_-} f(x)$ vyplýva $\big(\forall x \in M_-\big)\big(f(x) \le b\big)$, čo môžeme zapísať v podobe

$$\big(\forall x \in M\big)\big(x < a \Rightarrow f(x) \le b\big) \tag{50}$$

Z (49) a (50) vyplýva

$$\big(\forall x \in M\big)\big(\xi < x < a \Rightarrow b-\varepsilon < f(x) \le b\big) ,$$

odkiaľ už vidno, že ξ spĺňa dokonca trochu viac, než požaduje (48).$\triangle$

Dôkaz tvrdenia (b) je obdobný a prenechávame ho na čitateľa; pripomeňme len, že treba dokázať

$$\big(\forall K \in \mathbf{R}\big)\big(\exists\xi < a\big)\big(\forall x \in M\big)\big(\xi < x < a \Rightarrow f(x) > K\big)$$

a že výrok *funkcia f je na M_- zhora neohraničená* možno zapísať v podobe

$$\big(\forall K \in \mathbf{R}\big)\big(\exists\xi \in M_-\big)\big(f(\xi) > K\big)$$

(tú sme získali negáciou výroku $\big(\exists K \in \mathbf{R}\big)\big(\forall x \in M_-\big)\big(f(x) \le K\big)$, ktorý hovorí, že f je na M_- zhora ohraničená). $\triangle$

Tvrdenie (c) (ktoré možno samozrejme dokázať skopírovaním dôkazu použitého v prípade (a)) odvodíme z (a). Ak f je nerastúca a na množine M_- ohraničená zdola, tak funkcia $-f$ je neklesajúca a na M_- ohraničená zhora. Podľa tvrdenia (a) teda existuje $\lim_{x\to a-}\big(-f(x)\big)$ a platí $\lim_{x\to a-}\big(-f(x)\big) = \sup_{x\in M_-}\big(-f(x)\big)$.

Náš dôkaz bude hotový, ak ukážeme, že môžeme použiť vetu .15(c), podľa nej bude totiž z existencie $\lim_{x\to a-}\big(-f(x)\big)$ vyplývať existencia $\lim_{x\to a-} f(x)$ a bude platiť

$$\lim_{x\to a-} f(x) = -\lim_{x\to a-}\big(-f(x)\big) = -\sup_{x\in M_-}\big(-f(x)\big) = \inf_{x\in M_-} f(x) .$$

Chceme teda preveriť platnosť prvej z uvedených rovností [30]. Podľa definície limity zľava je $\lim_{x\to a-} f(x) := \lim_{x\to a} f_1(x)$, kde $f_1 := f|_{M_-}$. Na funkciu f_1 už tvrdenie vety .15(c) môžeme použiť, preto $\lim_{x\to a} f_1(x) = -\lim_{x\to a}\big(-f_1(x)\big)$, ale, opäť podľa definície limity zľava, $\lim_{x\to a}\big(-f_1(x)\big) = \lim_{x\to a-}\big(-f(x)\big)$.

[30] nasledujúce (pomerne rozvláčne) zdôvodnenie predstavuje všeobecný návod, ako prenášať tvrdenia o limitách na jednostranné limity

Tým je rovnosť $\lim_{x\to a-} f(x) = -\lim_{x\to a-}\big(-f(x)\big)$, a teda aj rovnosť $\lim_{x\to a-} f(x) = \inf_{x\in M_-} f(x)$, dokázaná.$\triangle$

Tvrdenie (d) možno podobne odvodiť z tvrdenia (b).

Poznámka. 1. V prípade (b) z predpokladov *f je neklesajúca na M a je zhora neohraničená na M_-* vyplýva, že $M = M_-$ (sporom; keby funkcia f bola definovaná ešte v niektorom bode $\alpha \geq a$, vyplývala by z faktu, že f je neklesajúca, nerovnosť $\big(\forall x \in M_-\big)\big(f(x) \leq f(\alpha)\big)$, čo by bolo v spore s predpokladom, že f je na M_- zhora neohraničená).

2. Z rovnakých úvah vyplýva: ak f je monotónna na M a $M_- \neq M$ (tj. $M_- \overset{\subset}{\neq} M$), tak funkcia f spĺňa predpoklady bodu (b) alebo (d) (teda f je buď neklesajúca a na M_- zhora ohraničená, alebo je nerastúca a na M_- zdola ohraničená).$\spadesuit$

Nasledujúcu analógiu vety .29 možno dokázať rovnakým postupom alebo ju z tejto vety odvodiť (my uprednostníme druhý prístup).

.30 Dôsledok. *Ak f je monotónna funkcia definovaná na M a $a \in \mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ je hromadný bod množiny $M_+ := M \cap (a,\infty)$, tak existuje $\lim_{x\to a-} f(x)$. Pritom platí*

(a) *ak f je neklesajúca a na množine M_+ zdola ohraničená, tak*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \inf_{x\in M_+} f(x)\ ;$$

(b) *ak f je neklesajúca a na množine M_+ zdola neohraničená, tak*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty\ ;$$

(c) *ak f je nerastúca a na množine M_+ zhora ohraničená, tak*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \sup_{x\in M_+} f(x)\ ;$$

(d) *ak f je nerastúca a na množine M_+ zhora neohraničená, tak*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \infty\ .$$

Dôkaz. Aby sme sa v nasledujúcich (ako čitateľ neskôr uvidí, pomerne jednoduchých) úvahách nezamotávali priveľmi v zápisoch, označme $f_1 := f|_{M_+}$, máme teda (vzhľadom na definíciu pojmu limity sprava) dokázať existenciu $\lim_{x\to a} f_1(x)$.

(a) Na množine $D := -M_+$ (tj. $D = \{-x\ ;\ x \in M_+\}$) definujme funkciu g predpisom $g(x) = f_1(-x)$. Z rovnosti $g(D) = f_1(M_+) = f(M_+)$ vyplýva, že funkcia g je zdola ohraničená a $\inf_{x\in D} g(x) = \inf_{x\in M_+} f(x)$. Keďže f (a teda aj f_1) je neklesajúca, je funkcia g nerastúca. Funkcia g, množina $D(g) = D$ a bod $-a$ spĺňajú predpoklady vety .29 (g je monotónna a bod $-a$ je hromadný bod množiny $D(g) \cap (-\infty, a)$, ktorá je v tomto prípade totožná s množinou D), preto podľa tvrdenia (c) tejto vety je $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = \inf_{x\in D} g(x) = \inf_{x\in M_+} f(x)$ (prvá rovnosť je dôsledkom rovnosti $D(g) \cap (-\infty, a) = D(g)$, pozri poznámku za definíciou .27).

Z rovnosti $f_1(x) = g(-x)$, pre $x \in M_+ = D(f_1)$, vyplýva, že funkcia f_1 je zložená z funkcie $v(x) = -x, x \in \mathbf{R}$, ako vnútornej zložky a funkcie g ako vonkajšej zložky. Pretože $\lim_{x\to a} v(x) = \lim_{x\to a}(-x) = -a$ a $\lim_{x\to -a} g(x) = \inf_{x\in M_+} f(x)$ (čo sme práve dokázali), bude rovnosť $\lim_{x\to a} f_1(x) = \inf_{x\in M_+} f(x)$, ktorú chceme dokázať, vyplývať z vety .17 o limite zloženej funkcie, pokiaľ ukážeme, že je splnená aspoň jedna z podmienok (a), (b), (c) tejto vety. To je našťastie pravda: funkcia v je prostá, preto spĺňa podmienku (a). Tým je dôkaz rovnosti $\lim_{x\to a} f_1(x) = \inf_{x\in M_+} f(x)$ skončený.$\triangle$

Postup v prípade (b) je obdobný; v prípadoch (c) a (d) má čitateľ na výber: môže ich dokázať samostatne (postupom, akým sme dokazovali (a), resp. (b) z vety .29), môže ich odvodiť z tvrdení (c) a (d) vety .29 postupom, ktorý sme použili na dôkaz tvrdenia (a) tohto dôsledku, alebo ich môže odvodiť z tvrdení (a), (b) tohto dôsledku tak, ako sme dokazovali tvrdenia (c) a (d) vo vete .29.

Poznámka. Na tvrdenie uvedeného dôsledku sa vzťahujú obdobné poznámky ako na vetu .29.

.31 Dôsledok. *Ak $f : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ je monotónna funkcia, tak f má v každom bode $a \in (\alpha, \beta)$ konečné jednostranné limity, pričom platí:*

ak f je neklesajúca, tak

$$\lim_{x \to a-} f(x) \le f(a) \le \lim_{x \to a+} f(x) \; ;$$

ak f je nerastúca, tak

$$\lim_{x \to a-} f(x) \ge f(a) \ge \lim_{x \to a+} f(x) \; .$$

Dôkaz. Predpokladajme, že f je neklesajúca. Potom (teraz čiastočne opakujeme úvahy z poznámky za vetou .29) platí

$$\big(\forall x \in (\alpha, a)\big)\big(f(x) \le f(a)\big) \; ,$$

teda $f(a)$ je horné ohraničenie množiny $\{f(x) \; ; \; x \in (\alpha, a)\}$, a preto

$$\sup_{x \in (\alpha, a)} f(x) \le f(a) \; . \tag{51}$$

Podľa tvrdenia (a) vety .29 existuje $\lim_{x \to a-} f(x)$ a platí $\lim_{x \to a-} = \sup_{x \in (\alpha, a)} f(x)$, z (51) teda dostávame

$$\lim_{x \to a-} f(x) \le f(a) \; .$$

Dôkaz druhej rovnosti je obdobný a zakladá sa na tvrdení (a) dôsledku .30.

Prípad f *nerastúca* prenechávame na čitateľa.

Poznámky. 1. Obdobnými úvahami možno dokázať toto tvrdenie.

Veta. *Ak a je vnútorný bod intervalu I* (tj. pre niektoré $\varepsilon > 0$ platí inklúzia $O(a, \varepsilon) \subset I$) *a $f : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ je neklesajúca funkcia, tak existujú konečné* $\lim_{x \to a-} f(x)$, $\lim_{x \to a+} f(x)$ *a platí*

$$\lim_{x \to a-} f(x) \le \lim_{x \to a+} f(x) \; .$$

Dôkaz. Obdobne ako v predchádzajúcom dôkaze možno pre každé $b \in I, b > a$, z nerovnosti

$$(\forall x \in I, x < a)\big(f(x) \le f(b)\big)$$

odvodiť nerovnosť

$$\alpha := \sup\{f(x); x \in I \wedge x < a\} \le f(b) \; ;$$

z takto dokázaného tvrdenia

$$(\forall x \in I, x > a)(f(x) \ge \alpha)$$

vyplýva, že α je dolné ohraničenie množiny $M := \{f(x); x \in I \wedge x > a\}$, preto

$$\alpha \le \inf M \; ,$$

tj.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \alpha \le \inf M = \lim_{x \to a+} f(x) \; .$$

2. Lema. *Ak sú splnené predpoklady tvrdenia z poznámky 1 a funkcia f je rastúca, platí*

$$(\forall x \in I, x < a)\big(f(x) \le \lim_{y \to a-} f(y)\big) \; ,$$

$$(\forall x \in I, x > a)\big(f(x) > \lim_{y \to a+} f(y)\big) \; .$$

Dôkaz. Dokážeme prvú z uvedených nerovností. Nech $x \in I$, $x < a$. Zvoľme $z \in (x, a)$ (potom iste platí aj $z \in I$); keďže f rastie, platí

$$f(x) < f(z) \; , \tag{52}$$

súčasne — keďže $z \in I, z < a$ — z rovnosti $\lim_{y \to a-} f(y) = \sup\{f(y), y \in I \wedge y < a\}$ vyplýva

$$f(z) \le \lim_{y \to a-} f(y) \tag{53}$$

a z (52) a (53) dostávame

$$f(x) < \lim_{y \to a-} f(y \; ,$$

čo sme chceli dokázať.

.32 Príklad (kedy existuje a čomu sa rovná limita postupnosti $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$). Pre $q = 0$ a $q = 1$ je postupnosť $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ zrejme konštantná, a teda konvergentná (používame terminológiu z definície .3). Pre $q = -1$ táto postupnosť osciluje, pretože jej zúženia na množiny $N_1 := \{2n-1 \,;\, n \in \mathbf{N}\}$ a $N_2 := \{2n \,;\, n \in \mathbf{N}\}$, ktoré sú konštantné, majú rôzne limity (lema .11(c)).

Nech teraz $0 < |q| < 1$. Potom postupnosť $\{|q|^n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca a zdola ohraničená, preto podľa vety .29 (v ktorej položíme $M = \mathbf{N}, a = \infty, f(n) = |q|^n$) existuje $\lim_{n\to\infty} |q|^n =: a \in \mathbf{R}$. Podľa vety o limite zloženej funkcie potom platí $a = \lim_{n\to\infty} |q|^{n+1}$ (funkciu $c(n) = |q|^{n+1}$ možno písať v tvare $a \circ b$, kde $b(n) = n+1, a(n) = |q|^n$); súčasne z lemy .13(b) vyplýva $\lim_{n\to\infty} |q|^{n+1} = |q| \lim_{n\to\infty} |q|^n = |q|a$, teda

$$a = \lim_{n\to\infty} |q|^{n+1} = |q| \lim_{n\to\infty} |q|^n = |q|a \,.$$

Keďže $|q| \neq 1$, z rovnosti $a = |q|a$ vyplýva $a = 0$ a z tvrdenia (e_1) lemy .13 dostávame, že pre $0 < |q| < 1$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Pre $|q| > 1$ je $\{|q|^n\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca postupnosť, ktorá má podľa vety .29 limitu $a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Dokážeme, že $a = \infty$. Keby totiž platilo $a \in \mathbf{R}$, mohli by sme použiť predchádzajúce úvahy, z ktorých by vyplývalo, že $a = 0$, čo je ovšem v spore s predpokladom $|q| > 1$ a rovnosťou $a = \sup_{n\in\mathbf{N}} |q|^n$ (veta .29(a)). Tým je rovnosť $\lim_{n\to\infty} |q|^n = \infty$ pre $|q| > 1$ dokázaná. Pre $q > 1$ potom dostávame $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} |q|^n = \infty$. Postupnosť $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ pre $q < -1$ osciluje, pretože jej zúženie na množinu N_1, resp. N_2 (pozri prvý odstavec tohto príkladu) má limitu $-\infty$, resp. ∞ (pre $n \in N_1$ je $q^n = -|q|^n$, pre $n \in N_2$ platí $q^n = |q|^n$).

Zistili sme teda

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pre} \quad |q| < 1 \\ = 1 & \text{pre} \quad q = 1 \\ = \infty & \text{pre} \quad q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pre} \quad q \leq -1 \end{cases} .$$

.33 Príklad. Ukážeme, že existuje konečná $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (ktorú budeme označovať písmenom e).

Dokážeme, že postupnosť $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je rastúca a zhora ohraničená. Prvá z týchto skutočností je ekvivalentná s nerovnosťou $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, tú možno dokázať nasledovne:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} = \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > \\ &> \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \end{aligned}$$

$\Big($nerovnosť $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - \frac{1}{n+1}$ vyplýva z Bernoulliho nerovnosti $(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$, $n \in \mathbf{N}, x > -1, x \neq 0$, v ktorej sme položili $x = -\frac{1}{(n+1)^2}\Big)$.

Ohraničenosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dokážeme možno trocha prekvapujúcim spôsobom: Označme $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, potom zrejme $b_n \geq a_n$. Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je pritom klesajúca (preverenie úprav obdobných úpravám pri dôkaze rastu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ prenechávame na čitateľa):

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \\ &> \frac{n}{n+1} \left(1 + (n+2) \cdot \frac{1}{n(n+2)}\right) = 1 \,. \end{aligned}$$

Z nerovností $b_1 \geq b_n \geq a_n$ potom vyplýva, že číslo b_1 je iste horné ohraničenie postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (dokonca každé b_k je jej horným ohraničením).

Z vety .29(a) (pre $M = \mathbf{N}, a = \infty, f(n) = a_n$) vyplýva teda existencia konečnej $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$, pritom (keďže $e = \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n$ a postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \,, \quad n \in \mathbf{N} \,.$$

Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, použitá v predchádzajúcich úvahách, umožňuje odhadovať číslo e zhora: Podľa vety .15(c) o limite súčinu je $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty} a_n = e$, pritom – keďže $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca – platí

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}\,.$$

Pre číslo e tak dostávame odhad

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}\,,$$

ktorý je jednou z možností jeho približného výpočtu (neskôr uvedieme ešte ďalšie).

Poznámka. Predchádzajúce úvahy mohli na časť čitateľskej obce pôsobiť trocha trikovým dojmom (nebolo jasné, odkiaľ sme vopred tušili, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bude rastúca a dôkaz ohraničenosti bol tiež trocha nezvyčajný); ponúkame preto ešte jeden dôkaz ohraničenosti a monotónnosti postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorý je z tohto hľadiska názornejší.

Upravme vyjadrenie a_n nasledovne

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} +$$

$$+ \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\frac{1}{2!} + \cdots + \left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\frac{1}{k!} + \cdots +$$

$$+ \left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]\frac{1}{n!}\,.$$

Z takto získaného vyjadrenia pre a_n by malo byť vidieť, že $a_{n+1} > a_n$ (čísla v hranatých zátvorkách sa zväčšia, ak namiesto n dosadíme $n+1$, okrem toho vo vyjadrení čísla a_{n+1} bude o jeden kladný sčítanec viac než vo vyjadrení pre a_n). Keďže v každej z hranatých zátvoriek je kladné číslo menšie než 1, dostávame odhad

$$\begin{aligned} a_n &\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < \\ &< 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

$\Big($využili sme nerovnosť $n! \ge 2^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, a pre $q = \frac{1}{2}$ rovnosť $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^n}{1-q}\Big)$.

.34 Príklad. Dokážeme teraz, že $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Náš postup bude nasledovný:

1. dokážeme rovnosti $\lim_{t\to\infty} t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) = 1$;
2. z nich substitúciou $x = \frac{1}{t}$ odvodíme rovnosti

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,, \ \lim_{x\to 0-}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

   a použijeme lemu .28.

Použijeme pritom tieto informácie o funkcii ln:

- ln je inverzná funkcia k funkcii e^x, preto ln je rastúca funkcia, $\ln 1 = 0, \ln e = 1, \ln\frac{1}{e} = -1$ a $r\ln s = \ln(s^r)$;
- pre každé $a \in (0,\infty)$ je $\lim_{x\to a}\ln x = \ln a$;

a dokazovanie v bode 1 bude založené na nasledujúcej úvahe (ktorej dôkaz prenechávame na čitateľa):

LEMA. *Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť s limitou $a \in \mathbf{R}^*$ a funkcia $f : [1,\infty) \to \mathbf{R}$ je daná vzťahom $f(x) = a_n$ pre* $[x] = n$ (kde [.] označuje celú časť), *tak $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.*$\triangle$

Po tomto úvode môžeme prejsť k realizácii bodov 1 a 2.

1a) Pre $t \in [n, n+1)$ platí

$$0 < [t] \le t \le [t] + 1$$

a (keďže funkcia ln je rastúca a $\ln 1 = 0$)

$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{[t]+1}\right) \le \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \le \ln\left(1 + \frac{1}{[t]}\right) ,$$

preto

$$f(t) := [t]\ln\left(1 + \frac{1}{[t]+1}\right) \le t\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \le ([t]+1)\ln\left(1 + \frac{1}{[t]}\right) =: h(t) . \tag{54}$$

Označme teraz $a_n := n\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$, $b_n := (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Pretože

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

(pozri predchádzajúci príklad) a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} =^{31} e ,$$

dostávame

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n}\right] \stackrel{(*)}{=} \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n}\right) = \ln e = 1$$

a obdobne $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ (rovnosť (*) vyplýva z vety .17 o limite zloženej funkcie a vety .12, ktorá tiež zaručila splnenie podmienky (c) vety .17).

Z našej lemy potom vyplýva $\lim_{t\to\infty} f(t) = 1$ (pretože $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$) a $\lim_{t\to\infty} h(t) = 1$ (pretože $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$), z (54) a vety .25 potom dostávame rovnosť $\lim_{t\to\infty} t\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = 1$.

1b) Ak použijeme substitúciu $z = -t$, stačí namiesto rovnosti $\lim_{t\to-\infty} t\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = 1$ dokazovať rovnosť $\lim_{z\to\infty}\left(-z\ln\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right) = 1$, tj. $\lim_{z\to\infty} z\ln\left(1 - \frac{1}{z}\right) = -1$.Ďalší postup je obdobný ako v 1a): treba dokázať nerovnosti

$$[z]\ln\left(1 - \frac{1}{[z]}\right) \le z\ln\left(1 - \frac{1}{z}\right) \le ([z]+1)\ln\left(1 - \frac{1}{[z]+1}\right)$$

a v ďalších úvahách využiť výpočet

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n-1}\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\right) = \frac{1}{e}$$

$\Big($rovnosť $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$ opäť vyplýva z tvrdenia v poznámke 2 za vetou .17$\Big)$.

2. Ak $h : (-1,\infty)\backslash\{0\} \to \mathbf{R}$ je funkcia s predpisom $\frac{\ln(1+x)}{x}$, tak $h_1 := h|_{(0,\infty)}$ možno písať v tvare $h_1 = g\circ f$, kde $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$; $g(y) = y\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)$, $y > 0$; z vety .17 o limite zloženej funkcie potom vyplýva $\lim_{x\to 0} h_1(x) = 1$, tj. $\lim_{x\to 0+} h(x) = 1$ (oprávnenie k použitiu vety .17 sme získali splnením podmienky (b)). Dôkaz rovnosti $\lim_{x\to 0-} h(x) = 1$ je rovnaký.

.35 Cvičenie. Na základe predchádzajúceho príkladu použitím substitúcie $t = e^x - 1$ dokážte rovnosť $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-1}{x} = 1$. (Pri dokazovaní môžete použiť tieto (v našom texte zatiaľ nedokázané) tvrdenia: 1. funkcia $\ln x$ je inverzná k funkcii e^x; 2. $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$.) △

Poznámka. Z predchádzajúceho cvičenia a vety o limite zloženej funkcie vyplýva toto tvrdenie: *Ak* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ $(a \in \mathbf{R}^*)$, *pričom* a *je hromadný bod definičného oboru funkcie* $\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}$, *tak*

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x}-1}{f(x)} = 1 .$$

Špeciálne platí: ak $a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, tak

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a = 1\cdot\ln a = \ln a$$

[31]táto rovnosť vyplýva z rovnosti $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$ a tvrdenia v poznámke 2 za vetou .17 o limite zloženej funkcie

(v tomto prípade teda bolo $f(x) = x \ln a$).

Podobne z vyplýva z príkladu .34 a vety o limite zloženej funkcie:

Ak $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ($a \in \mathbf{R}^*$), pričom a je hromadný bod definičného oboru funkcie $\frac{\ln\left(1+f(x)\right)}{f(x)}$, tak

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln\left(1 + f(x)\right)}{f(x)} = 1 \ . \quad \spadesuit$$

Zaveďme teraz označenie, ktoré využijeme pri formulácii nasledujúcej vety: pre $I := [a, b]$ (kde $a, b \in \mathbf{R}, a \le b$) označíme znakom $|I|$ číslo $b - a$ (tj. dĺžku (degenerovaného alebo nedegenerovaného) intervalu I).

.36 Veta. (Princíp do seba vložených intervalov) *Nech $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť uzavretých (nedegenerovaných alebo degenerovaných) ohraničených intervalov s vlastnosťou*

(i) $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$.

Potom $\bigcap_{n=1}^\infty I_n \ne \emptyset$.

Ak naviac platí

(ii) $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$,

tak $\bigcap_{n=1}^\infty I_n$ je jednoprvková množina, tj. existuje práve jedno číslo $c \in \mathbf{R}$ s vlastnosťou $\left(\forall n \in \mathbf{N}\right)\left(c \in I_n\right)$.

Dôkaz. Začnime prvou časťou nášho tvrdenia. Ak I_n je uzavretý interval s koncovými bodmi $a_n \le b_n$, tak predpoklad (i) možno sformulovať v podobe *$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je nerastúca, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ je neklesajúca postupnosť a platí*

$$\left(\forall n \in \mathbf{N}\right)\left(a_n \le b_n\right) \ . \tag{55}$$

Z nerovností $b_1 \ge b_n \ge a_n$ vyplýva, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je zhora ohraničená, preto podľa vety .29(a) existuje konečná $\lim_{n\to\infty} a_n =: c$. Podobne možno dokázať existenciu čísla $d := \lim_{n\to\infty} b_n$; z (55) potom na základe vety .24 (pre $M = \mathbf{N}, f(n) = a_n, g(n) = b_n$) vyplýva nerovnosť $c \le d$.

Keďže $c = \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n$, $d = \inf_{n\in\mathbf{N}} b_n$ (veta .29) platí

$$\left(\forall n \in \mathbf{N}\right)\left(a_n \le c \le d \le b_n\right) \ , \tag{56}$$

čo znamená, že čísla c, d (a ľubovoľné x z (nedegenerovaného alebo degenerovaného) uzavretého intervalu $[c, d]$) ležia v každom intervalov $I_n = [a_n, b_n]$, čím je prvá časť našej vety dokázaná.$\triangle$

Dokážme teraz ešte naviac rovnosť $\bigcap_{n=1}^\infty I_n = [c, d]$, ktorej dôsledkom bude druhá časť nášho tvrdenia. Inklúziu $[c, d] \subset \bigcap_{n=1}^\infty I_n$ sme už dokázali (tvrdenie (56). Ak naopak $x \in \bigcap_{n=1}^\infty I_n$, tak z nerovností

$$\left(\forall x \in \mathbf{N}\right)\left(a_n \le x \le b_n\right)$$

podľa vety .24 (použitej najprv pre $M = \mathbf{N}, f(n) = a_n, g(n) \equiv x$, a potom pre $M = \mathbf{N}, f(n) \equiv x, g(n) = b_n$) vyplýva nerovnosť $c \le x \le d$, čím je dokázaná inklúzia $\bigcap_{n=1}^\infty I_n \subset [c, d]$, a tým aj rovnosť $\bigcap_{n=1}^\infty I_n = [c, d]$.$\triangle$

Predpokladajme teraz naviac, že platí (ii), ktoré zrejme možno prepísať do podoby $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Z tohto predpokladu dostávame

$$d = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = c + 0 = c \ ,$$

z práve dokázanej rovnosti $c = d$ a z rovnosti $\bigcap_{n=1}^\infty I_n = [c, d]$ (dokázanej v predchádzajúcom odstavci) už vyplýva druhá časť tvrdenia našej vety.

5 Späť k postupnostiam (a nielen k nim)

Tento odsek, venovaný rozšíreniu našich teoretických poznatkov o limitách postupností, uvedieme definíciou pojmu podpostupnosti.

.37 Definícia. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a rastúca postupnosť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ prirodzených čísel. Potom postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sa nazýva *podpostupnosť* (alebo *vybraná postupnosť z*) *postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.♠

Nasledujúce tvrdenie možno – keďže postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je zložením postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – odvodiť z vety o limite zloženej funkcie [32], rovnako dobre ho však – vzhľadom na jeho jednoduchosť – možno dokázať priamo na základe definície limity postupnosti.

.38 Lema. *Ak* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je podpostupnosť postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ [33] *a* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}^*$, *tak aj* $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. ♠

Nasledujúcu vetu popisujúcu súvislosť medzi limitou postupnosti a limitou funkcie sme vyslovili už v paragrafe .6, aby sme pomocou nej ukázali, že definícia limity vyslovená v .5 (ktorá sa nazýva aj *Heineho definíciou limity*) je ekvivalentná s nami používanou definíciou .7 (nazývanou niekedy aj *Cauchyho definícia limity*). Kvôli poriadku sformulujeme v tomto odseku spomínané tvrdenie znova (ovšem už bez dôkazu, ktorý čitateľ nájde v paragrafe .6), aby sa tak vrátilo na miesto, z ktorého sme si ho vypožičali.

.39 Veta. *Nech* $a \in \mathbf{R}^*$ *je hromadný bod definičného oboru funkcie* f, *nech* $b \in \mathbf{R}^*$. *Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(a) *pre každú postupnosť* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$ *s limitou* a *platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$;

(b) $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Poznámka. Z vety .39 možno odvodiť toto tvrdenie.

VETA. *Nech* $a \in \mathbf{R}^*$ *je hromadný bod definičného oboru funkcie* f. *Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(a') *pre každú postupnosť* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$ *s limitou* a *existuje* $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$;

(b') *existuje* $\lim_{x\to a} f(x)$.

Špeciálne, platí ekvivalencia medzi týmito tvrdeniami:

(a") *pre každú postupnosť* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$ *s limitou* a *je postupnosť* $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergentná;*

(b") *existuje konečná* $\lim_{x\to a} f(x)$.

:-) Všimnime si, že v (a') netreba – na rozdiel od (a) z vety .39 – overovať, či pre rôzne postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$ s limitou a majú postupnosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ vždy *rovnaké* limity, požadujeme len *existenciu* limity $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. (-:

DÔKAZ. Keďže náš výrok (b') je ekvivalentný s (b) z vety .39, bude tvrdenie našej vety vyplývať z vety .39, ak dokážeme ekvivalenciu (a)⇔(a'). Implikácia (a)⇒(a') zrejme platí, stačí preto dokázať, že z predpokladu (a') možno odvodiť tvrdenie *ak postupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$ *majú limitu* a, *tak* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$, z ktorého už vyplýva (a) z vety .39.

Nech teda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$, potom postupnosť

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$$

má tiež limitu a (lema .11(d)) a všetky prvky tejto postupnosti ležia v $D(f) \setminus \{a\}$. Z predpokladu (a') vyplýva, že postupnosť

$$f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \dots, f(x_n), f(y_n), \dots$$

má limitu, preto podľa lemy .38 jej podpostupnosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ musia mať rovnaké limity.

Dôkaz ekvivalencie (a")⇔(b") prenechávame na čitateľa. ♠

Naším ďalším cieľom je veta .43, formulujúca spolu s lemou .42 nutnú a postačujúcu podmienku konvergencie postupnosti. Tvrdenie .40, ktoré použijeme pri jej dôkaze, sa ukáže ako užitočné aj neskôr.

---

[32] v takom prípade stačí dokázať "zrejmé" tvrdenie $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$

[33] dúfame, že čiatateľa nezaskočilo zákerné použitie písmenka n ako premennej aj v postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ aj v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ktorá je vonkajšou zložkou vo vyjadrení $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$)

.40 Veta. *Z každej ohraničenej postupnosti možno vybrať konvergentnú podpostupnosť.*

Dôkaz. Nech teda $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je ohraničená postupnosť, zvoľme $c_1, d_1 \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo $\big(\forall n \in \mathbf{N}\big)\big(c_1 \le a_n \le d_1\big)$, a konštruujme postupnosť uzavretých ohraničených do seba vložených intervalov $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ nasledovne:

Položíme $I_1 := [c_1, d_1]$. Interval I_1 rozdelíme bodom $b_1 := \frac{c_1+d_1}{2}$ na intervaly $I_{11} := [c_1, b_1], I_{12} := [b_1, d_1]$, vyberieme ten z intervalov I_{11}, I_{12}, ktorý obsahuje nekonečne veľa členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ [34] (čitateľ ľahko zistí, že aspoň jeden z nich túto vlastnosť musí mať; pokiaľ ju majú oba, zvolíme I_{11}) a označíme ho I_2 a jeho koncové body $c_2 < d_2$. Interval I_2 rozdelíme bodom $b_2 := \frac{c_2+d_2}{2}$ na intervaly $I_{21} := [c_2, b_2], I_{22} := [b_2, d_2]$, vyberieme ten z nich, ktorý obsahuje nekonečne veľa členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ (pokiaľ túto vlastnosť majú obidva, zvolíme I_{21}) a označíme ho I_3 a jeho koncové body $c_3 < d_3$.

Popis konštrukcie intervalu I_{n+1} za predpokladu, že intervaly $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sú už skonštruované, vie čitateľ už teraz iste urobiť sám [35].

Naša postupnosť spĺňa predpoklady (i) a (ii) z vety .36 (splnenie predpokladu (ii) vyplýva z rovnosti $|I_n| = \frac{d_1-c_1}{2^{n-1}}$), preto existuje práve jedno číslo $a \in \mathbf{R}$ ležiace súčasne vo všetkých intervaloch I_n. Skonštruujeme teraz podpostupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ konvergujúcu k číslu a, čím bude náš dôkaz skončený.

:-) Myšlienka konštrukcie postupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ je jednoduchá: z každého intervalu I_k vyberieme nejaký prvok b_k postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ (podľa definície množiny I_k tam nejaký musí ležať); z nerovnosti $0 \le |b_k - a| \le |I_k|$ bude už – keďže $\lim_{k\to\infty} I_k = 0$ – vyplývať, že $\lim_{k\to\infty} b_k = a$. Pretože však chceme, aby $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ bola <u>*podpostupnosťou*</u> postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, musíme zabezpečiť, že prvok b_{k+1} vybraný z intervalu I_{k+1} leží v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ <u>*za*</u> prvkom b_k vybraným z intervalu I_k (tj. ak $b_k = a_r, b_{k+1} = a_s$, tak $s > r$) [36].(-:

Definujme teraz indukciou postupnosť $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ prirodzených čísel nasledovne:

$$n_1 := \min\{n \in \mathbf{N}\,;\, a_n \in I_1\}\ , \quad n_{k+1} := \min\{n \in \mathbf{N}\,;\, n > n_k \wedge a_n \in I_{k+1}\}$$

(korektnosť našej konštrukcie vyplýva z faktu, že množina $\{n \in \mathbf{N}\,;\, a_n \in I_{k+1}\}$ je nekonečná, preto $\{n \in \mathbf{N}\,;\, n > n_k \wedge a_n \in I_{k+1}\}$ je neprázdna množina).

Zrejme $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Z inklúzie $a_{n_k} \in I_k$ vyplýva – keďže súčasne platí aj $a \in I_k$ – nerovnosť $0 \le |a_{n_k} - a| \le |I_k|$, a keďže $\lim_{k\to\infty} |I_k| = 0$, dostávame z vety .25 rovnosť $\lim_{k\to\infty} |a_{n_k} - a| = 0$, tj. $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, čo sme chceli dokázať.

Poznámka. 1. Keďže ohraničená monotónna postupnosť je konvergentná (veta .29), možno predchádzajúce tvrdenie dokázať aj na základe tejto lemy:

LEMA. *Z každej postupnosti možno vybrať monotónnu podpostupnosť.*

DÔKAZ. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Číslo $k \in \mathbf{N}$ nazveme *začiatok úpadku postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, ak bude platiť $\big(\forall n > k\big)\big(a_n \le a_k\big)$. Nech $\mathcal{U}$ je množina všetkých začiatkov úpadku postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Ak $\mathcal{U}$ je nekonečná, možno ju zoradiť do rastúcej postupnosti $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ prirodzených čísel; postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ je potom nerastúca. Ak $\mathcal{U}$ je konečná, môžeme z $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ vybrať rastúcu postupnosť $\{a_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ nasledovne. Zvoľme $n_1 \in \mathbf{N}$ tak, aby platilo $\big(\forall u \in \mathcal{U}\big)\big(u < n_1\big)$. Keďže n_1 nie je začiatok úpadku, existuje $n_2 > n_1$ tak, že $a_{n_2} > a_{n_1}$. Keďže ani n_2 nie je začiatok úpadku, existuje $n_3 > n_2$ tak, že $a_{n_3} > a_{n_2}$, atď. (Vycifrovaný formálne korektný zápis prenechávame na čitateľa poučeného predchádzajúcim textom.)

2. Čitateľa, vyplašeného našimi skazkami o axióme výberu v poznámke v paragrafe .6, upozorňujeme, že ani jeden z uvedených dôkazov vety .40 sa nezakladá na tejto axióme (v prvom z uvedených dôkazov totiž vždy <u>*jednoznačne*</u> určujeme, ktorý interval I, resp. bod a zvolíme, a druhý z uvedených dôkazov možno do takejto podoby ľahko upraviť); k axióme výberu sa uchyľujeme v situáciách, kedy takéto jednoznačné kritérium výberu nevieme nájsť.

3. Obdoba vety .40 platí aj pre neohraničené postupnosti:

LEMA. *Z každej zhora (zdola) neohraničenej postupnosti možno vybrať rastúcu (klesajúcu) postupnosť s limitou ∞ ($-\infty$).*

DÔKAZ. V prípade zhora neohraničenej postupnosti stačí položiť $n_1 := \min\{n \in \mathbf{N}; a_n > 1\}$, $n_{k+1} := \min\{n \in \mathbf{N}; n > n_k \wedge a_n \ge a_{n_k} + 1\}$.

Cvičenie. (Limes superior a limes inferior postupnosti.)

---

[34] formulácia *interval J obsahuje nekonečne veľa členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$* znamená *množina $\{n \in \mathbf{N}\,;\, a_n \in J\}$ je nekonečná*

[35] Tento spôsob tvorenia postupnosti $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ sa nazýva *konštrukcia indukciou.* Postupnosť $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ považujeme za danú, ak je daný člen I_1 a postup, ktorým možno za predpokladu, že už poznáme členy $I_1, I_2, \ldots, I_n$, skonštruovať prvok I_{n+1}.

[36] okrem toho sa snažíme vyhnúť sa použitiu axiómy výberu

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená postupnosť, potom je množina $\mathcal{M} := \big\{x \in \mathbf{R};\, \big(\exists N \in \mathbf{N}\big)\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\big(a_n \le x\big)\big\}$ neprázdna. Ak $\mathcal{M}$ je zdola ohraničená, nazýva sa číslo $\inf \mathcal{M}$ *limes superior postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označuje sa $\limsup_{n\to\infty} a_n$. Ak $\mathcal{M}$ je zdola neohraničená, kladieme $\limsup_{n\to\infty} a_n := -\infty$.

Pre zhora neohraničenú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definujeme jej limes superior rovnosťou $\limsup_{n\to\infty} a_n := \infty$.

1. a) Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dokážte, že existuje jej podpostupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, ktorej limitou je $\limsup_{n\to\infty} a_n$. (Možno naviac požadovať, aby $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ bola neklesajúca postupnosť?)

b) Ak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je podpostupnosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l$, tak $l \preceq \limsup_{n\to\infty} a_n$ (symbol $\prec$ sme definovali pred paragrafom .24).

(Návod: Sporom; nech $\alpha := \limsup_{n\to\infty} a_n$, z nerovnosti $l \succ \alpha$ vyplýva existencia okolí $O(l)$ a $O(\varepsilon, \alpha)$, ktoré sú disjunktné, preto

$$\big(\forall x \in O(l)\big)\big(x > \alpha + \varepsilon\big)\ . \tag{57}$$

Keďže $l = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$, v okolí $O(l)$ leží nekonečne veľa členov postupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, a teda aj nekonečne veľa členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z (57) potom vyplýva, že v intervale $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$ neleží žiadny prvok množiny $\mathcal{M}$, čo je v spore s rovnosťou $\alpha = \inf \mathcal{M}$.) $\triangle$

Z (a) a (b) vidno, že $\limsup_{n\to\infty} a_n$ je najväčší spomedzi tých prvkov usporiadanej množiny $(\mathbf{R}^*, \prec)$, ktoré sú limitou niektorej postupnosti vybranej z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ako sa dá očakávať, existuje aj najmenší z týchto prvkov, ten sa nazýva *limes inferior postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označuje sa $\liminf_{n\to\infty} a_n$. Pri definícii limes inferior postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ možno buď zopakovať postup, ktorý sme použili na začiatku tohto cvičenia pri definovaní pojmu limes superior, alebo limes inferior zaviesť rovnosťou

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := -\limsup_{n\to\infty}(-a_n)$$

(v tomto texte budeme za definíciu pojmu limes superior považovať práve uvedenú rovnosť).

Ďalšiu z možných definícií (pre prípad zdola ohraničenej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$) obsahuje nasledujúce cvičenie.

c) Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola (zhora) ohraničená postupnosť, tak $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\inf\{a_k; k \ge n\}$ $\big(\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sup\{a_n; k \ge n\})\big)$. Dokážte!

d) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu práve vtedy, keď platí rovnosť $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ (a touto limitou je spoločná hodnota limes inferior a limes superior). Dokážte!

2. Dokážte toto tvrdenie:

Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

(a") existujú postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f)\backslash\{a\}$ také, že $\lim_{k\to\infty} x_k = a = \lim_{k\to\infty} y_k$, ale postupnosti $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{f(y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ majú navzájom rôzne limity;

(b") neexistuje $\lim_{x\to a} f(x)$.

(Návod: Implikácia "$\Rightarrow$" vyplýva z vety .39 (z nášho (a") vyplýva totiž negácia tvrdenia (a) z uvedenej vety).

"$\Leftarrow$" Nech $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje; potom existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)\setminus\{a\}$ taká, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ale $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ neexistuje (veta z poznámky v paragrafe .39). To znamená, že $\liminf_{n\to\infty} f(a_n) \ne \limsup_{n\to\infty} f(a_n)$ (bod d predchádzajúceho cvičenia), preto existujú z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrané postupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ tak, že $\lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = \limsup_{n\to\infty} a_n$ (bod a predchádzajúceho cvičenia), $\lim_{l\to\infty} f(a_{n_l}) = \liminf_{n\to\infty} f(a_n)$; pritom $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a = \lim_{l\to\infty} a_{n_l}$ (lema .38).

.41 Definícia. Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *fundamentálna* (alebo *cauchyovská*), ak

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists N \in \mathbf{N}\big)\big(\forall n, p \in \mathbf{N}, n, p > N\big)\big(|a_n - a_p| < \varepsilon\big)\ . \tag{58}$$

.42 Lema. *Každá konvergentná postupnosť je fundamentálna.*

Dôkaz. Jednoduchý dôkaz založený na úvahe *ak pre všetky $m > N$ je $|a_m - a| \le \varepsilon$, tak pre $n, p > N$ platí*

$$|a_n - a_p| = |(a_n - a) + (a - a_p)| \le |a_n - a| + |a_p - a| < 2\varepsilon$$

prenechávame na čitateľa.

.43 Veta. (Cauchy, Bolzano) *Každá fundamentálna postupnosť je konvergentná.*

Dôkaz. Najprv dokážeme toto tvrdenie:

Lema. *Ak fundamentálna postupnosť má konvergentnú podpostupnosť, tak je sama konvergentná.*

DÔKAZ. Nech $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná podpostupnosť fundamentálnej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukážeme, že číslo $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ je aj limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj. že platí

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists N \in \mathbf{N}\big)\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\big(|a_n - a| < \varepsilon\big)\ . \tag{59}$$

Zvoľme teda $\varepsilon > 0$ a hľadajme N. Podľa (58) existuje $N \in \mathbf{N}$ s vlastnosťou

$$\big(\forall n, p \in \mathbf{N}, n, p > N\big)\left(|a_n - a_p| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\ ,$$

tj.

$$\big(\forall p \in \mathbf{N}, p > N\big)\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\left(|a_n - a_p| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\ . \tag{60}$$

Ukážeme, že toto N vyhovuje našim požiadavkám.

Keďže $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, musí existovať $n_k > N$ tak, že

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ ^{37}. \tag{61}$$

(60) platí pre každé $p > N$, platí teda špeciálne aj pre $p = n_k$, teda

$$\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\left(|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\ . \tag{62}$$

Pretože z nerovností $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ vyplýva

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon\ ,$$

platí podľa (61) a (62)

$$\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\big(|a_n - a| < \varepsilon\big)\ ,$$

teda naše N skutočne vyhovuje požiadavkám z (59). Tým je dôkaz rovnosti $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ skončený.$\triangle$

Dôkaz Cauchyho-Bolzanovej vety už teraz bude stručný. Ukážeme, že každá fundamentálna postupnosť je ohraničená, podľa vety .40 z nej potom možno vybrať konvergentnú podpostupnosť a tvrdenie Cauchyho-Bolzanovej vety potom vyplýva z našej práve dokázanej lemy.

Zostáva teda dokázať implikáciu *ak postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je fundamentálna, tak je ohraničená.* Podľa (58) existuje (k číslu $\varepsilon = 1$) číslo $N \in \mathbf{N}$ s vlastnosťou

$$\big(\forall n, p \in \mathbf{N}, n, p > N\big)\big(|a_n - a_p| < 1\big)\ ,$$

tj.

$$\big(\forall p \in \mathbf{N}, p > N\big)\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\big(|a_n - a_p| < 1\big)\ .$$

Keďže toto tvrdenie platí pre všetky $p > N$, platí iste pre $p = N+1$, čo – keďže nerovnosť $|a_n - a_{N+1}| < 1$ je ekvivalentná s nerovnosťami $a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1$ – znamená, že platí

$$\big(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\big)\big(a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1\big)\ ,$$

a teda množina $B := \{a_n\ ;\ n > N\}$ je ohraničená. Pretože $A := \{a_n\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$ je zjednotenie konečnej, a teda ohraničenej, množiny $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ s ohraničenou množinou B, je aj A ohraničená množina, čím je naše tvrdenie dokázané.

Poznámka.

2. Na základe vety .43 a vety z poznámky v paragrafe .39 možno dokázať toto tvrdenie:

VETA. *Funkcia f má v hromadnom bode $a \in \mathbf{R}^*$ svojho definičného oboru konečnú limitu práve vtedy, keď platí*

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists P(a)\big)\big(\forall x, y \in P(a) \cap D(f)\big)\big(|f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)\ . \tag{63}$$

DÔKAZ pre záujemcov len naznačíme: Dôkaz implikácie "$\Rightarrow$" je obdobou úvahy použitej pri odvodení lemy .42. Dôkaze implikácie "$\Leftarrow$" založíme na ekvivalencii (a")$\Leftrightarrow$(b") z vety v poznámke z paragrafu .39: ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$ má limitu a, tak z (63) vyplýva, že postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je fundamentálna, a teda podľa vety .43 konvergentná.

[37] Dôkaz tohto "na prvý pohľad zrejmého" tvrdenia prenechávame na čitateľa; jedna z (viacerých) možností uvažovania je nasledovná: k číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje – pretože $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ – číslo $K_1 \in \mathbf{N}$ tak, že pre $k > K_1$ je $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$; množina $A := \{n_k\ ;\ k > K_1\}$ je nekonečná množina prirodzených čísel (pretože $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je monotónna, a teda prostá postupnosť a množina $\{K_1+1, K_1+2, \ldots\}$ je nekonečná), preto nemôže byť podmnožinou konečnej množiny $B := \{1, 2, \ldots, N\}$, teda musí existovať aspoň jeden prvok $n_k \in A \setminus B$.

6 Niektoré topologické pojmy

V tomto odseku zavedieme pojem otvorenej, uzavretej a kompaktnej množiny (a pre záujemcov naviac aj množiny typu F_σ a typu G_δ) a dokážeme niektoré základné tvrdenia o nich.

.44 Definícia. Číslo $a \in \mathbf{R}$ sa nazýva *vnútorný bod množiny* $A \subset \mathbf{R}$, ak pre niektoré jeho okolie $O(a)$ platí $O(a) \subset A$.

Množina $A \subset \mathbf{R}$ sa nazýva *otvorená*, ak každý jej bod je jej vnútorným bodom.

$\emptyset$ považujeme za otvorenú množinu.

Množina $B \subset \mathbf{R}$ sa nazýva *uzavretá*, ak jej doplnok $\mathbf{R} \setminus B$ je otvorená množina.

Poznámka. 1. Dohodu, že množinu $\emptyset$ pokladáme za otvorenú, sme mohli v predchádzajúcej definícii vynechať (uvádzame ju tam len na zdôraznenie tejto skutočnosti), pretože to vyplýva priamo z našej definície založenej na pojme vnútorného bodu. Ak je totiž $V(x)$ na $\mathbf{R}$ definovaná výroková forma "x je vnútorný bod množiny $\emptyset$", musí byť výrok $\big(\forall x \in \emptyset\big)\big(V(x)\big)$ pravdivý, keďže jeho negácia $\big(\exists x \in \emptyset\big)\big(\neg V(x)\big)$ je zrejme nepravdivá.

2. Po tragických skúsenostiach z minulosti dôrazne nabádame čitateľa, aby si uvedomil, že negáciou výrokovej formy *množina B je otvorená* nie je výroková forma *množina B je uzavretá*. Existujú totiž množiny, ktoré nie sú otvorené ani uzavreté (napr. každý interval tvaru $[a, b)$, kde $a < b$). Opačným prípadom sú množiny $\mathbf{R}$ a $\emptyset$, ktoré sú súčasne otvorené aj uzavreté (dá sa dokázať, že iná množina $A \subset \mathbf{R}$ už túto vlastnosť nemá).

.45 Lema. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(a) *množina $B \subset \mathbf{R}$ je uzavretá;*

(b) *$B' \subset B$, kde $B' := \{b \in \mathbf{R}\,;\, b$ je hromadný bod množiny $B\}$* [38].

Dôkaz. $(a) \Rightarrow (b)$. Ak B je uzavretá množina, je podľa definície .44 množina $\mathbf{R} \setminus B$ otvorená; ak teda $c \notin B$, tj. $c \in \mathbf{R} \setminus B$, tak existuje okolie $O(c)$ bodu c s vlastnosťou $O(c) \subset \mathbf{R} \setminus B$. V tomto okolí $O(c)$ teda nemôže ležať žiadny prvok množiny B, čo znamená, že c nie je hromadný bod B. Tým sme dokázali implikáciu $c \notin B \Rightarrow c \notin B'$ ekvivalentnú s implikáciou $c \in B' \Rightarrow c \in B$, tj. s inklúziou $B' \subset B$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Nech $c \in \mathbf{R} \setminus B$; pretože $B' \subset B$, nie je bod c hromadný bod množiny B, existuje teda jeho prstencové okolie $P(c)$ s vlastnosťou $P(c) \cap B = \emptyset$. Keďže súčasne $c \notin B$, platí aj rovnosť $O(c) \cap B = \emptyset$, kde $O(c) := P(c) \cup \{c\}$ je okolie bodu c. Z práve dokázanej inklúzie $O(c) \subset \mathbf{R} \setminus B$ vyplýva, že c je vnútorný bod množiny $\mathbf{R} \setminus B$, a keďže táto úvaha platí pre každé $c \in \mathbf{R} \setminus B$, je množina $\mathbf{R} \setminus B$ otvorená. To ale znamená, že B je uzavretá množina, čo sme chceli dokázať.

Poznámka. 1. Informáciu z predchádzajúcej lemy možno ešte doplniť:

LEMA. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(a) *množina $B \subset \mathbf{R}$ je uzavretá;*

(c) *ak $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ je konvergentná postupnosť s limitou a, tak $a \in B$.*

DÔKAZ. Vzhľadom na už dokázanú ekvivalenciu $(a) \Leftrightarrow (b)$ z predchádzajúcej lemy dokážeme implikácie $(b) \Rightarrow (c)$ a $(c) \Rightarrow (a)$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Ak $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ je konvergentná postupnosť s limitou a, môže nastať jedna z dvoch možností:

1. pre niektoré $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n = a$; z inklúzie $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ potom vyplýva aj $a \in B$.

2. platí (*) $\big(\forall n \in \mathbf{N}\big)\big(a_n \neq a\big)$; v takom prípade je a hromadný bod množiny B (keďže $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, vyplýva z definície limity, že v každom okolí $O(a)$ bodu a leží aspoň jeden prvok a_N postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset B$, ktorý je prvkom množiny B; podľa (*) je $a_N \neq a$, tj. a_N leží v prstencovom okolí bodu a), inklúzia $a \in B$ potom vyplýva z predpokladu $B' \subset B$ a inklúzie $a \in B'$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Budeme postupovať nepriamo. Ak B nie je uzavretá, znamená to (podľa definície .44), že $\mathbf{R} \setminus B$ nie je otvorená množina. Existuje preto bod $a \in \mathbf{R} \setminus B$, ktorý nie je vnútorným bodom množiny $\mathbf{R} \setminus B$. To znamená, že každé okolie $O(a)$ bodu a obsahuje prvky neležiace v $\mathbf{R} \setminus B$, teda prvky z B. Vyberme niektorý z prvkov množiny B ležiacich v okolí $O\left(\frac{1}{n}, a\right)$ a označme ho a_n. Ak tento výber urobíme pre každé $n \in \mathbf{N}$, dostaneme [39] postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset B$, ktorá konverguje k a $\Big($z inklúzie $a_n \in O\left(\frac{1}{n}, a\right)$ vyplýva $0 \leq |a_n - a| \leq \frac{1}{n}$, podľa vety .25 potom $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$, čo je ekvivalentné s rovnosťou $\lim_{n\to\infty} a_n = a\Big)$. Z existencie konvergentnej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ s limitou $a \notin B$ ovšem vyplýva tvrdenie $\neg(c)$.

[38] štandardne používané (a priam sa núkajúce) slovné vyjadrenie inklúzie $B' \subset B$, ktorým je formulácia *B obsahuje všetky svoje hromadné body* nemôžeme, žiaľ, použiť, keďže sme si k nemu sami zahatali cestu definíciou .4 (inak užitočnou), podľa ktorej za hromadný bod zhora (zdola) neohraničenej množiny $B \subset \mathbf{R}$ považujeme aj bod ∞ $(-\infty)$, ktorý zrejme nemôže byť prvkom B

[39] axióma výberu opäť medzi nami

2. V niektorých doplňujúcich úvahách využijeme toto tvrdenie:

LEMA. *Nech $B \subset \mathbf{R}$. Potom $B \cup B'$ je uzavretá množina.*

DÔKAZ. Nech a je hromadný bod množiny $B \cup B'$. Dokážeme, že a je aj hromadný bod množiny B, a leží teda iste v $B \cup B'$; uzavretosť množiny $B \cup B'$ bude potom vyplývať z lemy .45. V našich úvahách pritom využijeme, že pre každý bod $x \in B \cup B'$ platí

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(O(\varepsilon, x) \cap B \neq \emptyset\big)\ . \tag{64}$$

Zvoľme $\varepsilon > 0$. Pretože a je hromadný bod množiny $B \cup B'$, existuje číslo $x \in B \cup B'$ ležiace v $P(\varepsilon, a)$. Nech $\varepsilon_1 := \min\{|x-a|, a+\varepsilon-x, x-(a-\varepsilon)\}$, potom $\varepsilon_1 > 0$ a $O(\varepsilon_1, x) \subset P(\varepsilon, a)$. Podľa (64) v okolí $O(\varepsilon_1, x)$ leží aspoň jeden prvok množiny B, z inklúzie $O(\varepsilon_1, x) \subset P(\varepsilon, a)$ potom vyplýva $P(\varepsilon_1, a) \cap B \neq \emptyset$. Keďže táto úvaha platí pre každé $\varepsilon > 0$, je a hromadný bod množiny B.

.46 Lema. *Nech $\{A_\alpha\,;\,\alpha \in I\}$, kde I je neprázdna množina indexov, je systém množín reálnych čísel* [40] *. Potom platí*

(a) *ak každá z množín A_α je otvorená, tak aj množina $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ je otvorená;*

(b) *ak každá z množín A_α je uzavretá, tak aj množina $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ je uzavretá.*

Ak množina I je naviac konečná, položme $I = \{1, 2, \dots n\}$. Potom

(c) *ak každá z množín $A_1, A_2; \dots, A_n$ je otvorená, tak aj množina $\bigcap_{i=1}^n A_i$ je otvorená;*

(d) *ak každá z množín $A_1, A_2, \dots, A_n$ je uzavretá, tak aj množina $\bigcup_{i=1}^n A_i$ je uzavretá.*

Dôkaz. (a) Označme $A := \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$. Ak $x \in A$, tak $\Big($podľa definície množiny $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\Big)$ pre niektoré $\alpha' \in I$ platí inklúzia $x \in A_{\alpha'}$. Keďže množina $A_{\alpha'}$ je podľa predpokladu otvorená, existuje okolie $O(x)$ bodu x s vlastnosťou $O(x) \subset A_{\alpha'}$. Z inklúzie $A_{\alpha'} \subset A$ potom vyplýva $O(b) \subset A$, čo znamená, že x je vnútorný bod množiny A. Keďže táto úvaha platí pre každý prvok $x \in A$, je množina A otvorená.

(c) Ak $x \in A$, tak pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $x \in A_i$. Keďže množina A_i je otvorená, vyplýva z inklúzie $x \in A_i$ existencia čísla $\varepsilon_i > 0$ takého, že $O(\varepsilon_i, x) \subset A_i$. Pre $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ potom platí

$$\big(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\big)\big(O(\varepsilon, x) \subset O(\varepsilon_i, x) \subset A_i\big)\ , \quad \text{tj.} \quad O(\varepsilon, x) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i\ ,$$

čo znamená, že x je vnútorný bod množiny $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

Tvrdenia (b) a (d) možno odvodiť z (a) a (c) použitím de Morganových pravidiel

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \mathbf{R} \setminus \left(\bigcup_{\alpha\in I} (\mathbf{R} \setminus A_\alpha)\right) \quad \text{a} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \mathbf{R} \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n (\mathbf{R} \setminus A_i)\right)\ .$$

Poznámka. Nasledujúce príklady ukazujú, že predpoklad *I je konečná množina* nemožno v tvrdeniach (c) a (d) vynechať. Ak položíme $I = \mathbf{N}, A_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, tak každá z množín A_n je otvorená, ale o množine $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \{0\}$ to neplatí. Podobne v prípade $I = \mathbf{N}, A_n := \left(-1, \frac{1}{n}\right)$, kedy $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = (-1, 0]$. Z uvedených príkladov už možno odvodiť príklady dokumentujúce nemožnosť vynechania uvedeného predpokladu aj v prípade (d), doplňme ich ešte jedným: pre $I = \mathbf{N}, A_n := \left[0, \frac{1}{n}\right]$ (teda všetky A_n sú uzavreté) je $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = [0, 1)$, čo zrejme nie je uzavretá množina.♠

V našich ďaších úvahách budú mať množiny, s príkladmi ktorých sme sa stretli v predchádzajúcej poznámke, istý význam.

.47 Definícia. Množina $A \subset \mathbf{R}$ sa nazýva *množina typu G_δ*, ak je možné ju písať v tvare najviac spočítateľného prieniku otvorených množín.

Množina $B \subset \mathbf{R}$ sa nazýva *množina typu F_σ*, ak je možné ju písať v tvare najviac spočítateľného zjednotenia uzavretých množín.

Poznámka. Z de Morganových pravidiel

$$\mathbf{R} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcap_{n=1}^\infty (\mathbf{R} \setminus A_n) \quad \text{a} \quad \mathbf{R} \setminus \bigcap_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty (\mathbf{R} \setminus A_n)$$

---

[40] Uveďme tu niekoľko príkladov systémov množín reálnych čísel. V systéme $\{(x-1, x+1); x \in \mathbf{R}\}$ všetkých otvorených intervalov dĺžky 2 je indexovou množinou množina $\mathbf{R}$ a $A_x := (x-1, x+1)$; v systéme $\{[a, b]; a, b \in \mathbf{R}, a < b\}$ všetkých nedegenerovaných uzavretých intervalov je indexovou množinou množina I všetkých usporiadaných dvojíc $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ takých, že $a < b$; v systéme $\{O(\varepsilon, x); \varepsilon > 0, x \in \mathbf{R}\}$ všetkých okolí reálnych čísel je indexovou množinou množina $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$.

zrejme vyplýva tvrdenie *množina B je typu F_σ práve vtedy, keď $\mathbf{R}\setminus B$ je typu G_δ.*

Príklad. 1. Množina $\mathbf{Q}$ je typu F_σ, keďže $\mathbf{Q}=\bigcup_{q\in\mathbf{Q}}\{q\}$ (za indexovú množinu sme zvolili spočítateľnú množinu $\mathbf{Q}$, jednoprvkové množiny $\{q\}$ sú zrejme uzavreté).

2. Ukážeme teraz, že $\mathbf{Q}$ nie je typu G_δ (a teda $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ nie je typu F_σ). Využijeme pritom nasledujúce tvrdenie:

LEMA. *Ak $\{A_n\,;\,n\in\mathbf{N}\}$ je spočítateľný systém uzavretých množín taký, že $\bigcup_{n=1}^\infty A_n=\mathbf{R}$, tak aspoň jedna z množín A_n musí mať vnútorný bod.*

DÔKAZ. Sporom. Predpokladajme, že $\bigcup_{n=1}^\infty A_n=\mathbf{R}$ a žiadna z množín A_n nemá vnútorné body. Potom musí existovať bod c_1 tak, že $c_1\notin A_1$ (inak by platilo $A_1=\mathbf{R}$ a každý bod množiny A_1 by bol jej vnútorným bodom). Keďže A_1 je uzavretá množina, je množina $\mathbf{R}\setminus A_1$ otvorená, a existuje preto $\varepsilon_1>0$ tak, že $(c_1-\varepsilon_1,c_1+\varepsilon_1)\subset\mathbf{R}\setminus A_1$. Označme $I_1:=\left[c_1-\frac{\varepsilon_1}{2},c_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right]$. I_1 je teda uzavretý ohraničený interval neobsahujúci prvky množiny A_1.

V intervale I_1 musí ležať aspoň jeden bod c_2 s vlastnosťou $c_2\notin A_2$ (keby totiž platilo $I_1\subset A_2$, bol by bod c_1 vnútorný bod množiny A_2, čo podľa predpokladov nie je možné). Keďže $\mathbf{R}\setminus A_2$ je otvorená množina, existuje $\varepsilon_2>0$ tak, že $(c_2-\varepsilon_2,c_2+\varepsilon_2)\subset\mathbf{R}\setminus A_2$. Označme $I_2:=I_1\cap\left[c_2-\frac{\varepsilon_2}{2},c_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right]$. I_2 je teda uzavretý ohraničený interval neobsahujúci prvky z A_2, pritom $I_2\subset I_1$.

Ak budeme týmto spôsobom postupovať ďalej, dostaneme postupnosť uzavretých ohraničených intervalov

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset I_{n+1}\supset\cdots,$$

pričom interval I_n neobsahuje prvky množiny A_n. Podľa vety .36 má systém $\{I_n\,;\,n\in\mathbf{N}\}$ neprázdny prienik. Pre prvky $x\in\bigcap_{n=1}^\infty I_n$ z inklúzie $\bigcap_{n=1}^\infty I_n\subset I_k$ vyplýva $x\notin A_k$. Keďže táto úvaha platí pre každé $k\in\mathbf{N}$, dostávame

$$\big(\forall k\in\mathbf{N}\big)\big(x\notin A_k\big)\ ,\quad \text{tj.}\quad x\notin\bigcup_{k=1}^\infty A_k\ ,$$

čo je ale v spore s predpokladom $\bigcup_{k=1}^\infty A_k=\mathbf{R}$. Tým je dôkaz našej lemy skončený.△

Naše tvrdenie budeme tiež dokazovať sporom; predpokladajme, že množina $\mathbf{Q}$ je typu G_δ. Existujú teda spočítateľný systém $\{A_n\,;\,n\in\mathbf{N}\}$ otvorených množín tak, že $\mathbf{Q}=\bigcap_{n=1}^\infty A_n$. Označme $B_i=\mathbf{R}\setminus A_i$. Množina B_i je potom uzavretá (lebo A_i bola otvorená) a neobsahuje vnútorné body (keby $c\in B_i$ bol vnútorný bod množiny B_i, platilo by $O(\varepsilon,c)\subset B_i$ pre niektoré $\varepsilon>0$; keďže každý interval obsahuje aspoň jedno racionálne číslo, platila by pre niektoré $q\in\mathbf{Q}$ inklúzia $q\in O(\varepsilon,c)$, a teda aj $q\in B_i$; potom ale $q\in B_i\cap\mathbf{Q}=B_i\cap\bigcap_{n=1}^\infty A_n\subset B_i\cap A_i=\emptyset$, inklúzia $q\in\emptyset$ je ovšem vytúžený spor). Z de Morganovho pravidla vyplýva $\bigcup_{n=1}^\infty B_n=\mathbf{R}\setminus\bigcap_{n=1}^\infty(\mathbf{R}\setminus B_n)=\mathbf{R}\setminus\bigcap_{n=1}^\infty A_n=\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, teda množinu $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ možno písať v tvare zjednotenia spočítateľného systému $\mathcal{B}:=\{B_n;n\in\mathbf{N}\}$ uzavretých množín, ktoré nemajú vnútorné body. Každý prvok spočítateľného systému $\mathcal{A}:=\big\{\{q\}\,;\,q\in\mathbf{Q}\big\}$ je tiež uzavretá množina bez vnútorných bodov, zjednotením tohto systému je množina $\mathbf{Q}$. Potom $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ je spočítateľný systém uzavretých množín bez vnútorných bodov, zjednotením ktorého je množina $\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})$. To je však v spore s tvrdením našej lemy, čím je dôkaz skončený.♠

Záver tohto odseku venujeme kompaktným množinám. Nasledujúce tvrdenie je sčasti nepovinným úvodom do tejto problematiky („nepovinnosť" sa týka implikácie (a)⇒(b)).

.48 Lema. *Nech $B\subset\mathbf{R}$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(a) *z každej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset B$ možno vybrať konvergentnú podpostupnosť, ktorej limita leží v B;*

(b) *množina B je uzavretá a ohraničená.*

Dôkaz. *(b) ⇒ (a).* Nech B je uzavretá a ohraničená, nech $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset B$. Keďže B (a teda aj $\{a_n\}_{n=1}^\infty$) je ohraničená, možno z $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ vybrať podľa vety .40 konvergentnú podpostupnosť s limitou a. Pretože B je uzavretá, vyplýva z poznámky za lemou .45 inklúzia $a\in B$.

(a) ⇒ (b). Treba dokázať implikáciu *ak platí (a), tak B je uzavretá* a implikáciu *ak platí (a), tak B je ohraničená*, začneme prvou z nich. Stačí dokázať, že z (a) vyplýva vlastnosť (c) z poznámky za lemou .45. Nech teda $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset B$ je konvergentná postupnosť s limitou a. Podľa predpokladu (a) možno z $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ vybrať konvergentnú podpostupnosť, ktorej limita leží v B. Keďže limitou tejto podpostupnosti môže byť len a (lema .38), platí $a\in B$, čo sme chceli dokázať.

Implikáciu *ak platí (a), tak B je ohraničená* dokážeme nepriamo. Ak B nie je ohraničená zhora, zostrojíme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset B$ s limitou ∞, z lemy .38 potom vyplýva, že z $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ už nemožno vybrať konvergentnú podpostupnosť (keďže všetky jej podpostupnosti divergujú k ∞).

Nech teda B nie je zhora ohraničená, tj. nech

$$\big(\forall K\in\mathbf{R}\big)\big(\exists b\in B\big)\big(b>K\big)\ .$$

Zvoľme $n \in \mathbf{N}$, množina $\{b \in B\,;\, b > n\}$ je neprázdna, vyberme jeden jej prvok a označme ho a_n. Ak to urobíme pre každé $n \in \mathbf{N}$, dostaneme postupnosť [41] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s vlastnosťou $\big(\forall n \in \mathbf{N}\big)\big(a_n > n\big)$, z tejto nerovnosti už podľa lemy .19 (pre $M = \mathbf{N}, f(n) = n, g(n) = a_n$) vyplýva $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Podobne možno pre zdola neohraničenú množinu B skonštruovať postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s limitou $-\infty$.

.49 Definícia. Systém množín $\{A_\alpha; \alpha \in I\}$ sa nazýva *otvorené pokrytie množiny* $A \subset \mathbf{R}$, ak $A \subset \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ a každá z množín A_α je otvorená.

Množina $A \subset \mathbf{R}$ sa nazýva *kompaktná množina* (alebo *kompakt*), ak z každého jej otvoreného pokrytia $\{A_\alpha; \alpha \in I\}$ možno vybrať konečné podpokrytie (tj. existuje konečná množina $J \subset I$ tak, že systém $\{A_\alpha; \alpha \in J\}$ je otvorené pokrytie množiny A).

.50 Veta. *Množina $A \subset \mathbf{R}$ je kompaktná práve vtedy, keď je uzavretá a ohraničená.*

Dôkaz. "$\Rightarrow$" Dokážeme najprv implikáciu *ak A je kompaktná, tak je ohraničená.* Nech $A_n := \big(-\frac{1}{n}\frac{1}{n}\big)$, potom $\mathcal{A} := \{A_n; n \in \mathbf{N}\}$ je otvorené pokrytie množiny A (keďže platí $\bigcup \mathcal{A} = \mathbf{R}$), možno z neho teda – pretože A je kompakt – vybrať konečné podpokrytie $\mathcal{B}$. Nech $N := \max\{n; A_n \in \mathcal{B}\}$, potom $A \subset \bigcup_{n=1}^{N} A_n = (-N, N)$, teda A je ohraničená množina.$\triangle$

Dôkaz implikácie *ak A je kompaktná, tak A je uzavretá* je nepatrne dlhší. Treba dokázať (definícia .44), že každé číslo $b \in \mathbf{R} \setminus A$ je vnútorný bod množiny $\mathbf{R} \setminus A$. Zvoľme teda pevne $b \in \mathbf{R} \setminus A$. Ak $x \in A$, potom zrejme $x \neq b$, a teda $\varepsilon_x := \frac{|b-x|}{2}$ je kladné číslo, pre okolia $O(\varepsilon_x, x)$ a $O(\varepsilon_x, b)$ potom iste platí

$$O(\varepsilon_x, x) \cap O(\varepsilon_x, b) = \emptyset\,. \tag{65}$$

Systém $\{O(\varepsilon_x, x); x \in A\}$ je otvorené pokrytie kompaktnej množiny A, existuje teda jeho konečné podpokrytie $\mathcal{B} = \{O(\varepsilon_{x_1}, x_1), \ldots, O(\varepsilon_{x_n}, x_n)\}$. Nech $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_n}\}$; dokážeme, že $O(\varepsilon, b) \subset \mathbf{R} \setminus A$ (odporúčame ovšem čitateľovi, aby si najprv sám rozmyslel, že to musí byť pravda). Sporom, nech pre niektoré $a \in A$ platí

$$a \in O(\varepsilon, b)\,, \quad \text{tj.} \quad |b - a| < \varepsilon\,. \tag{66}$$

Keďže $\mathcal{B}$ je pokrytie množiny A, existuje $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že

$$a \in O(\varepsilon_{x_j}, x_j)\,, \quad \text{tj.} \quad |a - x_j| < \varepsilon_{x_j}\,. \tag{67}$$

Z (66), (67) a nerovnosti $\varepsilon \le \varepsilon_{x_j}$ potom vyplýva

$$2\varepsilon_{x_j} = |b - x_j| = \big|(b-a) + (a - x_j)\big| \le |b - a| + |a - x_j| < \varepsilon + \varepsilon_{x_j} \le 2\varepsilon_{x_j}\,;$$

nerovnosť $2\varepsilon_{x_j} < 2\varepsilon_{x_j}$ ovšem zrejme nemôže platiť[42].

"$\Leftarrow$" Budeme postupovať sporom. Nech teda A je uzavretá a ohraničená množina, ktorá nie je kompaktná. Potom existuje jej otvorené pokrytie $\mathcal{A}$, z ktorého nemožno vybrať konečné podpokrytie. Naše ďalšie úvahy budú teraz nápadne pripomínať dôkaz vety .40.

Nech $I_1 := [c_1, d_1]$ je interval s vlastnosťou $A \subset I_1$ (existencia I_1 vyplýva z ohraničenosti množiny A). Rozdeľme ho bodom $b_1 := \frac{c_1+d_1}{2}$ na intervaly $I_{11} := [c_1, b_1], I_{12} := [b_1, d_1]$, vyberme ten z nich, ktorého prienik s množinou A nemožno pokryť konečným počtom množín z $\mathcal{A}$ (ak majú túto vlastnosť obidva, zvoľme I_{11}) a označme ho I_2 a jeho koncové body $c_2 < d_2$. Opakovaním tohto postupu získame postupnosť intervalov spĺňajúcich predpoklady (i) a (ii) vety .36, pričom

$$\begin{gathered}\textit{žiadnu z množín } I_n \cap A \textit{ nemožno pokryť}\\ \textit{konečným počtom množín pokrytia } \mathcal{A}\end{gathered} \tag{68}$$

[41] axióma výberu večne živá

[42] Pokiaľ sa čitateľovi náš dôkaz sporom nepáčil, ponúkame mu tento priamy:

$$\begin{aligned} O(\varepsilon, b) \cap A \quad &\subset \quad O(\varepsilon, b) \cap \bigcup_{n=1}^{N} O(\varepsilon_{x_n}, x_n) = \bigcup_{n=1}^{N} \big(O(\varepsilon, b) \cap O(\varepsilon_{x_n}, x_n)\big) \subset \\ &\subset \quad \bigcup_{n=1}^{N} \big(O(\varepsilon_{x_n}, b) \cap O(\varepsilon_{x_n}, x_n)\big) = \emptyset\,, \end{aligned}$$

pričom posledná rovnosť vyplýva z (65).

(a teda zrejme každá z množín $I_n \cap A$ je nekonečná). Nech $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Kedže $\lim_{n\to\infty} |I_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{d_1-c_1}{2^{n-1}} = 0$, má číslo a nasledujúcu vlastnosť

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists m \in \mathbf{N}\big)\big(I_m \subset O(\varepsilon, a)\big) \ , \tag{69}$$

z nej vyplýva – keďže každá z množín I_m obsahuje nekonečne veľa prvkov množiny A – že a je hromadný bod množiny A, a teda $a \in A$ (lema .45). Keďže $a \in A$ a $\mathcal{A}$ je otvorené pokrytie množiny A, existuje $M \in \mathcal{A}$ s vlastnosťou $a \in M$. Z otvorenosti množiny M vyplýva, že pre niektoré $\varepsilon > 0$ platí $O(\varepsilon, a) \subset M$ (definícia .44). Z (69) potom ale vyplýva, že pre niektorý člen I_m našej postupnosti $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $I_m \subset O(\varepsilon, a) \subset M$, čo znamená, že interval I_m – a tým skôr aj množinu $I_m \cap A$ – možno pokryť jediným prvkom pokrytia $\mathcal{A}$, čo je zrejme spor s (68).

Poznámka. Z lemy .48 a vety .50 vyplýva toto tvrdenie:

VETA. *Nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

(a) *množina $A \subset \mathbf{R}$ je kompkatná;*

(b) *z každej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ možno vybrať konvergentnú podpostupnosť, ktorej limita je prvkom množiny A.*

.51 Lema. *Ak $A \subset \mathbf{R}$ je kompaktná množina, tak existujú* $\min A, \max A$.

Dôkaz. Keďže A je podľa vety .50 ohraničená, existujú $\sup A, \inf A$. Inklúziu $\sup A \in A$ dokážeme sporom. Ak $a := \sup A \notin A$, tak a je hromadný bod množiny A (dôkaz sa zakladá na rovnakej úvahe ako dôkaz bodu 2 implikácie (b)⇒(c) v poznámke za lemou .45), z lemy .45 potom vyplýva $a \in A$, čo je spor s predpokladom $a \notin A$. Dôkaz inklúzie $\inf A \in A$ je rovnaký.

Part II
Spojité funkcie

7 Definícia spojitosti

.52 Definícia. Hovoríme, že *funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$*, ak platí

$$\Big(\forall O\big(f(a)\big)\Big)\big(\exists O(a)\big)\big(\forall x \in O(a) \cap D(f)\big)\Big(f(x) \in O\big(f(a)\big)\Big) \ , \tag{70}$$

čo – keďže okolia čísel a, $f(a)$ môžeme popísať ich polomermi δ a ε – je to isté ako

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)\big(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big) \ . \ \spadesuit \tag{71}$$

:-) Výroky (70) a (71) nápadne pripomínajú zápis rovnosti $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, sú tu však dve odlišnosti:

- podstatná: nepredpokladáme, že a je hromadný bod definičného oboru $D(f)$;
- nepodstatná: z (70) vidno, že nehľadáme prstencové okolie bodu a, ale okolie tohto bodu. (-:

Vzťahu limity a spojitosti je venovaný nasledujúci paragraf.

.53 Definícia. Číslo $a \in \mathbf{R}$ sa nazýva *izolovaný bod množiny $M \subset \mathbf{R}$*, ak $a \in M$, ale a nie je hromadný bod množiny M, tj. ak platí

$$\big(\exists O(a)\big)\big(M \cap O(a) = \{a\}\big) \ .$$

Lema. *Nech je daná funkcia f, nech $a \in D(f)$. Potom*

(a) *ak a je izolovaný bod množiny $D(f)$, tak f je spojitá v bode a;*

(b) *ak a je hromadný bod množiny $D(f)$, tak f je spojitá v bode a práve vtedy, keď* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Dôkaz. (a) Nech $\mathcal{O}$ je okolie bodu a s vlastnosťou $\mathcal{O} \cap D(f) = \{a\}$. Ak zvolíme $O\big(f(a)\big)$ a budeme hľadať okolie $O(a)$ spĺňajúce požiadavky z (70), zistíme, že vždy stačí položiť $O(a) := \mathcal{O}$, pretože pre $x \in \mathcal{O} \cap D(f) = \{a\}$ platí $f(x) = f(a) \in O\big(f(a)\big)$.

(b) Stačí porovnať (71) a (10); zrejme platí (71)$\Rightarrow$(10); dôkaz opačnej implikácie vyplýva z faktu, že nerovnosť $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ z (10) zostane iste zachovaná, ak za x zvolíme a. ♠

Obdobou vety .39 je v prípade spojitosti nasledujúce tvrdenie.

.54 Veta. *Nech a je prvok definičného oboru funkcie f. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(a) *pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ s limitou a platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$;*

(b) *funkcia f je spojitá v bode a.*

Dôkaz je verná kópia dôkazu vety .39 v paragrafe .6 (druhou, ale – ako čitateľ zistí – komplikovanejšou možnosťou, je odvodiť naše tvrdenie z vety .39.

.55 Veta. (a) *Ak funkcie f a g s definičným oborom M sú spojité v bode a, tak aj funkcie $f+g$, $f-g$, fg sú spojité v a. Ak naviac $g(a) \neq 0$, tak aj funkcia $\frac{f}{g}$ je spojitá v bode a.*

(b) *Ak funkcia f je spojitá v bode a a funkcia g v bode $f(a)$, tak funkcia $g \circ f$ je spojitá v bode a.*

Dôkaz. (a) V prípade, že a je izolovaný bod množiny M, niet čo dokazovať (lema .53(a)). Ak a je hromadný bod množiny M, je to dôsledok vety .15 a lemy .53(b). $\triangle$

Najrýchlejšia cesta dôkazu v prípade (b) je zopakovať (tento raz v jednoduchšej verzii) úvahy z dôkazu vety .17 [43]:

K $O\Big(g\big(f(a)\big)\Big)$ existuje $O\big(f(a)\big)$ s vlastnosťou

$$y \in O\big(f(a)\big) \cap D(g) \Rightarrow g(y) \in O\Big(g\big(f(a)\big)\Big)\ , \tag{72}$$

k $O\big(f(a)\big)$ existuje okolie $O(a)$ s vlastnosťou

$$x \in O(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O\big(f(a)\big)\ ,$$

z ktorej vyplýva

$$x \in O(a) \cap D(g \circ f) \Rightarrow f(x) \in O\big(f(a)\big) \cap D(g)\ ; \tag{73}$$

z (73) a (72) už vyplýva naše tvrdenie.

.56 Definícia. Číslo $a \in \mathbf{R}$ sa nazýva *bod nespojitosti funkcie* f, ak a je hromadný bod množiny $D(f)$, ktorý spĺňa jednu z nasledujúcich podmienok:

1. $a \notin D(f)$;
2. $a \in D(f)$, ale $\lim_{x\to a} f(x)$ buď neexistuje, alebo – ak existuje – je rôzna od $f(a)$. ♠

Klasifikáciu bodov nespojitosti uvádzame v nasledujúcej tabuľke [44].

[43] Môžeme – samozrejme – zopakovať postup z bodu (a) a odvodiť naše tvrdenie z lemy .53 a vety o limite zloženej funkcie; ako však uvidíme, je to komplikovanejšie než dôkaz, ktorý uvádzame v texte:

Ak a je izolovaný bod množiny $D(g \circ f)$, niet čo dokazovať. Ak a je hromadný bod množiny $D(g \circ f)$, sú dve možnosti.

1. $f(a)$ je izolovaný bod množiny $D(g)$, vtedy z predpokladu $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (tj. zo spojitosti funkcie f v bode a) vyplýva, že funkcia $g \circ f$ je konštantná na niektorom okolí $O(a)$ bodu a (stačí zvoliť $O(a)$ s vlastnosťou $x \in O(a) \cap D(g \circ f) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{O} \cap D(g)$, kde $\mathcal{O}$ je okolie bodu $f(a)$ také, že $\mathcal{O} \cap D(g) = \{f(a)\}$);

2. ak $f(a)$ je hromadný bod množiny $D(g)$, tak z predpokladu spojitosti vyplýva $\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \lim_{y\to f(a)} g(y) = g\big(f(a)\big)$ a naše tvrdenie vyplýva z vety .17 (v ktorej je splnená podmienka (c)).

[44] Žiadame čitateľa, aby sa nedal ohúriť zdanlivou komplikovanosťou vetviacich sa možností, vyhne sa tak depresiám a následnému rozhodnutiu buď skočiť z okna alebo sa nedajbože tabuľku naučiť naspamäť.

a je hromadný bod množiny $D(f)$

existuje vlastná $\lim_{x\to a} f(x) =: b$ | neexistuje $\lim_{x\to a} f(x)$

$a \in D(f)$

$f(a) = b$ | $f(a) \neq b$ | $a \notin D(f)$ | existujú konečné navzájom rôzne jednostranné limity | iné dôvody neexistencie $\lim_{x\to a} f(x)$ | existuje nevlastná $\lim_{x\to a} f(x)$

spojitosť | *odstrániteľná nespojitosť* | *neodstrániteľná nespojitosť*

body nespojitosti 1. druhu | *body nespojitosti 2. druhu*

Nasledujúcich 6 funkcií dokumentuje jednotlivé možnosti uvedené v štvrtom riadku našej tabuľky, vo všetkých prípadoch nás zaujíma spojitosť v bode $a = 0$:

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = \begin{cases} x\,, & \text{ak} \quad x \neq 0 \\ 1\,, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}$, $f_3(x) = \frac{x^2}{x}$, $f_4(x) = [x]$ (kde [.] označuje celú časť), $f_5(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $f_6(x) = \frac{1}{x^2}$.

.57 Cvičenie. Každé číslo $a \in \mathbf{R}$ je bod nespojitosti 2. druhu Dirichletovej funkcie

$$\chi(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak} \quad x \notin \mathbf{Q} \\ 1\,, & \text{ak} \quad x \in \mathbf{Q} \end{cases} .$$

.58 Príklad. *Nech f je monotónna funckia definovaná na intervale I. Potom*
(a) *body nespojitosti funkcie f ležiace vnútri intervalu I sú neodstrániteľné body nespojitosti 1. druhu;*
(b) *množina všetkých bodov nespojitosti funkcie f je spočítateľná.*

(a) Nech a je bod nespojitosti funkcie f ležiaci vnútri intervalu I. Podľa dôsledku .31 v a existujú konečné jednostranné limity. Keby sa tieto limity rovnali, vyplývala by z lemy .28 existencia limity $\lim_{x\to a} f(x)$ a z nerovností v dôsledku .31 rovnosť $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, čo by znamenalo, že funkcia f je v bode a spojitá.

(b) Keďže množina všetkých bodov nespojitosti funkcie f je zjednotením množiny $\mathcal{N}$ všetkých jej bodov nespojitosti ležiacich vnútri intrevalu I s najviac dvojprvkovou množinou (ako ďalšie body nespojitosti totiž prichádzajú do úvahy už len krajné body intervalu I), stačí dokázať spočítateľnosť množiny $\mathcal{N}$.

Predpokladajme najprv, že f je rastúca. Potom každému bodu nespojitosti $a \in \mathcal{N}$ možno priradiť otvorený interval $I_a := \left(\lim_{x\to a-} f(x), \lim_{x\to a+} f(x)\right)$; pritom pre $a \neq b$ je $I_a \cap I_b = \emptyset$ $\big($ak $b < a$, tak $\lim_{x\to b+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a-} f(x)$, prvá nerovnosť vyplýva z dôsledku .30, pretože $f(a) \in A := \{f(x); x \in M_+\}$ a $\lim_{x\to b+} f(x) = \inf A$; rovnako možno uvažovať v prípade $a < b\big)$. Systém $\mathcal{I} := \{\mathcal{I}_\dashv; \dashv \in \mathcal{N}\}$ je teda systém po dvoch disjunktných nedegenerovaných intervalov, preto je spočítateľný. Pretože zobrazenie $p : \mathcal{N} \to \mathcal{I}$, $p(a) = I_a$, je bijekcia, je potom spočítateľná aj množina $\mathcal{N}$. Tým je naše tvrdenie v prípade f *rastúca* dokázané.

Ak f je neklesajúca, je funkcia $g : I \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + f(x)$, rastúca, pritom – ako vyplýva z úvah použitých v dôkaze lemy .23 – množiny bodov nespojitosti funkcií f a g sú totožné. Keďže podľa predchádzajúceho je množina všetkých bodov nespojitosti funkcie g spočítateľná, je tým naše tvrdenie dokázané aj v prípade f *neklesajúca.*

V prípade f *nerastúca* stačí využiť, že $-f$ je neklesajúca funkcia s tou istou množinou bodov nespojitosti.

Poznámka. 1. Rozbor charakteru bodov nespojitosti funkcie f možno pomocou viet .29 a .30 rozšíriť samozrejme aj na krajné body intervalu I. Nasledujúce tvrdenia sú len sľubným začiatkom, na ktorý čitateľ iste dychtivo nadviaže.

Nech $f : I \to \mathbf{R}$ je neklesajúca funkcia a α je ľavý koncový bod intervalu I. Ak $\alpha \in \mathbf{R}$, ale $\alpha \notin I$, tak α je bod nespojitosti funkcie f, ktorý je neodstrániteľný, ak f nie je zdola ohraničená (vtedy totiž $\lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$), *a je odstrániteľný, ak f je zdola ohraničená.*

Ak $\alpha \in I$, tak

$$f(a) \leq \lim_{x\to a+} f(x) \tag{74}$$

a funkcia je teda v bode α buď spojitá (ak v 74 platí rovnosť, alebo je to odstrániteľný bod nespojitosti (ak v 74 platí ostrá nerovnosť).

2. Tvrdenie (b) nášho príkladu už nemožno zlepšiť, možno totiž dokázať (čo urobíme neskôr v kapitole o číselných radoch) túto lemu.

Lema. *Nech $\mathcal{N}$ je spočítateľná množina. Potom existuje rastúca funkcia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pre ktorú je $\mathcal{N}$ množinou všetkých jej bodov nespojitosti.*

.59 Príklad. *Riemannova funkcia*

$$r(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak} \quad x \notin \mathbf{Q} \\ \frac{1}{q}\,, & \text{ak} \quad x = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N} \text{ sú nesúdeliteľné} \end{cases}$$

je spojitá v každom iracionálnom čísle, každé racionálne číslo je jej odstrániteľný bod nespojitosti.

Dokážeme, že pre každé $a \in \mathbf{R}$ platí $\lim_{x\to a} r(x) = 0$, odtiaľ už – keďže $r(a) = 0$ pre $a \notin \mathbf{Q}$ a $r(a) \neq 0$ pre $a \in \mathbf{Q}$ – bude vyplývať naše tvrdenie.

:-) Stačí si uvedomiť, že – ak $n \in \mathbf{N}$ je pevne zvolené – hodnoty $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$ môže funkcia r nadobúdať len v niektorom z bodov tvaru $\frac{k}{n}$, kde $k \in \mathbf{Z}$, a že každý bod $a \in \mathbf{R}$ má prstencové okolie, ktoré už také body neobsahuje. (-:

Nech $n \in \mathbf{N}$; ak $A_n := \left\{\frac{k}{n}; k \in \mathbf{Z}\right\}$, tak pre $x \in \mathbf{R} \setminus A_n$ je $0 \leq r(x) < \frac{1}{n}$. Ak $P(2,a)$ je prstencové okolie bodu a s polomerom 2, tak $P(2,a) \cap A_n \neq \emptyset$, ale v $P(2,a)$ môže ležať len konečne veľa prvkov množiny A_n, preto existuje $\delta := \min\{|a-x|; x \in A_n \cap P(2,a)\}$, pritom $\delta > 0$ (z rovnosti $\delta = 0$ by vyplývalo $x = a$ pre niektoré $x \in P(2,a) \cap A_n$, čo – keďže $a \notin P(2,a)$ – nie je možné). Potom $P(\delta,a) \cap A_n = \emptyset$, a teda platí

$$\Big(\forall x \in P(\delta,a)\Big) \left(|r(x)| < \frac{1}{n}\right) .$$

Keďže pre každé $\varepsilon > 0$ vieme nájsť $n \in \mathbf{N}$ tak, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$, vyplýva z predchádzajúcich úvah pravdivosť tvrdenia

$$\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists \delta > 0\Big)\Big(\forall x \in \mathbf{R}\Big)\Big(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |r(x)| < \varepsilon\Big) ,$$

čím je rovnosť $\lim_{x\to a} r(x) = 0$ dokázaná.

Poznámka. 1. Množina $\mathbf{Q}$ bodov nespojitosti funkcie r, ktorá – ako sme práve videli – má len odstrániteľné body nespojitosti, bola spočítateľná. Ukazuje sa, že to nie je náhoda; platí totiž toto tvrdenie:

Nech funkcia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ má len odstrániteľné body nespojitosti. Potom množina všetkých jej bodov nespojitosti je spočítateľná.

Dôkaz naznačíme pre záujemcov len v poznámke [45] pod čiarou a čitateľovi prenecháme tiež kontrolu správnosti dôkazu nasledujúcej lemy (ukazujúcej, že práve vyslovené tvrdenie už nemožno zlepšiť).

Lema. *Nech $\mathcal{N}$ je spočítateľná množina. Potom existuje funkcia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ taká, že množina $\mathcal{N}$ je množinou všetkých jej bodov nespojitosti.*

Dôkaz. V prípade $\mathcal{N}$ *konečná* stačí položiť

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{N} \\ 1 & \text{pre} \quad x \in \mathcal{N} \end{cases} .$$

Ak $\mathcal{N}$ je nekonečne spočítateľná, zoraďme ju do prostej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{N} \\ \frac{1}{n} & \text{pre} \quad x = a_n \end{cases} .$$

2. Človeku môže skrsnúť v hlave myšlienka [46]: keď existuje funkcia, ktorá je nespojitá len v racionálnych číslach, nedala by sa nejak zostrojiť aj funkcia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ako množinou všetkých bodov nespojitosti? Túto otázku zodpovieme (negatívne) v závere tohto odseku.

---

[45] Nech $\mathcal{I} := \{(p,q) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}; p < q\}$, nech $A_{pq} := \{a \in \mathbf{R}; \lim_{x\to a} f(x) \leq p < q \leq f(a)\}$, $B_{pq} := \{a \in \mathbf{R}; f(a) \leq p < q \leq \lim_{x\to a} f(x)\}$. Potom žiadne $\alpha \in \mathbf{R}$ nie je hromadný bod množiny A_{pq} $\big($keby $\alpha \in \mathbf{R}$ bol hromadný bod množiny A_{pq}, existovala by postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A_{pq}$ s limitou α; z vlastnosti $f(a_n) \geq q$ by vyplývalo $\lim_{x\to\alpha} f(a) \geq q$, súčasne – pretože $(\forall n \in \mathbf{N})(\lim_{x\to a_n} f(x) \leq p)$ – by bolo možné skonštruovať postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $|b_n - a_n| < \frac{1}{n}$, $f(b_n) < p + \frac{1}{n}$; potom by ale muselo – keďže $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ – platiť aj $\lim_{x\to\alpha} f(x) \leq p$, čo nie je možné, pretože $p < q\big)$. Rovnakú vlastnosť má aj každá z množín B_{pq}. Z tejto vlastnosti vyplýva, že každá z množín A_{pq}, B_{pq} je spočítateľná. $\big($Keby množina M s uvedenou vlastnosťou nebola spočítateľná, existovalo by $i \in \mathbf{N}$ tak, že v intervale $[i, i+1]$ by ležalo nekonečne veľa prvkov množiny M. Analógiou postupu z dôkazu vety .40 potom možno dokázať, že v $[i, i+1]$ leží hromadný bod množiny $M.\big)$ Pre množinu $\mathcal{N}$ všetkých bodov nespojitosti funkcie f platí $\mathcal{N} = \bigcup_{(p,q)\in\mathcal{I}} (A_{pq} \cup B_{pq})$; keďže množina $\mathcal{I}$ aj každá z množín A_{pq}, B_{pq} pre $(p,q) \in \mathcal{I}$ je spočítateľná, je spočítateľná aj množina $\mathcal{N}$.

[46] stávajú sa také veci

.60 Definícia. Funkcia f sa nazýva *spojitá*, ak je spojitá v každom bode svojho definičného oboru. Ak $\emptyset \neq M \subset D(f)$ a funkcia $f|_M$ je spojitá, hovoríme, že *funkcia f je spojitá na množine M*.

Dôležité upozornenie. Naša definícia spojitosti na množine <u>nie je</u> ekvivalentná s často sa vyskytujúcou definíciou *funkcia $f : D(f) \to \mathbf{R}$ je spojitá na množine M, ak f je spojitá v každom bode množiny M*; to ukazuje príklad Dirichletovej funkcie χ; $\chi|_{\mathbf{Q}}$ je totiž spojitá funkcia, ale χ nie je spojitá v žiadnom bode množiny $\mathbf{Q}$. Podobne funkcia [.] (celá časť) je (podľa našej definície) spojitá na intervale $[0,1)$, ale nie je pravda, že je spojitá v každom bode tohto intervalu (bod 0 je neodstrániteľný bod nespojitosti).

Príklad. Zo (stále ešte nedokázaného) tvrdenia vety .12 vyplýva:
Každá elementárna funkcia je spojitá.

Poznámka. Zavedená terminológia môže pôsobiť trocha nezvyčajným dojmom; napr. (elementárna) funkcia $\frac{1}{x^2}$ je spojitá, ale 0 je jej (neodstrániteľný) bod nespojitosti.

Ak zvolíme trochu iný uhol pohľadu, zistíme, že napriek tomu nie sú naše pojmy až tak nezmyselne zvolené: Ak číslo $a \in \mathbf{R}$ je odstrániteľný bod nespojitosti funkcie $f : M \to \mathbf{R}$, pričom $a \notin M$, je funkcia $f_1 : M \cup \{a\} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{pre} \quad x \in M \\ \lim_{x\to a} f(x) & \text{pre} \quad x = a \end{array} \right.$, spojitá v bode a (o funkcii f_1 niekedy hovoríme ako o *funkcii f spojito dodefinovanej v bode a*; takýmto spôsobom možno napríklad spojitú funkciu $e^{-\frac{1}{x^2}}$ definovanú na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ rozšíriť na spojitú funkciu s definičným oborom $\mathbf{R}$). Skutočnosť, že 0 je neodstrániteľný bod nespojitosti funkcie $\frac{1}{x^2}$, z tohto hľadiska znamená, že funkciu $\frac{1}{x^2}$ nemožno v bode 0 spojito dodefinovať (teda zväčšenie jej definičného oboru o bod nespojitosti je možné len za cenu straty spojitosti) [47].

Na záver tohto odseku ukážeme, ako možno spojitosť funkcie popísť pomocou pojmu oscilácie.

.61 Definícia. Nech je daná funkcia f. Ak $\emptyset \neq M \subset D(f)$ a f je ohraničená na M, nazýva sa číslo

$$\omega(f, M) := \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} f(x)$$

oscilácia funkcie f na množine M.

Poznámka. Pre $\emptyset \neq N \subset M$ je $\sup_{x\in N} f(x) \le \sup_{x\in M} f(x)$, $\inf_{x\in N} f(x) \ge \inf_{x\in M} f(x)$, preto $\omega(f,N) \le \omega(f,M)$. Z tejto úvahy vyplýva: ak f je ohraničená v niektorom okolí $O(\gamma, a)$ bodu $a \in D(f)$ $\big($tj. na množine $O(\gamma,a) \cap D(f)\big)$, tak funkcia $\Delta : [0,\gamma] \to \mathbf{R}, \Omega(\delta) = \omega\big(f, O(\delta,a) \cap D(f)\big)$ je neklesajúca a nezáporná. Preto podľa dôsledku .30 existuje $\lim_{\delta\to 0+} \omega\big(f, O(\delta,a)\cap D(f)\big)$.

---

[47] V tejto úvahe sme sa obmedzili len na jeden bod nespojitosti, možno ju však vykonať aj všeobecne:
Nech $\mathcal{N}$ je množina všetkých bodov nespojitosti funkcie $f : M \to \mathbf{R}$, nech $\mathcal{N} \cap M = \emptyset$; označme $\mathcal{N}_0$ množinu všetkých odstrániteľných bodov nespojitosti. Potom funkcia $f_1 : M \cup \mathcal{N}_0 \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \textit{pre} \quad x \in M \\ \lim_{x\to a} f(x) & \textit{pre} \quad a \in \mathcal{N}_0 \end{array} \right.$ je spojitá.

:-) Skôr než naznačíme dôkaz, mal by si čitateľ uvedomiť, že zdôvodnenie nie je na rozdiel od predchádzajúceho prípadu uvažujúceho len jeden bod odstrániteľnej nespojitosti až také bezprostredne zrejmé. Dodefinovanie funkcie $f : M \to \mathbf{R}$ v jedinom bode totiž nezmení – čo sa týka existencie limít – situáciu v bodoch množiny M (každý bod z M má totiž okolie, na ktorom sa funkcie f a f_1 zhodujú), v prípade dodefinovania funkcie f na množine $\mathcal{N}_0$ (ktorá môže byť nekonečná), to nie je už také jasné na prvý pohľad. (-:

Myšlienka dôkazu je nasledovná: Ak $a \in M \cup \mathcal{N}_0$ je hromadný bod množiny $M \cup \mathcal{N}_0$, tak je aj hromadný bod množiny M (pozri dôkaz lemy z poznámky 2 v paragrafe .45), preto existuje $\lim_{x\to a} f(x) = f_1(a)$. Ak zvolíme $\varepsilon > 0$, existuje okolie $O(a)$ tak, že

$$\Big(\forall x \in O(a) \cap M\Big) \left(|f(x) - f_1(a)| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{75}$$

Ak $y \in \mathcal{N}_0 \cap O(a)$, tak $f_1(y) = \lim_{x\to y} f(x)$ a z nerovnosti (75) vyplýva $|f_1(y) - f_1(a)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ (veta .24), čím sme dokázali výrok

$$\Big(\forall x \in O(a) \cap \big(M \cup \mathcal{N}_0\big)\Big) \big(|f_1(x) - f_1(a)| < \varepsilon\big) \;. \; \spadesuit$$

Takto definovaná funkcia f_1 už nemá odstrániteľné body nespojitosti. $\big($Sporom; predpokladajme, že a je odstrániteľný bod nespojitosti funkcie f_1, potom a je hromadný bod množiny $M \cup \mathcal{N}_0$, a teda aj hromadný bod množiny M. Z existencie konečnej $\lim_{x\to a} f_1(x)$ potom vyplýva aj existencia konečnej $\lim_{x\to a} f(x)$, a teda $a \in \mathcal{N}_0 \subset D(f_1)$. To je ale spor, pretože funkcia f_1 je spojitá v každom bode svojho definičného oboru.$\big)$

Špeciálne platí: *ak $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0$, tak funkcia f_1 už nemá body nespojitosti* . $\big($Množina $M \cup \mathcal{N}_0 = M \cup \mathcal{N}$ je totiž uzavretá (lema z popznámky 2 v paragrafe .45; prvky množiny M' ležia totiž buď v M alebo sú to body nespojitosti funkcie f) a z lemy .45 vyplýva, že spojitá funkcia definovaná na uzavretej množine nemá body nespojitosti.$\big)$

Definícia. Ak funkcia f je ohraničená v niektorom okolí bodu $a \in D(f)$, nazýva sa číslo

$$\omega(f,a) := \lim_{\delta\to 0+} \omega\big(f, O(\delta,a) \cap D(f)\big)$$

oscilácia funkcie f v bode a.

.62 Cvičenie. Ak funkcia $f : I \to \mathbf{R}$ je na intervale I ohraničená a bod a je vnútorný bod intervalu I, tak $\omega(f,a) \le \omega(f,I)$.

.63 Lema. *Funkcia f je v bode $a \in D(f)$ spojitá práve vtedy, keď $\omega(f,a) = 0$.* [48]

Dôkaz je založený na nasledujúcich úvahách:
"$\Rightarrow$": ak pre každé $x \in O(\delta,a) \cap D(f)$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, tak – keďže $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ je ekvivalentné s nerovnosťami $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ – platí $\sup_{x\in O(\delta,a)\cap D(f)} f(x) \le f(a) + \varepsilon$, $\inf_{x\in O(\delta,a)\cap D(f)} f(x) \ge f(a) - \varepsilon$, a teda $\omega\big(f, O(\delta,a) \cap D(f)\big) \le 2\varepsilon$;
"$\Leftarrow$": ak $\omega\big(f, O(\delta,a)\cap D(f)\big) \le \varepsilon$, tak pre všetky $x \in O(\delta,a)\cap D(f)$ platí $|f(x)-f(a)| \le \sup_{x\in O(\delta,a)\cap D(f)} f(x) - \inf_{x\in O(\delta,a)\cap D(f)} f(x) = \omega\big(f, O(\delta,a) \cap D(f)\big) < \varepsilon$.
Podrobnú realizáciu prenechávame na čitateľa.

.64 Lema. *Nech f je funkcia definovaná na $\mathbf{R}$, nech $\varepsilon > 0$. Potom množina $A_\varepsilon := \{x \in \mathbf{R}\,; f$ je ohraničená v niektorom okolí bodu x a $\omega(f,x) < \varepsilon\}$ je otvorená.*

Dôkaz. Ak $A_\varepsilon = \emptyset$, je tvrdenie zrejme pravdivé, pretože $\emptyset$ je otvorená množina.
Nech teraz $A_\varepsilon \ne \emptyset$, nech $a \in A_\varepsilon$. Keďže $\varepsilon > \omega(f,a) := \lim_{\delta\to 0+} \omega\big(f, O(\delta,a)\big)$, existuje $\Delta > 0$ tak, že $\omega\big(f, O(\Delta,a)\big) < \varepsilon$ $\big($funkcia $g(\delta) = \varepsilon - \omega\big(f, O(\delta,a)\big)$ má v bode 0 kladnú limitu, preto je na niektorom okolí tohto bodu zdola ohraničená kladnou konštantou (lema .10(b)), teda pre niektoré $\Delta > 0$ je iste $g(\Delta) > 0\big)$. Pre každé $x \in O(\Delta,a)$ potom platí $\omega(f,x) \le \omega\big(f, O(\Delta,a)\big) < \varepsilon$ (cvičenie .62). To ale znamená, že $O(\Delta,a) \subset A_\varepsilon$, teda a je vnútorný bod množiny A_ε. Keďže táto úvaha platí pre každé $a \in A_\varepsilon$, je A_ε otvorená množina.

.65 Dôsledok. *Nech f je funkcia definovaná na $\mathbf{R}$. potom množina $\mathcal{S}$ všetkých bodov, v ktorých je f spojitá, je množina typu G_δ; množina $\mathcal{N}$ všetkých bodov nespojitosti funkcie f je množina typu F_σ.*

Dôkaz. Z lemy .63 vyplýva rovnosť $\mathcal{S} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$, kde $A_{\frac{1}{n}}$ je množina A_ε z predchádzajúcej lemy pre $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Keďže každá z množín $A_{\frac{1}{n}}$ je otvorená, znamená to, že množina $\mathcal{S}$ je typu G_δ. Z rovnosti $\mathcal{N} = \mathbf{R} \setminus \mathcal{S}$ vyplýva, že $\mathcal{N}$ je potom typu F_σ (poznámka za definíciou .47).

Príklad. 1. Teraz už môžeme zodpovedať otázku z poznámky 2 za príkladom .59. Keďže množina $\mathbf{Q}$ nie je typu G_δ (príklad 2 za definíciou .47), nemôže existovať funkcia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ktorá by bola spojitá len v bodoch množiny $\mathbf{Q}$.

2. Ukážeme teraz, že informáciu z dôsledku .65 už nemožno zlepšiť. Platí totiž nasledujúce tvrdenie.

Lema. *Nech M je množina typu G_δ. Potom existuje funkcia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ktorá je spojitá práve v bodoch množiny M.*

Dôkaz. Nech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť otvorených množín taká, že $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Nech $B_n := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, potom $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ a $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť otvorených množín (lema .46(c)) taká, že $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \cdots$. Označme $C_1 := \mathbf{R} \setminus B_1$, $C_{n+1} := B_n \setminus B_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ a definujme funkciu f predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \\ \frac{1}{n} & \text{pre} \quad x \in C_n \cap \mathbf{Q} \\ -\frac{1}{n} & \text{pre} \quad x \in C_n \setminus \mathbf{Q} \end{cases} .$$

V našich ďalších úvahách využijeme nerovnosť

$$\big(\forall x \in B_k\big)\left(|f(x)| < \frac{1}{k}\right) , \tag{76}$$

[48] trochu ležérnym vyjadrením *keď $\omega(f,a) = 0$* myslíme (podobne ako v prípade limít) *keď $\omega(f,a)$ existuje a rovná sa 0*

ktorá vyplýva z rovnosti $B_k = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} C_i \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. [49] $\triangle$

Nech $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, ukážeme, že f je spojitá v bode a, tj. že

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x \in O(\delta, a)\big)\big(|f(x)| < \varepsilon\big) .$$

Nech je teda dané $\varepsilon > 0$, nájdime $N \in \mathbf{N}$ tak, aby platilo $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Keďže $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, platí aj $a \in B_N$. Pretože B_N je otvorená množina, existuje $\delta > 0$ tak, že $O(\delta, a) \subset B_N$, podľa (76) potom platí

$$\big(\forall x \in O(\delta, a)\big)\Big(|f(x)| < \frac{1}{N} < \varepsilon\Big) ,$$

čo znamená, že naše δ má požadovanú vlastnosť. $\triangle$

Ak $a \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, je iste $f(a) \neq 0$. Bod a má na výber z dvoch možností:

1. V každom okolí bodu a ležia prvky z $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$; potom ale v každom okolí bodu a nadobúda funkcia f aj nulové hodnoty, a teda – keďže $f(a) \neq 0$ – nemôže byť v bode a spojitá (ak totiž $f(a) > 0$ a f by bola spojitá v bode a, tak podľa lemy .10(b) by f v niektorom okolí bodu a nadobúdala len *kladné* hodnoty; podobné úvahy sa vzťahujú na prípad $f(a) < 0$).

2. Existuje $\gamma > 0$ tak, že $O(\gamma, a) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Potom každé okolie $O(\delta, a)$ pre $0 < \delta < \gamma$ obsahuje racionálne aj iracionálne čísla neležiace v množine $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, a funkcia f teda v každom z týchto okolí nadobúda kladné aj záporné hodnoty. Keďže $f(a) \neq 0$, nemôže byť f v bode a spojitá (zdôvodnenie je rovnaké ako v predchádzajúcom bode).

8 Vlastnosti spojitých funkcií definovaných na intervale

.66 Veta. *Nech f je spojitá funkcia definovaná na intervale I. Ak existujú body $a, b \in I$, $a < b$, tak, že $f(a)f(b) < 0$,* [50] *tak pre niektoré $c \in (a, b)$ platí $f(c) = 0$.*

Dôkaz. Predpokladajme $f(a) < 0 < f(b)$ (v prípade $f(a) > 0 > f(b)$ stačí potom už dokázané tvrdenie aplikovať na funkciu $-f$), nech $A := \{x \in [a, b]; f(x) < 0\}$. Množina A je neprázdna ($a \in A$) a zhora ohraničená ($A \subset [a, b]$), preto existuje $c := \sup A$, pritom – keďže $a \in A$ a číslo b je horné ohraničenie množiny A – platí $c \in [a, b]$. Ukážeme, že nemôže platiť 1. $f(c) < 0$ ani 2. $f(c) > 0$; odtiaľ už bude vyplývať rovnosť $f(c) = 0$ a súčasne – keďže $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ – aj inklúzia $c \in (a, b)$. V našich úvahách využijeme, že $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$, keďže f je spojitá v bode c.

1. Budeme dokazovať sporom; nech $f(c) < 0$, potom $c < b$. Z rovnosti $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ a predpokladu $f(c) < 0$ vyplýva (lema .10(c)) existencia čísla δ_1 s vlastnosťou

$$\big(\forall x \in O(\delta_1, c) \cap I\big)\big(f(x) < 0\big) .$$

Pre číslo $\delta := \min\{\delta_1, b - c\}$ potom platí $\delta > 0$ a

$$\big(\forall x \in [c, c + \delta)\big)\big(f(x) < 0\big) .$$

To ale znamená, že A musí obsahovať všetky čísla z intervalu $[c, c + \delta)$, čo nie je možné, keďže c je horné ohraničenie množiny A. Z tohto sporu vyplýva, že nerovnosť $f(c) < 0$ nemôže platiť.

2. Z nerovnosti $f(c) > 0$ by vyplývalo $c > a$; podobne ako v predchádzajúcom bode by z lemy .10(b) bolo možné odvodiť existenciu čísla $\delta > 0$ s vlastnosťou

$$\big(\forall x \in (c - \delta, c]\big)\big(f(x) > 0\big) ,$$

z ktorej by vyplývalo, že interval $(c - \delta, c]$ neobsahuje prvky množiny A. To je ale v spore s rovnosťou $c = \sup A$; podľa druhej vlastnosti supréma totiž platí

$$\big(\forall \delta > 0\big)\big((c - \delta, c] \cap A \neq \emptyset\big) .$$

[49] Inklúzia "$\supset$" vyplýva z inklúzií $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset B_k$, $C_i \subset B_i \subset B_k$, $i \geq k + 1$. Naopak; ak $x \in B_k$, tak x buď leží v $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ (a v takom prípade už netreba viacej dokazovať) alebo tam neleží. Ak $x \in B_k$ neleží v $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, tak $x \notin B_N$ pre niektoré $N \in \mathbf{N}$. Z inklúzie $B_n \subset B_N$ pre $n \geq N$ potom vyplýva $\big(\forall n \geq N\big)\big(x \in B_n\big)$, preto existuje $m := \max \mathcal{I}$, kde $\mathcal{I} := \{n \in \mathbf{N}; x \in B_n\}$ (keďže $k \in \mathcal{I}$, je $\mathcal{I} \neq \emptyset$), zrejme $m \geq k$; potom platí $x \in B_m \setminus B_{m+1} = C_{m+1}$.

[50] podmienka $f(a)f(b) < 0$ je len elegantná skratka zápisu $(f(a) < 0 \wedge f(b) > 0) \vee (f(a) > 0 \wedge f(b) < 0)$

Poznámky. 1. Alternatívny dôkaz uvedeného tvrdenia dostaneme, ak namiesto množiny A budeme uvažovať množinu $B := \{x \in [a,b]; f(x) > 0\}$, ktorá je neprázdna a zdola ohraničená. Za povšimnutie stojí, že číslo c s vlastnosťou $f(c) = 0$ získané týmto postupom nemusí byť totožné s číslom c, ktoré sme našli v našom pôvodnom dôkaze (vhodný príklad si čitateľ dokáže iste zostrojiť sám).

2. Je treba si uvedomiť, že existencia čísla c vyplývala z vety o supréme. Keby sme namiesto množiny $\mathbf{R}$ pracovali v našich úvahách s množinou $\mathbf{Q}$ (pre ktorú – ako vieme – uvedená veta neplatí), nemuselo by už tvrdenie zodpovedajúce vete .66 byť pravdivé. Príslušná analógia pre $\mathbf{Q}$ by mala podobu: *Nech I je interval v množine $\mathbf{Q}$* $\Big($tj. $I \subset \mathbf{Q}$ je neprázdna množina s vlastnosťou

$$\big(\forall \alpha, \beta \in I\big)\big(\forall x \in \mathbf{Q}\big)\big(\alpha < x < \beta \Rightarrow x \in I\big)\Big),$$

nech $f : I \to \mathbf{Q}$ je spojitá funkcia, pričom pre niektoré $a, b \in I$, $a < b$, platí $f(a)f(b) < 0$. Potom $f(c) = 0$ pre niektoré $c \in I$, $a < c < b$. Nepravdivosť tohto tvrdenia dokazuje jednoduchý príklad $I = \mathbf{Q}$, $f(x) = x^2 - 2$, $a = 1$, $b = 2$.

3. Dôsledkom vety .66 je nasledujúce tvrdenie:

Ak spojitá funkcia f definovaná na intervale I nemá v žiadnom bode $x \in I$ hodnotu 0, tak f nadobúda na I buď len kladné alebo len záporné hodnoty.

Špeciálne platí

Ak a, b, $a < b$, sú dva susedné nulové body spojitej funkcie f definovanej na intervale I, tak f na (a,b) nadobúda buď len kladné alebo len záporné hodnoty.

4. Elegantným doplnkom vety .66 zaručujúcej existenciu koreňa rovnice $f(x) = 0$ je *metóda polenia intervalu*, umožňujúca nájsť koreň rovnice $f(x) = 0$ s ľubovoľnou presnosťou:

Nech f je spojitá funkcia definovaná na intervale I, nech $a_1, b_1 \in I$, $a_1 < b_1$, $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Označme $I_1 := [a_1, b_1]$, nech $c_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}$. Ak $f(c_1) = 0$, našli sme koreň rovnice $f(x) = 0$; ak $f(c_1) \neq 0$, vyberme ten z intervalov $I_{11} := [a_1, c_1]$, $I_{12} := [c_1, b_1]$, v koncových bodoch ktorého má funkcia f opačné znamienka (tj. I_{11} v prípade $f(c_1) > 0$, I_{12} v prípade $f(c_1) < 0$) označme ho I_2 a jeho koncové body $a_2 < b_2$. Nech $c_2 := \frac{a_2 + b_2}{2}$. Ak $f(c_2) = 0$, je c_2 koreň rovnice $f(x) = 0$; ak $f(c_2) \neq 0$, vyberme ten z intervalov $I_{21} := [a_2, c_2]$, $I_{22} := [c_2, b_2]$, v koncových bodoch ktorého ... atď.

Ak náš postup neskončí po konečnom počte krokov (čo je možné len tak, že pre niektoré $n \in \mathbf{N}$ platí $f(c_n) = 0$), dostaneme postupnosť $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ vložených intervalov, ktorých prienikom je jednoprvková množina $\{c\}$. Potom z nerovností $a_n < 0 < b_n$, $n \in \mathbf{N}$ – keďže $\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n$ – a zo spojitosti funkcie f v bode c vyplýva

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to c-} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c+} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0\,,$$

teda c je koreň rovnice $f(x) = 0$, nerovnosti $a_n \leq c \leq b_n$, $n \in \mathbf{N}$, pritom umožňujú odhad čísla c zhora aj zdola.♠

Dôležitým dôsledkom vety .66 je tvrdenie .68.

.67 Definícia. Hovoríme, že funkcia f definovaná na intervale I je *darbouxovská* (alebo že *má Darbouxovu vlastnosť*), ak f zobrazí každý interval $J \subset I$ na degenerovaný alebo nedegenerovaný interval (tj. pre každý interval $J \subset I$ je množina $f(J)$ buď jednoprvková alebo je to nedegenerovaný interval).

Príklad. Dirichletova a Riemannova funkcia zrejme nie sú darbouxovské. ♠

Dôkaz nasledujúcej lemy $\big($založený len na dôslednom používaní definície *množina $I \subset \mathbf{R}$ je (degenerovaný alebo nedegenerovaný) interval práve vtedy, keď pre každé $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta < \gamma$, platí: ak $\alpha, \gamma \in I$, tak aj $\beta \in I$*$\big)$ prenechávame na čitateľa.

Lema. *Nech f je funkcia definovaná na intervale I. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(a) *f je darbouxovská;*

(b) *pre každé $a, b \in I$ také, že $a < b$ a $f(a) \neq f(b)$, platí: ak y je prvok otvoreného intervalu J s koncovými bodmi $f(a), f(b)$* $\big($tj. $J = \big(f(a), f(b)\big)$ v prípade $f(a) < f(b)$, $J = \big(f(b), f(a)\big)$ pre $f(b) < f(a)\big)$, *tak pre niektoré $c \in (a,b)$ je $f(c) = y$.*

Poznámka. Štandardné slovné vyjadrenie vlastnosti (b) z predchádzajúcej lemy znie: *funkcia f nadobúda na intervale $[a,b]$ všetky hodnoty medzi $f(a)$ a $f(b)$.*

.68 Veta. *Spojitá funkcia definovaná na intervale je darbouxovská.*

Dôkaz. Nech interval I je definičný obor spojitej funkcie f. Dokážeme, že f má vlastnosť (b) z lemy v paragrafe .67, tj. že na každom intervale $[a,b]\subset I$ nadobúda f všetky hodnoty medzi $f(a)$ a $f(b)$.

Nech teda $a,b\in I$, $a<b$, $f(a)\neq f(b)$, nech y je prvok otvoreného intervalu s koncovými bodmi $f(a),f(b)$. Definujme funkciu $f_y: I\to \mathbf{R}$ predpisom $f_y(x)=f(x)-y$; potom f_y je spojitá a $f_y(a)f_y(b)<0$, preto podľa vety .66 pre niektoré $c\in(a,b)$ platí $f_y(c)=0$, tj. $f(c)=y$. Tým je naše tvrdenie dokázané.

Poznámka. Tvrdenie predchádzajúcej vety nemožno vo všeobecnosti "obrátiť", tj. výrok *ak funkcia f definovaná na intervale je darbouxovská, tak je aj spojitá* je nepravdivý. Klasickým príkladom je funkcia

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \text{pre} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{pre} \quad x=0\end{cases},$$

ktorá nie je spojitá v bode 0, ale je darbouxovská (pri overovaní tejto skutočnosti stačí kontrolovať obrazy intervalov $J\subset\mathbf{R}$ obsahujúcich bod 0; ak totiž $0\notin J$, je funkcia $f|_J$ spojitá (funkcia $\sin\frac{1}{x}$ je elementárna funkcia s definičným oborom $\mathbf{R}\setminus\{0\}$), podľa predchádzajúcej vety je potom množina $(f|_J)(J)=f(J)$ interval).

Ako ukazuje veta .70, postačujúcou podmienkou zaručujúcou platnosť takto "obráteného" tvrdenia vety .68 je monotónnosť funkcie f.

Dôsledok. *Spojitá funkcia f definovaná na intervale I je prostá práve vtedy, keď je rýdzomonotónna.*

Dôkaz. Implikácia "$\Leftarrow$" (ktorá platí aj bez predpokladu spojitosti) by mala byť zrejmá.

"$\Rightarrow$" Dokážeme, že f je rýdzomonotónna na každom intervale $[a,b]\subset I$. Odtiaľ už bude vyplývať, že f je rýdzomonotónna, na základe tejto úvahy [51]:

Keby $f: I\to\mathbf{R}$ bola prostá, bola rýdzomonotónna na každom intervale $[a,b]\subset I$ a nebola rýdzomonotónna, existovali by čísla $a_1,a_2,b_1,b_2\in I$, pre ktoré by platilo

$$a_1<b_1\wedge f(a_1)>f(b_1)\,,\quad a_2<b_2\wedge f(a_2)<f(b_2) \tag{77}$$

(existencia dvojice (a_1,b_1) vyplýva z predpokladu, že f nie je rastúca na I a z injektívnosti f; existencia dvojice (a_2,b_2) z predpokladu, že f nie je klesajúca na I a z injektívnosti f). Nech $a:=\min\{a_1,a_2\}$, $b:=\max\{b_1,b_2\}$, potom $a<b$ a f je podľa predpokladu rýdzomonotónna na $[a,b]$. To je ale – keďže $a_1,a_2,b_1,b_2\in[a,b]$ – v spore s (77). $\triangle$

Zostáva dokázať, že f je rýdzomonotónna na každom intervale $[a,b]\subset I$. Nech teda $a,b\in I$, $a<b$. Pretože f je prostá, je buď $f(a)<f(b)$ alebo $f(a)>f(b)$.

Predpokladajme najprv $f(a)<f(b)$. Ukážeme, že f ja na $[a,b]$ rastúca. Zvoľme $c_1\in(a,b)$; keďže f je prostá, je $f(c)\neq f(a), f(c)\neq f(b)$. Ukážeme, že musí platiť

$$f(a)<f(c_1)<f(b)\,. \tag{78}$$

Z nerovnosti $f(c_1)<f(a)$ by totiž vyplývala inklúzia $\big(f(c_1),f(a)\big)\subset\big(f(c_1),f(b)\big)$, a funkcia f – ktorá je darbouxovská – by musela všetky hodnoty medzi $f(c_1)$ a $f(a)$ nadobúdať aj na intervale $[a,c_1]$ aj na intervale $[c_1,b]$, čo je v spore s jej injektívnosťou. Rovnako možno ukázať, že nemôže platiť nerovnosť $f(c_1)>f(b)$.

Zvoľme teraz $c_2\in(a,b)$, $c_2>c_1$. Zopakovaním predchádzajúcich úvah (v ktorých trojicu a,c_1,b nahradíme trojicou c_1,c_2,b) dostaneme nerovnosť

$$f(c_1)<f(c_2)<f(b)\,.$$

Tým je dokázaná pravdivosť výroku

$$\big(\forall c_1,c_2\in[a,b]\big)\big(c_1<c_2\Rightarrow f(c_1)<f(c_2)\big)\,, \tag{79}$$

čo znamená, že f je na $[a,b]$ rastúca [52].

Analogicky možno dokázať, že v prípade $f(a)>f(b)$ je f na $[a,b]$ klesajúca. ♠

:-) Pri čítaní dôkazu predchádzajúceho dôsledku zistíme, že sme vlastne nevyužívali spojitosť funkcie f, ale len jej Darbouxovu vlastnosť. Nahradením predpokladu *f je spojitá* predpokladom *f je darbouxovská* však –

[51] nejaké ďalšie uvažovanie je potrebné samozrejme len v prípade, že interval I nie je uzavretý a ohraničený; nechceli sme však dôkaz predlžovať rozlišovaním jednotlivých možností

[52] Čitateľ mohol práve získať pocit, že sme ho oklamali; doteraz sme totiž uvažovali $c_1,c_2\in(a,b)$, a v (79) naraz píšeme $c_1,c_2\in[a,b]$. Upozorňujeme, že pravdivosť (79) v prípadoch $c_1=a$, resp. $c_2=b$, vyplýva z (78).

napriek nášmu očakávaniu – nezískame všeobecnejšie tvrdenie; pre rýdzomonotónne funkcie je totiž (ako ukazuje veta .70) Darbouxova vlastnosť ekvivalentná so spojitosťou. (-:

.69 Cvičenie. Nech f je rastúca spojitá funkcia definovaná na intervale I. Potom pre každé $a, b \in I$, $a < b$, platí $f\big([a,b]\big) = \big[f(a), f(b)\big]$, $f\big((a,b)\big) = \big(f(a), f(b)\big)$. Ak $I = (\alpha, \beta)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$, tak $f(I) = \big(\lim_{x\to\alpha} f(x), \lim_{x\to\beta} f(x)\big)$.

.70 Veta. *Nech f je monotónna funkcia definovaná na intervale I. Potom f je spojitá práve vtedy, keď oborom hodnôt f je buď interval alebo jednoprvková množina* (tj. keď $f(I)$ je degenerovaný alebo nedegenerovaný interval).

Dôkaz. Implikácia "$\Rightarrow$" vyplýva z vety .68.

"$\Leftarrow$" Ak $f(I)$ je jednoprvková množina, je funkcia f konštantná, a teda spojitá.

Tvrdenie *ak $f : I \to \mathbf{R}$ je monotónna a $f(I)$ je interval, tak f je spojitá* dokážeme nepriamo, tj. dokážeme tvrdenie *ak $f : I \to \mathbf{R}$ je monotónna nespojitá funkcia, tak $f(I)$ nie je interval.* Naše úvahy obmedzíme na prípad f *neklesajúca* (v prípade f *nerastúca* potom stačí uvažovať funkciu $-f$).

Ak f nie je spojitá, je niektoré číslo $a \in I$ jej bod nespojitosti. Ak a je vnútorný bod intervalu I, tak platí

$$\lim_{x\to a-} f(x) < f(a) \quad \text{alebo} \quad f(a) < \lim_{x\to a+} f(x) .$$

:-) Podľa vety .31 je totiž $\lim_{x\to a-} f(x) \le f(a) \le \lim_{x\to a+} f(x)$; keďže z rovností $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a+} f(x)$ by vyplývala spojitosť funkcie f v bode a, musí byť buď $\lim_{x\to a-} f(x) \ne f(a)$ alebo $f(a) \ne \lim_{x\to a+} f(x)$. (-:

V prípade $\lim_{x\to a-} f(x) < f(a)$ môžeme zvoliť $\varepsilon > 0$ tak, že $a - \varepsilon \in I$, potom $f(a-\varepsilon) \le \lim_{x\to a-} f(x) < f(a)$ a z faktu, že f je rastúca, vyplýva $f(x) \ge f(a)$ pre $x \in I$, $x > a$, $f(x) \le \lim_{x\to a-} f(x)$ pre $x \in I$, $x < a$. Množina $f(I)$ teda obsahuje prvky $f(a-\varepsilon), f(a)$, ale neobsahuje žiadne číslo z intervalu $\big(\lim_{x\to a-} f(x), f(a)\big)$, teda $f(I)$ nie je interval.

Podobne v prípade $f(a) < \lim_{x\to a+} f(x)$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $a + \varepsilon \in I$ a množina $f(I)$ potom obsahuje čísla $f(a), f(a+\varepsilon)$ $\big($pritom $f(a) < \lim_{x\to a+} f(x) \le f(a+\varepsilon)\big)$, ale neobsahuje žiadne prvky intervalu $\big(f(a), \lim_{x\to a+} f(x)\big)$, a teda $f(I)$ nie je interval.

Práve uvedené úvahy možno použiť aj v prípade, že bod nespojitosti $a \in I$ je krajný bod intervalu I. Ak a je totiž ľavý koncový bod intervalu I, tak (pozri poznámku 1 v paragrafe .58) $f(a) < \lim_{x\to a+} f(x)$; ak a je pravý koncový bod intervalu I, je $\lim_{x\to a-} f(x) < f(a)$.

Dôsledok. *Inverzná funkcia f^{-1} k prostej spojitej funkcii f definovanej na intervale I je spojitá.*

Dôkaz. Ak $f : I \to \mathbf{R}$ je prostá a spojitá, tak je rýdzomonotónna (dôsledok z paragrafu .68) a jej obor hodnôt – tj. definičný obor funkcie f^{-1} – je interval (veta .70; keďže f nie je konštantná, nemôže byť množina $f(I)$ jednoprvková). f^{-1} je teda rýdzomonotónna funkcia (pretože je inverzná k rýdzomonotónnej funkcii) definovaná na intervale $f(I)$ a jej obor hodnôt je interval I. Podľa vety .70 je potom f^{-1} spojitá.

Poznámka. 1. Predchádzajúce tvrdenie možno zovšeobecniť do tejto podoby:
Inverzná funkcia f^{-1} k rýdzomonotónnej funkcii f definovanej na intervale I je spojitá.

Dôkaz naznačíme pre prípad f *rastúca* [53]. Nech $a \in D(f^{-1})$, nech $f^{-1}(a) = b$. Predpokladajme, že b je vnútorný bod intervalu I (adaptáciu našich úvah na prípad krajných bodov prenechávame na čitateľa), potom pre niektoré $\varepsilon_1 > 0$ platí $[b-\varepsilon_1, b+\varepsilon_1] \subset I$. Zvoľme $\varepsilon > 0$, nech $\varepsilon_2 := \min\{\varepsilon, \varepsilon_1\}$. Keďže f je rastúca, je $f(b-\varepsilon_2) < f(b) < f(b+\varepsilon_2)$, preto existuje $\delta > 0$ tak, že

$$f(b-\varepsilon_2) \le f(b) - \delta < f(b) < f(b) + \delta \le f(b+\varepsilon_2) . \tag{80}$$

Ukážeme, že pre $y \in O(\delta, a)$ platí $f^{-1}(y) \in O\big(\varepsilon, f^{-1}(a)\big)$: nerovnosť $a - \delta < y < a + \delta$ možno zapísať v tvare

$$f(b) - \delta < y < f(b) + \delta ,$$

z (80) potom vyplýva

$$f(b-\varepsilon_2) < y < f(b+\varepsilon_2) ,$$

[53] čitateľovi odporúčame nakresliť si obrázok

odtiaľ – pretože f^{-1} je rastúca – dostávame

$$b-\varepsilon_2<f^{-1}(y)<b+\varepsilon_2\ ,$$

z čoho – ak využijeme, že $\varepsilon_2\le\varepsilon$ a $f^{-1}(a)=b$ – už vyplýva

$$f^{-1}(a)-\varepsilon<f^{-1}(y)<f^{-1}(a)+\varepsilon\ .$$

2. Informáciu obsiahnutú v dôsledku možno ešte doplniť:

LEMA. *Nech f^{-1} je inverzná funkcia k spojitej rýdzomonotónnej funkcii f definovanej na intervale I, nech $a\in\mathbf{R}^*$. Potom platí*

(a) *ak $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, tak $\lim_{x\to\infty}f^{-1}(x)=a$;*
(b) *ak $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$, tak $\lim_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=a$;*
(c) *ak $\lim_{x\to\infty}f(x)=a$, tak $\lim_{x\to a}f^{-1}(x)=\infty$;*
(d) *ak $\lim_{x\to-\infty}f(x)=a$, tak $\lim_{x\to a}f^{-1}(x)=-\infty$.*

DÔKAZ. (a) Uvažujme prípad f *rastúca*; ak $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, platí buď $a=\infty$ alebo je a pravý koncový bod intervalu I, pričom $a\notin I$. Zvoľme $b\in I$, nech $f(b)=\beta$. Pretože f je rastúca a spojitá, platí $f\big([b,a)\big)=\big[f(b),\infty\big)=[\beta,\infty)$. Pre inverznú funkciu f^{-1} potom platí

$$f^{-1}\big([\beta,\infty)\big)=[b,a)\ . \tag{81}$$

Ak $a\in\mathbf{R}$, vyplýva z (81) rovnosť $a=\sup_{x\in[\beta,\infty)}f^{-1}(x)$. Keďže f^{-1} je rastúca funkcia, platí $a=\sup_{x\in[\beta,\infty)}f^{-1}(x)=\sup_{x\in D(f^{-1})}f^{-1}(x)$, z vety .29 potom vyplýva rovnosť $\lim_{x\to\infty}f^{-1}(x)=a$.

Ak $a=\infty$, má (81) podobu $f^{-1}\big([\beta,\infty)\big)=[b,\infty)$; to znamená, že f^{-1} je rastúca zhora neohraničená funkcia, preto (opäť podľa vety .29) je $\lim_{x\to\infty}f^{-1}(x)=\infty$.

Postup v prípade f *klesajúca* ako aj dôkaz zvyšných tvrdení je analogický.

8.1 Definícia mocninových, exponenciálnych a logaritmických funkcií

.71 Definícia mocninových funkcií s racionálnym exponentom. *Mocninovú funkciu s exponentom $\alpha\in\mathbf{Q}\setminus\{0\}$* definujeme

- pre $\alpha\in\mathbf{N}$ indukciou: funkciu f_1 definujeme na množine $\mathbf{R}$ predpisom $f_1(x)=x$ a pre $n\in\mathbf{N}$, $n\ge2$, položíme $f_n:=f_1\cdot f_{n-1}$

  Z vety .55(a) vyplýva, že $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je spojitá; pritom (pozri ??) pre n nepárne je f_n rastúca, $\lim_{x\to-\infty}f_n(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f_n(x)=\infty$; pre n párne je f_n klesajúca na $(-\infty,0]$, rastúca na $[0,\infty)$, $\lim_{x\to-\infty}f_n(x)=\lim_{x\to\infty}f_n(x)=\infty$.
- pre $\alpha=-n$, kde $n\in\mathbf{N}$, predpisom $f_{-n}(x)=\frac{1}{f_n(x)}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

  Funkcia $f_{-n}:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ je spojitá (veta .55(a)), 0 je jej neodstrániteľný bod nespojitosti; $\lim_{x\to-\infty}f_{-n}(x)=\lim_{x\to\infty}f_{-n}(x)=0$; pre n nepárne je $\lim_{x\to0-}f_{-n}(x)=-\infty$, $\lim_{x\to0+}f_{-n}(x)=\infty$; pre n párne je $\lim_{x\to0}f_{-n}(x)=\infty$.
- pre $\alpha=\frac1n$, n nepárne, $n\ge3$, ako inverznú funkciu k rastúcej spojitej funkcii f_n.

  Funkcia $f_{\frac1n}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je potom spojitá (dôsledok z paragrafu .70) a rastúca, $\lim_{x\to-\infty}f_{\frac1n}(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f_{\frac1n}(x)=\infty$ (poznámka 2 z paragrafu .70).
- pre $\alpha=\frac1n$, n párne, ako inverznú funkciu k rastúcej spojitej funkcii $f_n|_{[0,\infty)}$.

  Takto definovaná funkcia $f_{\frac1n}:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ je spojitá a rastúca, $\lim_{x\to\infty}f_{\frac1n}(x)=\infty$.
- pre ostatné $\alpha\in\mathbf{Q}\setminus\{0\}$ predpisom $f_\alpha:=f_{\frac1q}\circ f_p$, kde $p\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$, $q\in\mathbf{N}$ sú nesúdeliteľné čísla také, že $\alpha=\frac pq$.

  Funkcia f_α je spojitá (veta .55(b)), jej definičný obor, charakter prípadných bodov nespojitosti a limity v nevlastných bodoch sú jednoznačne určené funkciami $f_{\frac1q}$ a f_p, rozbor jednotlivých prípadov (ako aj podrobné zdôvodnenie všetkých v tomto paragrafe vyslovených tvrdení o mocninových funkciách) prenechávame čitateľovi.

Funkčnú hodnotu funkcie f_n $(n\in\mathbf{N})$ v bode x označujeme znakom x^n, funkčnú hodnotu funkcie $f_{\frac1n}$ znakom $x^{\frac1n}$ alebo $\sqrt[n]{x}$ (špeciálne pre $n=2$ znakom $\sqrt{x}$). O funkcii f_α $(\alpha\in\mathbf{Q}\setminus\{0\})$ budeme často hovoriť ako o *funkcii x^α*.

Poznámky. 1. Mocninové funkcie s racionálnym exponentom sme mohli definovať už v kapitole o funkciách, vtedy by sme však pri definovaní funkcií $f_{\frac{1}{n}}$ narazili na problém: keby sme napríklad – potom, čo sme odmocninu z čísla $x \geq 0$ definovali ako číslo $y \geq 0$ s vlastnosťou $y^2 = x$ – chceli funkciu $f_{\frac{1}{2}}$ definovať ako zobrazenie priraďujúce každému nezápornému číslu x jeho druhú odmocninu $\sqrt{x}$, museli by sme dokázať, že pre každé $x \geq 0$ číslo $\sqrt{x}$ existuje a je jednoznačne určené. Dôkaz jednoznačnosti nepredstavuje nejakú komplikáciu, stačí využiť trichotómu usporiadania a "pravidlá pre násobenie nerovností". Existenciu čísla $\sqrt{x}$ (ktorá v našej definícii z paragrafu .71 vyplýva z vety .70 a rovnosti $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$) možno dokázať na základe vety o supréme; číslo $y := \sup\{z \in \mathbf{Q}; z^2 < x\}$ má totiž požadovanú vlastnosť.

Keďže spojitosť takto definovanej funkcie $\sqrt{x}$ by vyžadovala ďalšie samostatné zdôvodnenie, je asi zrejmé, prečo sme uprednostnili vyčkávanie na vetu .70 a jej dôsledok, ktoré nám umožnili funkciu $\sqrt{x}$ bez problémov definovať ako spojité zobrazenie $[0,\infty)$ na $[0,\infty)$.

2. Treba si uvedomiť, že z rovnosti $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$, kde $p_1, p_2 \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $q_1, q_2 \in \mathbf{N}$, ešte nemusí vyplývať rovnosť $f_{\frac{p_1}{q_1}} = f_{\frac{p_2}{q_2}}$, kde $f_{\frac{p_1}{q_1}} := f_{\frac{1}{q_1}} \circ f_{p_1}$, $f_{\frac{p_2}{q_2}} := f_{\frac{1}{q_2}} \circ f_{p_2}$, a z tohto hľadiska sa znovu zamyslieť nad definíciou mocninovej funkcie s exponentom $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ (nie je však ťažké dokázať, že pre $x > 0$ platí $f_{\frac{p_1}{q_1}}(x) = f_{\frac{p_2}{q_2}}(x)$).

Odporúčame tiež čiatateľovi preveriť si (štandardne používané) rovnosti $(f_{\frac{1}{q}} \circ f_p)(x) = (f_p \circ f_{\frac{1}{q}})(x)$, kde čísla $p \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbf{N}$ sú nesúdeliteľné.

.72 Definícia funkcie e^x. Postup konštrukcie funkcie $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ktorej funkčnú hodnotu v bode x budeme označovať e^x (a o ktorej budeme spravidla hovoriť ako o *funkcii* e^x) rozdelíme do týchto krokov:

1. "prirodzeným spôsobom" definujeme hodnoty e^x pre $x \in \mathbf{Q}$; dokážeme, že takto definované zobrazenie $\mathbf{Q}$ do $\mathbf{R}$ je rastúce a platí $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, $(e^x)^y = e^{xy}$ [54];
2. dodefinujeme hodnoty e^x pre x iracionálne predpisom $e^x := \sup\{e^z; z \in \mathbf{Q} \wedge z < x\}$ a ukážeme, že takto definovaná funkcia $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je rastúca;
3. ukážeme, že exp je spojitá.

1. Pre $x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ položíme $\exp(x) := f_x(e)$, kde f_x je mocninová funkcia s exponentom x, tj. $\exp(x) = e^x$; v prípade $x = 0$ definujeme $\exp(0) := 1$.

Dôkaz rovností $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ a $e^{xy} = (e^x)^y$ prenecháme na čitateľa.

Pretože pre $x \in \mathbf{Q}$, $x > 0$, je funkcia f_x rastúca na $[0,\infty)$, vyplýva z nerovnosti $e > 1$ (pozri príklad .33) nerovnosť $e^x > 1^x = 1$. Pre $r, s \in \mathbf{Q}$, $r > s$, je preto $\frac{e^r}{e^s} = e^{r-s} > 1$, odtiaľ – keďže $e^s > 0$ pre každé $s \in \mathbf{Q}$ – vyplýva nerovnosť $e^r > e^s$, čo znamená, že funkcia exp je na $\mathbf{Q}$ rastúca.

2. Nech $x < y$.

a) Ak $x, y \in \mathbf{Q}$, je $e^x < e^y$, pretože funkcia exp je rastúca na $\mathbf{Q}$.

b) Ak $x \in \mathbf{Q}$, $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, vyplýva z definície čísla e^y nerovnosť $e^x \leq e^y$. Keby platilo $e^x = e^y$, bolo by číslo e^x horným ohraničením množiny $\{e^z; z \in \mathbf{Q} \wedge z < y\}$, a teda pre všetky prvky u neprázdnej množiny $(x,y) \cap \mathbf{Q}$ by platilo $e^x \geq e^u$, čo je ale v spore s faktom, že $\exp|_{\mathbf{Q}}$ je rastúca funkcia. Tým je dokázaná nerovnosť $e^x < e^y$.

c) Ak $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $y \in \mathbf{Q}$, je – pretože $\exp|_{\mathbf{Q}}$ je rastúca funkcia – číslo e^y horné ohraničenie množiny $A := \{e^z; z \in \mathbf{Q} \wedge z < x\}$, z definície čísla e^x potom vyplýva nerovnosť $e^x \leq e^y$. Keďže ale iste existuje číslo $u \in \mathbf{Q}$ tak, že $x < u < y$, pričom e^u je z rovnakého dôvodu ako e^y horné ohraničenie množiny A a platí $e^u < e^y$ (pretože $\exp|_{\mathbf{Q}}$ je rastúca), nie je e^y najmenšie horné ohraničenie množiny A, preto $e^x \neq e^y$. Tým je nerovnosť $e^x < e^y$ dokázaná.

d) Ak $x, y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, existuje číslo $u \in \mathbf{Q}$ tak, že $x < u < y$. Podľa b) a c) potom platí $e^x < e^u < e^y$, čo dokazuje nerovnosť $e^x < e^y$ aj v tomto prípade.

3. Z vety .29(a) a dôsledkov .30(a) a .31 vyplýva, že spojitosť funkcie exp v bode x bude dokázaná, ak overíme rovnosť $\lim_{u\to x-} e^u = \lim_{z\to x+} e^z$, tj. $\alpha := \sup\{e^u; u < x\} = \inf\{e^z; z > x\} =: \beta$, pritom už vieme (dôsledok .31), že platí $\alpha \leq \beta$.

Pre každé $n \in \mathbf{N}$ existujú čísla $u, z \in \mathbf{Q}$ tak, že $u < x < z$ a $u - z \leq \frac{1}{n}$ [55]. Potom

$$e^u < \alpha \leq \beta < e^z\ , \tag{82}$$

súčasne

$$e^z - e^u = e^u\left(e^{z-u} - 1\right) \leq e^x\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \tag{83}$$

[54] pripomeňme, že číslo $\left(e^x\right)^y$ je funkčná hodnota mocninovej funkcie s exponentom y v bode e^x

[55] stačí položiť $u := \max\left(A \cap (-\infty, x)\right)$, $z := \min\left(A \cap (x,\infty)\right)$, kde $a := \left\{\frac{k}{2n}; k \in \mathbf{Z}\right\}$; potom buď $z - u = \frac{1}{2n}$ (ak $x \notin A$) alebo $z - u = \frac{1}{n}$ (ak $x \in A$)

(posledná nerovnosť vyplýva z nerovností $e^u < e^x$ a $e^0 = 1 < e^{z-u} \le e^{\frac{1}{n}}$, ktoré sú dôsledkom nerovností $u < x$, $0 < z - u \le \frac{1}{n}$ a faktu, že exp je rastúca funkcia). Z (82) vyplýva

$$0 \le \beta - \alpha < e^z - e^u \ ,$$

z (82) potom dostávame

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \left(0 \le \beta - \alpha < e^x \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right) \ . \tag{84}$$

Keďže $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ (príklad .26), je $\lim_{n\to\infty} \left[e^x \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right] = e^x \cdot \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0$, z (84) na základe vety .25 $\left(\text{pre } \mathcal{P} = \mathbf{R}, M = \mathbf{N}, f(n) \equiv 0, g(n) \equiv \beta - \alpha, h(n) = e^x \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right)$ potom vyplýva rovnosť $\beta - \alpha = 0$. Tým je spojitosť funkcie exp v bode x dokázaná. $\triangle$

Dokážeme ešte rovnosť

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad \text{pre} \quad x \in \mathbf{R}\,,\ y \in \mathbf{Q} \tag{85}$$

$\big(y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ešte nemôžeme uvažovať z toho jednoduchého dôvodu, že zatiaľ sme nedefinovali umocňovanie na iracionálny exponent, a teda symbol $(e^x)^y$ pre $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ pre nás v tomto okamihu nemá zmysel$\big)$. Iste existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{Q}$ s limitou x, potom $\lim_{n\to\infty}(x_n y) = xy$ a

$$(e^x)^y = \lim_{n\to\infty} (e^{x_n})^y = \lim_{n\to\infty} e^{x_n y} = e^{xy} \ ,$$

pričom prvá rovnosť vyplýva zo spojitosti funkcie $f_y \circ \exp$ (kde f_y je mocninová funkcia s exponentom y), druhá z platnosti rovnosti $(e^x)^y = e^{xy}$ pre $x, y \in \mathbf{Q}$ a tretia zo spojitosti funkcie exp. $\triangle$

Keďže funkcia exp je rastúca, existujú $\lim_{x\to\infty} e^x$ a $\lim_{x\to-\infty} e^x$. Z príkladu .32 (pre $q = e$) a lemy .11(a) vyplýva rovnosť $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$; použitím substitúcie $t = -x$ potom

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0 \ .$$

.73 Definícia funkcie ln**.** Inverzná funkcia k spojitej rastúcej funkcii exp sa nazýva *prirodzený logaritmus* a označuje sa ln. $\triangle$

Funkcia ln je teda rastúca, jej definičný obor je interval $(0, \infty)$, oborom hodnôt je $\mathbf{R}$; ďalej $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ (lema z poznámky 2 v paragrafe .70); $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln x < 0$ pre $x \in (0,1)$, $\ln x > 0$ pre $x \in (1, \infty)$.

.74 Definícia funkcie a^x pre $a > 0$, $a \ne 1$. *Exponenciálnu funkciu so základom a* ($a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$), $\exp_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ktorej funkčnú hodnotu v bode x budeme označovať a^x (a o ktorej budeme spravidla hovoriť ako o *funkcii a^x*) možno skonštruovať obdobne ako funkciu exp v paragrafe .72 $\big($v prípade $a \in (0,1)$ bude ovšem funkcia $\exp_a|_{\mathbf{Q}}$ získaná v prvom kroku konštrukcie klesajúca a v druhom kroku položíme $a^x := \inf\{a^z; z \in \mathbf{Q} \wedge z < x\}\big)$; my však uprednostníme inú možnosť jej zavedenia a položíme

$$a^x := e^{x \ln a} \quad \triangle \tag{86}$$

Pre $a \in (1, \infty)$ je funkcia a^x spojitá a rastúca ako kompozícia spojitých rastúcich funkcií e^x a $x \ln a$ (tu využívame, že $\ln a > 0$ pre $a > 1$); pre $a \in (0,1)$ je funkcia a^x spojitá a klesajúca. $\triangle$

Ukážme ešte, že rovnosťou (86) definovaná funkcia a^x je totožná s funkciou, ktorú by sme získali konštrukciou kopírujúcou postup z paragrafu .72:

- pre $x \in \mathbf{Q}$ je $e^{x \ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^x = a^x$ podľa (85);
- pre $a \in (1, \infty)$ je funkcia a^x (definovaná v 86) spojitá a rastúca, preto pre $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ platí

  $$a^x = \lim_{z\to x-} a^z = \sup\{a^z; z \in (-\infty, x)\} = \sup\{a^z; z \in (-\infty, x) \cap \mathbf{Q}\}$$

  (odporúčame čitateľovi, aby si podrobne rozmyslel najmä dôkaz poslednej rovnosti, ktorá vypýva zo spojitosti funkcie a^x); podobne v prípade $a \in (0,1)$ možno pre $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ dokázať rovnosť

  $$a^x = \inf\{a^z; z \in (-\infty, x) \cap \mathbf{Q}\} \ .$$

.75 Definícia funkcie $\log_a$. Inverzná funkcia k rýdzomonotónnej spojitej funkcii a^x ($a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$) sa nazýva *logaritmus pri základe a* a označuje sa $\log_a$ (špeciálne v prípade $a = 10$ sa používa názov *dekadický logaritmus* a označenie log). $\triangle$

Pretože pre prosté funkcie f, g platí $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, vyplýva z rovnosti $\exp_a = f \circ g$, kde $f(x) = e^x$, $g(x) = x \ln a$, rovnosť

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \ . \tag{87}$$

.76 Definícia mocninovej funkcie s iracionálnym exponentom. *Mocninovú funkciu f_α s exponentom* $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ definujeme

- pre $\alpha \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{Q}$ na množine $[0, \infty)$ predpisom

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} e^{\alpha \ln x} & \text{pre} \quad x > 0 \\ 0 & \text{pre} \quad x = 0 \end{cases} \tag{88}$$

  (tj. ako funkciu $e^{\alpha \ln x}$ spojito dodefinovanú v bode 0; pozri poznámku v paragrafe .60); táto funkcia je spojitá, rastúca a $\lim_{x\to\infty} f_\alpha(x) = \infty$;

- pre $\alpha \in \mathbf{R}^- \setminus \mathbf{Q}$ na množine $(0, \infty)$ predpisom

$$f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x} \; ; \tag{89}$$

  táto funkcia je spojitá a klesajúca, $\lim_{x\to o} f_\alpha(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f_\alpha(x) = 0$. $\triangle$

Elementárnym dôsledkom definície mocninovej funkcie s iracionálnym exponentom je rovnosť $(e^x)^y = e^{xy}$ pre $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, ktorá dopĺňa informáciu z (85); platí totiž

$$(e^x)^y = e^{y \ln e^x} = e^{yx} \, . \quad \triangle$$

Ukážeme ešte, že naša definícia mocniny s iracionálnym exponentom je v súlade s prirodzenou myšlienkou definovať symbol x^α rovnosťou

$$x^\alpha := \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n} \, ,$$

kde $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť kladných racionálnych čísel s limitou α. Ak totiž $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ má limitu α, tak platí

$$\lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\alpha_n \ln x} = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$$

(druhá rovnosť vyplýva z (85), tretia zo spojitosti funkcie e^x v bode $\alpha \ln x$, štvrtá je definíciou symbolu x^α).

9 Vlastnosti spojitých funkcií na kompaktných množinách

.77 Veta. *Spojitá funkcia f definovaná na kompaktnej množine K, $\emptyset \neq K \subset \mathbf{R}$* (teda špeciálne na uzavretom ohraničenom intervale) *je ohraničená.*

Dôkaz. Každý bod $x \in K$ má okolie $O(x)$ také, že f je ohraničená na $O(x) \cap K$ (ak x je izolovaný bod množiny K, stačí zvoliť $O(x)$ s vlastnosťou $O(x) \cap K = \{x\}$, v prípade, že $x \in K$ je hromadný bod množiny K, vyplýva existencia okolia $O(x)$ z rovnosti $f(x) = \lim_{u\to x} f(u)$ a lemy .10(a)). Systém $\{O(x); x \in K\}$ týchto okolí je otvorené pokrytie kompaktnej množiny K, preto existuje (definícia .49) jeho konečné podpokrytie $\{O(x_1), \ldots, O(x_n)\}$; pre množinu K teda platí $K \subset \bigcup_{i=1}^n O(x_i)$, preto

$$K = \bigcup_{i=1}^n \left(O(x_i) \cap K\right) \, . \tag{90}$$

Keďže funkcia ohraničená na konečnom počte množín je ohraničená aj na ich zjednotení[56], vyplýva z (90) a z ohraničenosti funkcie f na každej z množín $O(x_1) \cap K, \ldots O(x_n) \cap K$ jej ohraničenosť na množine K.

Poznámka. Pre záujemcov uvádzame ešte dva ďalšie dôkazy uvedeného tvrdenia:
1. Sporom; nech spojitá funkcia $f : K \to \mathbf{R}$ nie je ohraničená. Ak f nie je ohraničená zhora, platí

$$\big(\forall n \in \mathbf{N}\big)\big(\exists x \in K\big)\big(f(x) \geq n\big) \, , \tag{91}$$

[56]Treba si všimnúť, že v tejto úvahe je podstatné, že K je zjednotením *konečného* počtu množín, na ktorých je f ohraničená (to je tiež dôvod, prečo požadujeme kompaktnosť množiny K; tá totiž zaručuje existenciu *konečných* podpokrytí). Ak totiž $\mathcal{P} := \{A_i; i \in I\}$ je nekonečný systém množín a funkcia f je ohraničená na každej z množín tohto systému, nemusí ešte platiť, že f je ohraničená aj na $\bigcup_{i\in I} A_i$; stačí uvažovať napr. $f(x) = x$, $A_i = (-i, i)$, $i \in \mathbf{N}$ (funkcia f je totiž neohraničená na $\mathbf{R} = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$); alebo položiť $A_i := \left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right)$, $i \in \mathbf{N}$, a za f zvoliť funkciu $\frac{1}{x}$, ktorá je neohraničená na množine $(0,1) = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$.

preto existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ taká, že $f(x_n) \geq n$, [57] z tejto nerovnosti dostávame $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ (veta .19). Keďže K je kompakt, z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ možno vybrať konvergentnú podpostupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ s limitou $a \in K$ (poznámka v paragrafe .50); keďže $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ je podpostupnosť postupnosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$, musí platiť aj $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$. To je ale v spore so spojitosťou funkcie f v bode a; podľa vety .54 totiž z rovnosti $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ vyplýva rovnosť $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a)$.

Podobne možno postupovať, ak f nie je ohraničená zdola.

2. V prípade, že množina K je uzavretý ohraničený interval [58] $[a, b]$, možno vychádzať z nasledujúcich dvoch úvah, použitých aj v našom prvom dôkaze vety .77:

1. ak $x \in [a, b]$, je funkcia f ohraničená v niektorom okolí bodu x; to znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ tak, že f je ohraničená na intervale $[a, a + \varepsilon)$ v prípade $x = a$, na intervale $(b - \varepsilon, b]$ v prípade $x = b$, resp. na intervale $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, ak x je vnútorný bod intervalu $[a, b]$ (číslo $\varepsilon > 0$ zrejme možno zvoliť tak, aby uvedené intervaly boli podmnožinou množiny $[a, b]$);

2. ak f je ohraničená na množine R aj na množine S, tak je ohraničená aj na $R \cup S$.

Teraz už môžeme začať vlastný dôkaz. Množina $B := \{x \in (a, b]\ ;\ f \textit{ je ohraničená na } [a, x)\}$ je neprázdna (podľa našej prvej úvahy platí pre niektoré $\varepsilon > 0$ inklúzia $a + \varepsilon \in B$) a zhora ohraničená ($B \subset [a, b]$), preto existuje $\beta := \sup B$; zrejme $\beta \in (a, b]$. Dokážeme rovnosť $\beta = b$. Sporom; nech $\beta < b$, z našej prvej úvahy vyplýva, že f je ohraničená na $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ pre niektoré $\varepsilon > 0$. Keďže $\beta = \sup B$, v intervale $(b - \varepsilon, \beta]$ leží niektorý prvok x množiny B, teda f je ohraničená na $[a, x)$. Potom je ale f ohraničená aj na $[a, x) \cup (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) = [a, \beta + \varepsilon)$, čo znamená, že $\beta + \varepsilon \in B$; to je ale spor s rovnosťou $\beta = \sup B$. Tým je rovnosť $\beta = b$ dokázaná.

Rovnako, ako sme v práve skončenej úvahe z rovnosti $\beta = \sup B$ odvodili ohraničenosť funkcie f na intervale $[a, \beta + \varepsilon)$, môžeme teraz z rovnosti $b = \sup B$ a faktu, že pre niektoré $\varepsilon > 0$ je f ohraničená na $[b - \varepsilon, b]$, odvodiť, že funkcia f je ohraničená na intervale $[a, b]$.

.78 Veta. *Spojitá funkcia f definovaná na kompaktnej množine K má maximum a minimum.*

Dôkaz. Podľa vety .77 existujú čísla $M := \sup_{x\in K} f(x)$, $m := \inf_{x\in K} f(x)$. Ďalej budeme postupovať sporom. Ak neexistuje $\max_{x\in K} f(x)$, znamená to, že pre každé $x \in K$ je $f(x) < M$, teda $M - f(x) > 0$. Potom funkcia $g : K \to \mathbf{R}$ definovaná predpisom $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ je spojitá (veta .55(a)) na kompakte K, a podľa vety .77 aj ohraničená; existuje teda $L > 0$ tak, že

$$(\forall x \in K)\left(0 < \frac{1}{M - f(x)} < L\right) .$$

Úpravou predchádzajúcej nerovnosti dostaneme

$$(\forall x \in K)\left(f(x) < M - \frac{1}{L}\right) ,$$

[57] Existenciu postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uvedených vlastností možno zaručiť aj bez použitia axiómy výberu. Z (91) vyplýva, že pre každé $n \in \mathbf{N}$ je množina $A_n := \{x \in K; f(x) \geq n\}$ neprázdna. Keďže A_n je zhora ohraničená (to vyplýva z inklúzie $A_n \subset K$ a vety .50), existuje $\alpha := \sup A_n$, zopakovaním postupu dôkazu lemy .51 možno dokázať inklúziu $\alpha \in K$. Dokážeme, že $\alpha \in A_n$. Sporom, nech $\alpha \notin A_n$, tj. nech $f(\alpha) < n$. Potom existuje okolie $O(\varepsilon, \alpha)$ s vlastnosťou

$$\Big(\forall x \in O(\varepsilon, \alpha) \cap K\Big)\Big(f(x) < n\Big) \tag{92}$$

(ak α je izolovaný bod množiny K, stačí za $O(\varepsilon, \alpha)$ zvoliť okolie $\mathcal{O}$ bodu α také, že $\mathcal{O} \cap K = \{\alpha\}$; v prípade, že α je hromadný bod množiny K, vyplýva existencia okolia $O(\varepsilon, \alpha)$ z nerovnosti $\lim_{x\to\alpha}\big(n - f(x)\big) > 0$ a lemy .10(b)). Keďže $\alpha = \sup A_n$, v intervale $(\alpha - \varepsilon, \alpha]$ leží aspoň jeden prvok množiny A_n. To je ovšem spor s (92), pretože pre každé $x \in A_n$ platí $f(x) \geq n$.

Teraz by malo byť zrejmé, že postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $x_n := \sup A_n$, má vlastnosť $f(x_n) \geq n$. $\triangle$

V prípade, že K je uzavretý ohraničený interval $[a, b]$, možno postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ požadovaných vlastností skonštruovať aj iným spôsobom (nasledujúca konštrukcia je po istých úpravách použiteľná aj vo všeobecnom prípade *K je kompaktná množina*), ktorý sa zakladá na tejto úvahe: pre každé $n \in \mathbf{N}$ je množina $B_n := \{x \in [a, b]; f(x) > n - 1\}$ neprázdna a obsahuje aspoň jedno racionálne číslo $\big($neprázdnosť množiny B_n vyplýva z (91); ak $\beta \in B_n$, tak z nerovnosti $\lim_{x\to\beta}\big(f(x) - (n-1)\big) > 0$ vyplýva na základe lemy .10(b) existencia okolia $O(\varepsilon, \beta)$ s vlastnosťou $\big(\forall x \in O(\varepsilon, \beta) \cap [a, b]\big)\big(f(x) > n - 1\big)$; keďže v každom nedegenerovanom intervale leží aspoň jedno racionálne číslo, musí aj množina $O(\varepsilon, \beta) \cap [a, b]$ – a teda aj jej nadmnožina B_n – obsahovať aj racionálne čísla$\big)$.

Množinu $\mathbf{Q}$ možno zoradiť do (nie nutne prostej) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; ak teraz položíme $x_n := a_k$, kde $k := \min\{m \in \mathbf{N}; a_m \in B_n\}$, tak týmto spôsobom definovaná postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má požadovanú vlastnosť $f(x_n) \geq n$. $\triangle$

Ak chceme takýmto spôsobom postupovať aj vo všeobecnom prípade *K je kompakt*, možno použiť túto úvahu: ak $a \in \mathbf{R}$ a K je kompakt, tak v K existuje aspoň jeden a najviac dva prvky w, ktoré majú spomedzi prvkov množiny K najmenšiu vzdialenosť od bodu a, tj. množina $V_a := \big\{w \in K; |w - a| = \min\{|x - a|; x \in K\}\big\}$ je neprázdna a konečná; každému prvku $a_n \in \mathbf{Q}$ našej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ možno teda jednoznačne priradiť číslo b_n predpisom $b_n := \min V_{a_n}$. V predchádzajúcich úvahách stačí potom namiesto $x_n := a_n$ položiť $x_n := b_n$.

[58] nasledujúci dôkaz ovšem možno (po malých úpravách) použiť aj vo všeobecnom prípade *K je kompaktná množina*

čo znamená, že číslo $M - \frac{1}{L}$ je horné ohraničenie funkcie f; to je ale – pretože $M - \frac{1}{L} < M$ – v spore s rovnosťou $M = \sup_{x \in K} f(x)$. $\triangle$

V prípade dôkazu existencie čísla $\min_{x \in K} f(x)$ možno postupovať analogicky alebo práve dokázané tvrdenie aplikovať na spojitú funkciu $-f$ a využiť rovnosť $\min f = -\max(-f)$.

Poznámka. Ani teraz nezostane čitateľ ušetrený alternatívnych dôkazov.

1. Nech $M := \sup f$. Potom

$$\big(\forall n \in \mathbf{N}\big)\big(\exists x \in K\big)\left(M - \frac{1}{n} < f(x) \le M\right) ,$$

existuje teda postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ taká, že $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$; [59] z týchto nerovností podľa vety .25 vyplýva, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Keďže K je kompakt, možno z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrať konvergentnú podpostupnosť $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ s limitou $a \in K$. Postupnosť $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ je podpostupnosť postupnosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, preto (lema .38)

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M . \tag{93}$$

Z rovnosti $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ súčasne – keďže f je spojitá v bode a – vyplýva $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a)$ (veta .54); z (93) a vety .9 o jednoznačnosti limity potom vyplýva rovnosť $f(a) = M$, čím je existencia maxima funkcie f dokázaná.

2. Vety .77 a.78 možno odvodiť z nasledujúceho tvrdenia (prvú pomocou vety .50, druhú použitím lemy .51):
LEMA. *Ak f je spojitá funkcia definovaná na kompakte K, tak $f(K)$ je kompaktná množina* [60].

DÔKAZ. Využijeme ekvivalenciu z poznámky v paragrafe .50; dokážeme teda, že z každej postupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f(K)$ možno vybrať konvergentnú postupnosť, ktorej limita tiež leží v $f(K)$.

Nech $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f(K)$, potom – pretože pre každé $y \in f(K)$ možno nájsť aspoň jedno číslo $x \in K$ s vlastnosťou $f(x) = y$ – existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ tak, že $f(x_n) = y_n$. Pretože K je kompakt, možno z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrať konvergentnú podpostupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ s limitou $x \in K$ (poznámka z paragrafu .50). Zo spojitosti funkcie f v bode x potom vyplýva (veta .54), že $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$, teda $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná podpostupnosť postupnosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ a jej limita $f(x)$ je zrejme prvkom množiny $f(K)$. ♠

V niektorých úvahách v budúcnosti budeme potrebovať, aby funkcie, s ktorými pracujeme, mali vlastnosť, ktorá je "trocha lepšia" ako spojitosť – aby boli *rovnomerne spojité.* Naším najbližším cieľom je dokázať, že spojité funkcie definované na kompaktnej množine už túto lepšiu vlastnosť majú.

.79 Definícia. Hovoríme, že funkcia f je *rovnomerne spojitá,* ak

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x, y \in D(f)\big)\big(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big) . \tag{94}$$

Hovoríme, že funkcia f je *rovnomerne spojitá na množine* M $\big(\emptyset \ne M \subset D(f)\big)$, ak je rovnomerne spojitá funkcia $f|_M$.

Poznámky. 1. Predovšetkým si treba uvedomiť, že z práve definovanej vlastnosti skutočne vyplýva spojitosť; jednoduchý dôkaz tvrdenia *ak funkcia f je rovnomerne spojitá, tak je aj spojitá* prenechávame na čitateľa.

2. Ukážeme, že obrátená implikácia vo všeobecnosti neplatí, tj. že existuje spojitá funkcia, ktorá nie je rovnomerne spojitá.

Klasickým príkladom je funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$. Keby táto funkcia bola rovnomerne spojitá, existovalo by podľa (94) k číslu $\varepsilon = 1$ [61] číslo $\delta > 0$ s vlastnosťou

$$\big(\forall x, y \in D(f)\big)\big(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1\big) . \tag{95}$$

Zvoľme špeciálne $y = \delta$. Potom pre všetky $x \in (0, 2\delta)$ je $|x - y| < \delta$, a preto podľa (95) musí platiť

$$\big(\forall x \in (0, 2\delta)\big)\big(|f(x) - f(\delta)| < 1\big) , \quad \text{tj.} \quad \big(\forall x \in (0, 2\delta)\big)\big(f(\delta) - 1 < f(x) < f(\delta) + 1\big) ,$$

čo znamená, že f je ohraničená na intervale $(0, 2\delta)$; to je ale v spore s rovnosťou $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$.

Iným štandardným príkladom je funkcia $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$. Pretože pre $a_n = \frac{2}{4n-1}$ je $f(a_n) = -1$ a pre $b_n = \frac{2}{4n+1}$ je $f(b_n) = 1$, platí

$$|f(a_n) - f(b_n)| = 2 , \tag{96}$$

[59] podobne ako v dôkaze z poznámky 1 v paragrafe .77 aj v tomto prípade sa možno pri zdôvodňovaní existencie postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaobísť bez axiómy výberu

[60] štandardné slovné vyjadrenie: *spojitý obraz kompaktu je kompakt*

[61] ako čitateľ vzápätí zistí, v nasledujúcej úvahe nie je podstatné, že sme zvolili práve $\varepsilon = 1$, rovnako dobre by nám poslúžilo každé iné $\varepsilon > 0$

súčasne – pretože $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$ – máme

$$\bigl(\forall\delta > 0\bigr)\bigl(\exists n \in \mathbf{N}\bigr)\bigl(|a_n - b_n| < \delta\bigr)\ . \tag{97}$$

Z (96) a (97) vyplýva pravdivosť tvrdenia

$$\bigl(\exists\varepsilon > 0\bigr)\bigl(\forall\delta > 0\bigr)\bigl(\exists x, y \in \mathbf{R}\bigr)\bigl(|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\bigr)$$

(stačí položiť napr. $\varepsilon = 1$ [62]), ktoré je negáciou výroku *funkcia f je rovnomerne spojitá.*

3. Hľadajme teraz, v čom je rovnomerná spojitosť lepšia od "obyčajnej" spojitosti.

Nech $f : M \to \mathbf{R}$ je funkcia , označme znakom $V(x, y, \varepsilon, \delta)$ výrokovú formu

$$\bigl(\forall y \in M\bigr)\bigl(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\bigr) \tag{98}$$

a porovnajme výroky

$$\bigl(\forall\varepsilon > 0\bigr)\bigl(\forall x \in M\bigr)\bigl(\exists\delta > 0\bigr)\bigl(V(x, y, \varepsilon, \delta)\bigr) \tag{99}$$

a

$$\bigl(\forall\varepsilon > 0\bigr)\bigl(\exists\delta > 0\bigr)\bigl(\forall x \in M\bigr)\bigl(V(x, y, \varepsilon, \delta)\bigr)\ , \tag{100}$$

z ktorých prvý hovorí, že funkcia f je spojitá, a druhý, že f je rovnomerne spojitá. Rozdiel medzi nimi (vyplývajúci zo zmeny poradia kvantifikátorov) možno popísať nasledovne:

Zvoľme $\varepsilon > 0$ pevne. Potom $\delta > 0$, ktorého existenciu zaručuje (99), *závisí na čísle x*, teda s meniacim sa x sa číslo $\delta > 0$, pre ktoré je (99) pravdivé, môže meniť. Ak však platí (100), vieme nájsť $\delta > 0$, ktoré už *nezávisí na voľbe čísla x*, teda také, ktoré vyhovuje všetkým prvkom x množiny M.

4. Všimnime si napokon, že obidve funkcie, ktoré sme uviedli v poznámke 2 ako "negatívne príklady", mali neodstrániteľný bod nespojitosti (pričom práve tento bod bol príčinou ich "negatívnosti"). Ako ukazuje nasledujúce tvrdenie, nie je to náhoda.

LEMA. *Každý bod nespojitosti rovnomerne spojitej funkcie je odstrániteľný.*

:-) Dôkaz možno založiť na myšlienkach použitých v poznámke 2 [63], my však uprednostníme nasledujúci dôkaz založený na Cauchyho-Bolzanovom kritériu. (-:

DÔKAZ. Nech f je rovnomerne spojitá funkcia, nech $a \notin D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f)$. Zvoľme $\varepsilon > 0$, potom podľa (94) existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou

$$\bigl(\forall x, y \in D(f)\bigr)\bigl(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\bigr)\ . \tag{101}$$

Nech $P(a) := O\left(\frac{\delta}{2}, a\right) \setminus \{a\}$, potom pre $x, y \in D(f)$ ležiace v $P(a)$ platí $|x - y| < \delta$; z (101) teda vyplýva

$$\bigl(\forall x, y \in P(a) \cap D(f)\bigr)\bigl(|f(x) - f(y)| < \varepsilon\bigr)\ ;$$

to znamená, že $P(a)$ má vlastnosť požadovnaú v (63). Keďže táto úvaha platí pre každé $\varepsilon > 0$, vyplýva z Cauchyho-Bolzanovho kritéria z poznámky v paragrafe .43 existencia konečnej $\lim_{x\to a} f(x)$. $\triangle$

Z práve dokázaného tvrdenia a z poznámok v paragrafe .60 vyplýva, že ku každej rovnomerne spojitej funkcii $f : M \to \mathbf{R}$ existuje spojitá funkcia g definovaná na uzavretej množine M_1 taká, že $M \subset M_1$ a $g|_M = f$.

.80 Veta. *Spojitá funkcia definovaná na kompakte je rovnomerne spojitá.*

Dôkaz. Sporom; nech $f : K \to \mathbf{R}$, kde $K \subset \mathbf{R}$ je kompaktná množina, je spojitá funkcia, ktorá nie je rovnomerne spojitá. Platí teda

$$\bigl(\exists\varepsilon > 0\bigr)\bigl(\forall\delta > 0\bigr)\bigl(\exists x, y \in K\bigr)\bigl(|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\bigr)$$

(toto tvrdenie sme získali negáciou výroku (94)), odtiaľ vyplýva, že $\bigl($ak špeciálne zvolíme $\delta = \frac{1}{n}\bigr)$ pre každé $n \in \mathbf{N}$ je množina $A_n := \bigl\{(x, y) \in K \times K; |x - y| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - f(y) \geq \varepsilon\bigr\}$ neprázdna. Ak z

[62] alebo zvoliť ľubovoľné iné $\varepsilon \in (0, 2)$

[63] Stačí dokázať, že v prípade, že $a \notin D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f)$, vedie každý z predpokladov "$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$", "$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$", "$\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje" ku sporu. V prvých dvoch prípadoch stačí vhodne upraviť naše úvahy o funkcii $\frac{1}{x}$ v bode 0; v treťom prípade použiť úvahy o funkcii $\sin\frac{\pi}{x}$, v ktorých postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nahradíme postupnosťami $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorých existenciu zaručuje cvičenie 2 z paragrafu .40 a namiesto (96) použijeme tvrdenie

$$\bigl(\exists\varepsilon > 0\bigr)\bigl(\exists N \in \mathbf{N}\bigr)\bigl(\forall n \in \mathbf{N}, n > N\bigr)\bigl(|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon\bigr)\ ,$$

ktoré vyplýva z nerovnosti $\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \succ 0$ (cvičenie z paragrafu .40 a lema .13(e)) a lemy .10(b).

každej z množí[Bn A_n vyberieme jednu dvojicu a označíme ju (x_n, y_n), dostaneme postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ také, že

$$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0 \tag{102}$$

$\big($to vyplýva z nerovností $-\frac{1}{n} \le y_n - x_n \le \frac{1}{n}$ a vety .25$\big)$. Pretože K je kompakt, možno z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrať konvergentnú podpostupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ s limitou a, pričom $a \in K$ (implikácia (b)$\Rightarrow$(a) z lemy .48). Podpostupnosti $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ zodpovedá vybraná postupnosť $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z postupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, ukážeme, že aj ona konverguje k a; z rovností $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, $\lim_{k\to\infty}(y_{n_k} - x_{n_k}) = 0$ (druhá z nich vyplýva z (102) a lemy .38) totiž dostávame

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} + \lim_{k\to\infty}(y_{n_k} - x_{n_k}) = a\ .$$

Z inklúzie $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in A_{n_k}$ súčasne vyplýva

$$\big(\exists\varepsilon > 0\big)\big(\forall k \in \mathbf{N}\big)\big(|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ge \varepsilon\big)\ , \tag{103}$$

čo znamená, že výrok $\lim_{k\to\infty}\big(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big) = 0$ je nepravdivý $\big($z (103) totiž vyplýva jeho negácia$\big)$. To je ale spor s predpokladom spojitosti funkcie f; podľa vety .54 totiž z rovnosti $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$ vyplýva rovnosť $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$, a teda aj rovnosť $\lim_{k\to\infty}\big(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big) = 0$.

Poznámky. Ako sa dalo čakať, opäť uvedieme zopár ďalších dôkazov, v prvom z nich budeme tentokrát namiesto s podpostupnosťami pracovať s otvorenými pokrytiami.

1. Nech f je spojitá funkcia definovaná na kompakte K. Zvoľme $\varepsilon > 0$ a hľadajme $\delta > 0$ vyhovujúce podmienkam z (94). Pretože f je spojitá v každom bode množiny K, existuje pre každé $a \in K$ okolie $O(\delta_a, a)$ s vlastnosťou

$$\big(\forall z \in O(\delta_a, a) \cap K\big)\left(|f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\ . \tag{104}$$

:-) Nech $\mathcal{O} := \{O(\delta_a, a); a \in K\}$ je systém všetkých takýchto okolí. Našim cieľom je nájsť $\delta > 0$ tak, aby pre $x, y \in K$ z nerovnosti $|x - y| < \delta$ už vyplývalo, že v systéme $\mathcal{O}$ vieme nájsť okolie $O(\delta_a, a)$, ktoré obsahuje súčasne x aj y; z inklúzií $x \in O(\delta_a, a) \cap K$, $y \in O(\delta_a, a) \cap K$ totiž na základe (104) dostaneme

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(a)| + |f(y) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (-:$$

Nahraďme teraz každé okolie $O(\delta_a, a)$ okolím $O\left(\frac{\delta_a}{2}, a\right)$ s polovičným polomerom [64], takto vytvorený systém $\left\{O\left(\frac{\delta_a}{2}, a\right); a \in K\right\}$ okolí je otvorené pokrytie kompaktu K, preto existuje jeho konečné podpokrytie

$$\mathcal{P} := \left\{O\left(\frac{\delta_{a_1}}{2}, a_1\right), \ldots, O\left(\frac{\delta_{a_n}}{2}, a_n\right)\right\}\ .$$

Ukážeme, že číslo

$$\delta := \min\left\{\frac{\delta_{a_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{a_n}}{2}\right\}$$

vyhovuje našim požiadavkám:

Keďže $P := \left\{\frac{\delta_{a_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{a_n}}{2}\right\}$ je konečná množina kladných čísel, je $\delta > 0$ [65]. Nech teraz $x, y \in K$, $|x - y| < \delta$. Pretože $\mathcal{P}$ je pokrytie množiny K, platí $y \in O\left(\frac{\delta_{a_i}}{2}, a_i\right)$ pre niektoré $i \in \{1, \ldots, n\}$, tj.

$$|y - a_i| < \frac{\delta_{a_i}}{2}\ .$$

Pretože $|x - y| < \delta$ a $\delta \le \frac{\delta_{a_i}}{2}$, dostávame

$$|x - a_i| \le |x - y| + |y - a_i| < \delta + \frac{\delta_{a_i}}{2} \le \frac{\delta_{a_i}}{2} + \frac{\delta_{a_i}}{2} = \delta_{a_i}\ ,$$

tj.

$$x \in O(\delta_{a_i}, a_i)\ ,$$

[64] zmysel tohto kroku sa ozrejmí čitateľovi o malú chvíľočku

[65] treba si uvedomiť, že - podobne ako v dôkaze vety .77 – využívame existenciu ***konečného*** podpokrytia $\mathcal{P}$, z ktorej vyplýva, že δ je minimum (a teda aj infímum) ***konečnej*** množiny P; infímom *nekonečnej* množiny P kladných čísel môže byť totiž aj číslo 0 $\left(\text{stačí zvoliť napr. } P := \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\right\}\right)$

teda x aj y ležia v $O(\delta_{a_i}, a_i)$ [66]. Z (104) (pre $a = a_i, z = x$, resp. $a = a_i, z = y$) potom vyplýva $|f(x) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(y) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$, a odtiaľ

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(a_i)| + |f(y) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, , \tag{105}$$

naše δ teda skutočne vyhovuje požiadavkám z (104), čím je dôkaz skončený.

2. Predpokladajme, že K je uzavretý ohraničený interval $[\alpha, \beta]$. Ak je $\varepsilon > 0$ dané, možno na dôkaz tvrdenia

$$\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x, y \in [\alpha, \beta]\big)\big(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

použiť postup z poznámky 2 v paragrafe .77, v ktorom teraz úlohu množiny B bude hrať množina

$$\Big\{ z \in (\alpha, \beta]; \big(\exists \delta > 0\big)\Big(V\big([\alpha, z), \delta\big)\Big)\Big\} \, ,$$

pričom $V(I, \delta)$ (kde $I \subset [\alpha, \beta]$ je interval a $\delta > 0$) je výroková forma

$$\big(\forall x, y \in I\big)\big(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big) \, ,$$

a úvahy 1 a 2 budú mať podobu

1. pre každé $a \in [\alpha, \beta]$ existuje $\delta_a > 0$ tak, že $V\big(O(\delta_a, a) \cap [\alpha, \beta], \delta_a\big)$ je pravdivý výrok (δ_a stačí zvoliť rovnako ako v (104));

2. nech $I, J \subset [\alpha, \beta]$ sú intervaly a $\delta_1, \delta_2 > 0$ sú čísla také, že $V(I, \delta_1)$ a $V(J, \delta_2)$ sú pravdivé výroky; ak prienik $I \cap J$ je nedegenerovaný interval dĺžky δ_3 a $\delta_4 := \frac{1}{2} \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, tak platí $V(I \cup J, \delta_4)$ (z nerovnosti $|x - y| < \delta_4$ totiž vyplýva, že body x, y ležia buď obidva v I alebo obidva v J).

Part III
Diferenciálny počet funkcií jednej reálnej premennej

10 Definícia vlastnej a nevlastnej derivácie v bode. Vety o derivácii súčtu, súčinu, zloženej a inverznej funkcie

.81 Definícia. Nech $a \in \mathbf{R}$ je hromadný bod [67] definičného oboru $D(f)$ funkcie f, pričom $a \in D(f)$. Ak existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{106}$$

označujeme ju $f'(a)$ [68] a hovoríme, že *funkcia f má v bode a vlastnú alebo nevlastnú deriváciu.* Ak je uvedená limita konečná, nazýva sa číslo $f'(a)$ *derivácia funkcie f v bode a* (hovoríme tiež, že funkcia f je *diferencovateľná v bode a*); ak je táto limita nevlastná, hovoríme o *nevlastnej derivácii funkcie f v bode a.*

Ak v (106) nahradíme limitu pre $x \to a$ jednostrannou limitou pre $x \to a+$ (resp. $x \to a-$), používame namiesto označenia $f'(a)$ označenie $f'_+(a)$ $\big($resp. $f'_-(a)\big)$ a všetky pojmy definované v predchádzajúcom odstavci dopĺňame o slovo *sprava* (resp. *zľava*).

[66] keďže práve skončená časť dôkazu bola založená na fakte, že z inklúzie $y \in O\left(\frac{\delta_{a_i}}{2}, a_i\right)$ a nerovnosti $|x - y| < \delta$ už vyplýva, že x aj y ležia v tom istom okolí $O(\delta_{a_i}, a_i)$, malo by už byť zrejmé, prečo sme naše konečné podpokrytie nevyberali hneď z pokrytia $\{O(\delta_a, a); a \in K\}$, ale až z pokrytia $\left\{O\left(\frac{\delta_a}{2}, a\right); a \in K\right\}$

[67] často sa pojem vlastnej a nevlastnej derivácie v bode a definuje za predpokladu, že a je vnútorný bod množiny $D(f)$ $\big($alebo za trocha všeobecnejšieho predpokladu, že existuje interval J tak, že $a \in J \subset D(f)\big)$.

[68] niekedy aj $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}$ alebo $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}$

Poznámka. Z častí (a) a (b) lemy .11, resp. z lemy .28 vyplývajú nasledujúce tvrdenia:

LEMA.(a) *Nech funkcia g je zúžením funkcie f na množinu M. Ak $a \in M$ je hromadný bod množiny M a existuje $f'(a)$, tak existuje aj $g'(a)$ a platí $g'(a) = f'(a)$.*

(b) *Nech sa funkcie f, g zhodujú na niektorom okolí $\mathcal{O}$ bodu $a \in D(f)$* $\Big($tj. $D(f) \cap \mathcal{O} = D(g) \cap \mathcal{O}$ a $\big(\forall x \in D(f) \cap \mathcal{O}\big)\big(f(x) = g(x)\big)\Big)$. *Potom platí: ak existuje $f'(a)$, tak existuje aj $g'(a)$ a $g'(a) = f'(a)$.*

(c) *Nech funkcia f je definovaná na množine M a bod $a \in M$ je hromadný bod množín $M_+ := M \cap (a, \infty)$, $M_- := M \cap (-\infty, a)$. Potom $f'(a)$ existuje práve vtedy, keď $f'_+(a) = f'_-(a)$;* [69] *pritom — ak $f'(a)$ existuje — je $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$.*

Príklad. 1. Ak označíme $f_1(x) := \sin x$, $f_2(x) := \ln(1+x)$, $f_3(x) := e^x$, môžeme teraz tvrdenia (b), (c) a (d) vety .12 zapísať nasledovne:

(b) $f_1'(0) = 1$ [70]; (c) $f_2'(0) = 1$; (d) $f_3'(0) = 1$.

2. Funkcia sgn má v bode 0 nevlastnú deriváciu $+\infty$ (stačí vypočítať $(\mathrm{sgn})'_+(0)$, $(\mathrm{sgn})'_-(0)$ a použiť tvrdenie (c) predchádzajúcej lemy) [71].

3. Funkcia $\sqrt[3]{x}$ má v bode 0 deriváciu $+\infty$. ♠

Tvrdenia z nasledujúceho odstavca viackrát použijeme v našich ďalších úvahách.

.82 Definícia. Hovoríme, že funkcia $f : M \to R$ je *rastúca v bode $a \in M$*, resp. *klesajúca v bode $a \in M$*, ak existuje prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a také, že

$$\big(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(f)\big) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0\right) ,$$

resp.

$$\big(\forall x \in \mathcal{P} \cap D(f)\big) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0\right) .$$

Hovoríme, že funkcia $f : M \to \mathbf{R}$ má v bode $a \in M$ *lokálne maximum*, ak existuje prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a také, že

$$\big(\forall x \in M \cap \mathcal{P}\big)\big(f(x) \le f(a)\big) . \tag{107}$$

Definíciu *lokálneho minima*, resp. *ostrého lokálneho maxima*, resp. *ostrého lokálneho minima* dostaneme, ak v (107) nerovnosť $\le$ nahradíme postupne nerovnosťami $\ge$, $<$, $>$. O lokálnych maximách a minimách hovoríme súhrnne ako o *lokáklnych extrémoch*, o ostrých lokálnych maximách a ostrých lokálnych minimách ako o ıostrých lokálnych extrémoch.

Lema. (a) *Ak je funkcia f v bode a diferencovateľná, tak je tam aj spojitá.*

(b) *Nech funkcia f má v bode a vlastnú alebo nevlastnú deriváciu. Ak $f'(a) > 0$ alebo $f'(a) = \infty$* (tj. *ak $f'(a) \succ 0$), tak f je v bode a rastúca.*

Ak $f'(a) \prec 0$, je funkcia f v bode a klesajúca.

(c) *Nech funkcia $f : M \to \mathbf{R}$ nadobúda lokálny extrém v bode $a \in M$. Potom platí:*

(c_1) *ak f nadobúda v a lokálne maximum (lokálne minimum) a existuje $f'_+(a)$* [72], *tak $f'_+(a) \preceq 0$ ($f'_+(a) \succeq 0$);*

(c_2) *ak f nadobúda v a lokálne maximum (lokálne minimum) a existuje $f'_-(a)$, tak $f'_-(a) \succeq 0$ ($f'_-(a) \preceq 0$);*

(c_3) *ak a je hromadný bod množín M_+ aj M_-* (špeciálne: ak M je interval a a je jeho vnútorný bod) *a existuje $f'(a)$, tak $f'(a) = 0$.*

Dôkaz. (a) Pretože $a \in D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f)$ (definícia .81), treba dokázať rovnosť $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (lema z paragrafu .53), tá vyplýva z nasledujúceho výpočtu

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim \left(f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right) = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a) .$$

[69] tj. (podrobne): keď existujú $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ a platí rovnosť $f'_+(a) = f'_-(a)$

[70] alebo $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 1$

[71] Tento príklad možno zovšeobecniť: ak $\lim_{x\to a-} f(x) < f(a)$ $\big($resp. $\lim_{x\to a+} f(x) > f(a)\big)$, tak $f'_-(a) = \infty$ (resp. $f'_+(a) = \infty$)

[72] predpoklad existencie $f_+(a)$ v sebe „automaticky" zahŕňa podmienku *$a \in M$ je hromadný bod množiny $M \cap (a, \infty)$* $\big($špeciálne, ak $M = [c, d]$, tak predpokladáme, že $a \in [c, d)\big)$

(b) Stačí použiť tvrdenia (b) a (c) lemy .10(b) $\big($v ktorých úlohu funkcie f, resp. bodu b bude teraz mať funkcia $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, resp. bod $f'(a)\big)$.

(c) Nech f nadobúda v bode a lokálne maximum (postup v prípade lokálneho minima je rovnaký); existuje teda prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a s vlastnosťou

$$\big(\forall x \in \mathcal{P} \cap M\big)\big(f(x) \leq f(a)\big) \ . \tag{108}$$

Dokážme teraz (c_1): pre $x \in \mathcal{P} \cap M$, $x > a$ (tj. pre $x \in \mathcal{P} \cap M_+$) z (108) dostávame $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ a — keďže podľa predpokladu existuje $f'_+(a)$, z poslednej nerovnosti a vety .24 vyplýva

$$f'_+(a) \preceq 0 \ .$$

Dôkaz tvrdenia (c_2) je obdobný.

(c_3) Keďže sú splnené predpoklady z (c_1) aj (c_2), platí $f'_+(a) \preceq 0$ a $f'_-(a) \succeq 0$. Podľa lemy v poznámke z paragrafu .81 musí platiť $f'_+(a) = f'_-(a)$; to je možné len vtedy, keď $f'_+(a) = f'_-(a) = 0$, tj. keď $f'(a) = 0$.

Poznámky – k tvrdeniu (a): 1. Obrátená implikácia neplatí; existujú teda funkcie, ktoré sú v niektorom hromadnom bode svojho definičného oboru spojité, ale nie sú tam diferencovateľné. Klasickým príkladom je funkcia $f(x) = |x|$, ktorá je spojitá v bode 0, ale — keďže $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$ — nie je diferencovateľná v bode 0 (lema z poznámky v paragrafe .81). Iným príkladom je funkcia $g(x) = \begin{cases} x \ , & \text{ak} \quad x \in \mathbf{Q} \\ 2x \ , & \text{ak} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$, ktorá je spojitá v bode 0, ale nie je tam diferencovateľná a nemá tam vlastné ani nevlastné jednostranné derivácie $\Big($neexistencia $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ vyplýva z lemy .11(c), v ktorej položíme $f(x) := \frac{g(x)}{x}$, $M_1 := \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, $M_2 := \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, podobne sa dokáže neexistencia $g'_+(0), g'_-(0)\Big)$.

2. Z existencie nevlastnej derivácie v bode a už spojitosť v tomto bode vyplývať nemusí[73]; napr. funkcia sgn má v bode 0 — ktorý je jej bodom nespojitosti — nevlastnú deriváciu $+\infty$ (príklad 2 z paragrafu .81).

– k tvrdeniu (c): 1. Toto tvrdenie možno dokázať aj na základe bodu (b); dokážeme napr (c_3). Nepriamo: keby platilo $f'(a) \succ 0$, bola by funkcia f rastúca v bode a, odtiaľ by vyplývalo, že v každom prstencovom okolí bodu a sú body s funkčnými hodnotami väčšími než $f(a)$ (tie by ležali v množine M_+) aj body s funkčnými hodnotami menšími než $f(a)$; to ale znamená, že v bode a nemôže mať f lokálny extrém; podobne by sa postupovalo v prípade $f'(a) \prec 0$.

2. Predpoklad *a je hromadný bod množiny M_+ aj množiny M_-* (tj. špeciálne *a je vnútorný bod intervalu M*) je v tvrdení (c_3) podstatný: funkcia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ s predpisom $f(x) = x$ má v bode 0 lokálne minimum, ale $f'(0) = 1$.

.83 Veta (o derivácii skalárneho násobku, súčtu, súčinu a podielu). *Nech funkcie $f, g : M \to \mathbf{R}$ sú diferencovateľné v bode $a \in M$, nech $k \in \mathbf{R}$. Potom*

(a) $(k \cdot f)'(a) = k \cdot f'(a)$;

(b) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

(c) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

(d) ak $g(a) \neq 0$, tak $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Dôkaz. (c)

$$\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)g(x) - f(a)g(x)}{x-a} + \frac{f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \right) = \\
&= \lim_{x\to a} \left(g(x)\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right) = \\
&= \lim_{x\to a} g(x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + f(a) \cdot \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = \\
&= g(a)f'(a) + f(a)g'(a) \ ;
\end{aligned}$$

[73] to zrejme súvisí s faktom, že limita $\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right)$, na výpočet ktorej sme v dôkaze lemy .82(a) mohli použiť vetu o limite súčinu, je v prípade $f'(a) = \infty$ (alebo $f'(a) = -\infty$) neurčitým výrazom typu $\infty \cdot 0$ (alebo $-\infty \cdot 0$).

pritom rovnosť $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ vyplýva z lemy .82(a).

(d) Stačí dokázať rovnosť $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$, z nej a z tvrdenia (c) bude už vyplývať tvrdenie (d):

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(-\frac{1}{g(x)g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = \\ &= -\frac{1}{g^2(a)}g'(a)\ ,\end{aligned}$$

pritom rovnosť $\lim_{x\to a}\left(-\frac{1}{g(x)g(a)}\right) = -\frac{1}{g^2(a)}$ vyplýva opäť z lemy .82(a) (a samozrejme z tvrdení (c) a (d) vety .15).

Poznámky. 1. Tvrdenie (b) možno zrejme matematickou indukciou rozšíriť nasledovne: *ak funkcie $h_1,\dots,h_n$ definované na množine M sú diferencovateľné v bode a, tak*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)'(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i'(a)\ .$$

2. Tvrdenia (a) a (b) možno doplniť ešte touto informáciou (ktorej dôkaz prenechávame na čitateľa):

(a') *ak $k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ a funkcia f má v bode a nevlastnú deriváciu, tak aj funkcia $k\cdot f$ má v bode a nevlastnú deriváciu;*

(b') *ak funkcia $g: M\to\mathbf{R}$ je v bode $a\in M$ diferencovateľná a $f: M\to\mathbf{R}$ tam má nevlastnú deriváciu $+\infty$ (resp. $-\infty$), tak $(f+g)'(a)=\infty$ $\big($resp. $(f+g)'=-\infty\big)$.*

.84 Veta (o derivácii zloženej funkcie, *reťazcové pravidlo*). *Nech funkcia f je diferencovateľná v bode a, funkcia g v bode $f(a)$. Ak $a\in D(g\circ f)$ je hromadný bod množiny $D(g\circ f)$,* [74] *tak je v bode a diferencovateľná aj funkcia $g\circ f$ a platí*

$$(g\circ f)'(a) = f'(a)\cdot g'\big(f(a)\big)\ . \tag{109}$$

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že $f'(a)\neq 0$. Potom je funkcia f buď rastúca alebo klesajúca v bode a (lema .82(b)); iste teda existuje prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a s vlastnosťou

$$\big(\forall x\in\mathcal{P}\cap D(f)\big)\big(f(x)\neq f(a)\big)\ .$$

Keďže $\mathcal{P}\cap D(g\circ f)\subset\mathcal{P}\cap D(f)$, platí aj

$$\big(\forall x\in\mathcal{P}\cap D(g\circ f)\big)\big(f(x)\neq f(a)\big) \tag{110}$$

a pre $x\in\mathcal{P}\cap D(g\circ f)$ môžeme preto písať

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} = \frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(a)\big)}{f(x)-f(a)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ . \tag{111}$$

Z (111) a z rovností

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)\ ,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(a)\big)}{f(x)-f(a)} = \Big|f(x)=y\Big| =^{75} \lim_{y\to f(a)}\frac{g(y)-g\big(f(a)\big)}{y-f(a)} = g'\big(f(a)\big)$$

potom $\big($veta .15(c) [76], lema .11(b)$\big)$ vyplýva

$$(g\circ f)'(a) = \lim_{x\to a}\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(a)\big)}{x-a} = g'\big(f(a)\big)\cdot f'(a)\ ,$$

[74] pozri poznámku pod čiarou k tvrdeniu vety .17

[75] táto rovnosť vyplýva z vety .17 o limite zloženej funkcie: použili sme substitúciu $y=f(x)$, z lemy .82(a) dostávame $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$; keďže vonkajšia zložka, ktorou je v tomto prípade funkcia $\frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}$, nie je definovaná v bode $f(a)$, je splnená podmienka (b) vety .17

[76] keďže definičné obory súčiniteľov na pravej strane rovnosti (111) $\big($tj. množiny $D(g\circ f)\cap\{x\in D(f); f(x)\neq f(a)\}$ a $D(f)\setminus\{a\}\big)$ nemusia byť totožné, využívame poznámku z paragrafu .15

čo sme chceli dokázať. $\triangle$

Nech teraz $f'(a)=0$, rovnosť (109), ktorú dokazujeme, má potom tvar

$$(g\circ f)'(a)=0\ . \tag{112}$$

Označme $D_1 := \{x\in D(g\circ f); f(x)\neq f(a)\}$, $D_2 := \{x\in D(g\circ f); f(x)=f(a)\}$ a rozlíšme tri prípady [77]:

1. Ak a nie je hromadný bod množiny D_1, tak existuje prstencové okolie $\mathcal{P}$ tohto bodu neobsahujúce prvky z D_1. Keďže takéto $\mathcal{P}$ spĺňa podmienku (110), môžeme teraz zopakovať postup, ktorý sme použili pre $f'(a)\neq 0$, čím je v tomto prípade dôkaz skončený.

2. Ak a nie je hromadný bod množiny D_2, tak pre niektoré jeho prstencové okolie $\mathcal{R}$ platí

$$\big(\forall x\in\mathcal{R}\cap D(g\circ f)\big)\big(f(x)=f(a)\big)\ ,$$

odtiaľ vyplýva

$$\big(\forall x\in\mathcal{R}\cap D(g\circ f), x\neq a\big)\left(\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a}=0\right)\ ,$$

preto

$$(g\circ f)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a}=0\ ,$$

čo sme chceli dokázať (pozri (112)).

3. Ak a je hromadný bod množiny D_1 aj množiny D_2, označme $F: D(g\circ f)\setminus\{a\}$ funkciu s predpisom

$$F(x)=\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a}\ ;$$

nech

$$F_1 := F\big|_{D_1}\ ,\quad F_2 := F\big|_{D_2}\ .$$

Keďže pre $x\in D_2\setminus\{a\}$ je $F(x)=0$, platí

$$\lim_{x\to a}F_2(x)=0\ . \tag{113}$$

Pre $x\in D_1$ možno použiť rovnosť (111), z ktorej (rovnako ako v prípade $f'(a)\neq 0$) odvodíme rovnosť

$$\lim_{x\to a}F_1(x)=f'(a)\cdot g'\big(f(a)\big)=0\ . \tag{114}$$

Z (113) a (114) vyplýva podľa lemy .11(d)

$$(g\circ f)'(a)=\lim_{x\to a}F(x)=0\ ,$$

čo je dokazovaná rovnosť (112). ♠

Nasledujúce tvrdenie možno vydedukovať z geometrickej interpretácie: Keďže grafy prostej funkcie f a inverznej funkcie f^{-1} sú súmerné podľa priamky $y=x$, je aj dotyčnica t ku grafu funkcie f v bode $\big(b,f(b)\big)$ súmerná podľa tejto priamky s dotyčnicou t' ku grafu funkcie f^{-1} v súmernom bode $\big(a,f^{-1}(a)\big)$, kde $a=f(b)$ (pokiaľ tieto dotyčnice existujú). Orientované uhly α, resp. α', zvierané priamkou t, resp. t', a kladnou časťou osi Ox teda spĺňajú rovnosť $\alpha'-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\alpha$, odtiaľ $\alpha'=\frac{\pi}{2}-\alpha$, preto — pokiaľ $\alpha\in D(\mathrm{tg})$ a $\mathrm{tg}\,\alpha\neq 0$ — platí $\mathrm{tg}\,\alpha'=\mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$. Pokiaľ $\alpha=0$ $\big($resp. $\alpha=\frac{\pi}{2}$ alebo $\alpha=-\frac{\pi}{2}\big)$, je priamka t rovnobežná s osou Ox (resp. s osou Oy), a t' je teda rovnobežná s Oy (resp. s Ox).

.85 Veta (o derivácii inverznej funkcie) *Nech prostá funkcia $f: M\to\mathbf{R}$ je diferencovateľná v bode $f^{-1}(a)$, kde $a\in f(M)$. Ak inverzná funkcia f^{-1} je v bode a spojitá, tak tam má aj vlastnú alebo nevlastnú deriváciu, pričom platí*

(a) *ak $f'\big(f^{-1}(a)\big)\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, tak $(f^{-1})'(a)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}$;*

(b) *ak $f'\big(f^{-1}(a)\big)=0$ a f je v bode $f^{-1}(a)$ rastúca, tak $(f^{-1})'(a)=\infty$;*

(c) *ak $f'\big(f^{-1}(a)\big)=0$ a f je v bode $f^{-1}(a)$ klesajúca, tak $(f^{-1})'(a)=-\infty$.*

[77] to, že nastane práve jedna z nasledujúcich možností, vyplýva z tvrdenia *ak $D=D_1\cup D_2$ a bod a je hromadný bod množiny D, tak a je hromadný bod množiny D_1 alebo hromadný bod množiny D_2*

Dôkaz. Keďže bod $b := f^{-1}(a)$ je hromadný bod množiny M (definícia .81) a funkcia f je prostá a spojitá v bode b (lema .82(a)), je bod $a = f(b)$ hromadný bod množiny $D(f^{-1}) = f(M)$ (dôkaz tohto tvrdenia prenechávame na čitateľa).

Tvrdenie (a) potom vyplýva z výpočtu

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a} = \left|f^{-1}(x)=y\right| \overset{(1)}{=} \lim_{y\to f^{-1}(a)}\frac{y-f^{-1}(a)}{f(y)-a} = \\ &= \lim_{y\to b}\frac{y-b}{f(y)-f(b)} = \lim_{y\to b}\frac{1}{\frac{f(y)-f(b)}{y-b}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{f'(b)} = \\ &= \frac{1}{f'\big(f^{-1}(a)\big)}\ ,\end{aligned}$$

pričom rovnosť (1) je dôsledkom vety .17 o limite zloženej funkcie [78].

V prípade (b) bude zápis výpočtu $(f^{-1})'(a)$ rovnaký až po rovnosť (2), ktorú teraz nahradí rovnosť

$$\lim_{y\to b}\frac{1}{\frac{f(y)-f(b)}{y-b}} = \infty\ ,$$

vyplývajúca z vety .18(b): podľa predpokladu je totiž $\lim_{y\to b}\frac{f(y)-f(b)}{y-b} = 0$ a — pretože f je v bode $b = f^{-1}(a)$ rastúca — funkcia $\frac{f(y)-f(b)}{y-b}$ je v niektorom prstencovom okolí bodu b kladná.

Postup v prípade (c) je obdobný. ♠

Postačujúcu podmienku spojitosti inverznej funkcie formuluje dôsledok z paragrafu .70 [79], z ktorého vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Dôsledok. *Inverzná funkcia f^{-1} k prostej spojitej funkcii definovanej na intervale I a diferencovateľnej v bode $b := f^{-1}(a)$ má v bode a $\big(= f(b)\big)$ vlastnú alebo nevlastnú deriváciu, pričom platí (a), (b), (c) z predchádzajúcej vety.*

Poznámky. 1. Ukážeme, že predpoklad f^{-1} *je v bode a spojitá* nemožno vo vete o derivácii inverznej funkcie vynechať:

Uvažujme funkciu $f : \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{n}; n\in\mathbf{N}\right\}$ danú predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x\ , & \text{ak}\quad x\in\mathbf{R}\setminus\left(\left\{\frac{1}{n}; n\in\mathbf{N}\right\}\cup\mathbf{N}\right) \\ \frac{1}{x}\ , & \text{ak}\quad x\in\mathbf{N}\end{cases}\qquad ;$$

táto funkcia je prostá, $f'(0) = 1$,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x\ , & \text{ak}\quad x\in\mathbf{R}\setminus\left(\left\{\frac{1}{n}; n\in\mathbf{N}\right\}\cup\mathbf{N}\right) \\ \frac{1}{x}\ , & \text{ak}\quad x\in\left\{\frac{1}{n}; n\in\mathbf{N}\right\}\end{cases}\qquad ,$$

ale $(f^{-1})'(0)$ neexistuje $\Big($vyplýva to z lemy .11(c); ak totiž označíme F funkciu definovanú na $\mathbf{R}\setminus(\mathbf{N}\cup\{0\})$ predpisom $F(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, tak pre $F_1 := F\big|_{\left\{\frac{1}{n}; n\in\mathbf{N}\right\}}$, resp. $F_2 := F\big|_{\left\{-\frac{1}{n}; n\in\mathbf{N}\right\}}$ platí $\lim_{x\to 0}F_1(x) = \infty$, resp. $\lim_{x\to 0}F_2(x) = 1\Big)$.

2. V tvrdení vety o derivácii inverznej funkcie možno ešte doplniť nasledujúci bod:

(d) *ak $f'\big(f^{-1}(a)\big) = 0$ a funkcia f v bode $b := f^{-1}(a)$ nie je ani rastúca ani klesajúca, tak $(f^{-1})'(a)$ neexistuje.*

$\Big($Ak totiž f nie je v bode b rastúca ani klesajúca, je b hromadným bodom množín $M_1 := \left\{y\in D(f)\setminus\{b\};\ \frac{f(y)-f(b)}{y-b} > 0\right\}$ aj $M_2 := \left\{y\in D(f)\setminus\{b\};\ \frac{f(y)-f(b)}{y-b} < 0\right\}$; ak teraz funkcia $F : D(f^{-1})\setminus\{a\}$ je daná predpisom $F(x) = \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a}$, tak pre $F_1 := F\big|_{f(M_1)}$, resp. $F_2 := F\big|_{f(M_2)}$ dostaneme zopakovaním postupu z dôkazu vety o derivácii inverznej funkcie rovnosti $\lim_{x\to a}F_1(x) = \infty$, resp. $\lim_{x\to a}F_2(x) = -\infty)$

Cvičenie. Dokážte nasledujúce tvrdenie dopĺňajúce vetu .85:

Ak prostá spojitá funkcia $f : M \to \mathbf{R}$ je v bode $b := f^{-1}(a)$ (kde $a\in f(M)$) spojitá a má tam nevlastnú deriváciu, tak $(f^{-1})'(a) = 0$.

[78] funkcia $y = f^{-1}(x)$, predstavujúca substitúciu, je podľa predpokladu spojitá v bode a, preto $\lim_{x\to a}f^{-1}(x) = f^{-1}(a)$, oprávnenie na použitie vety .17 vyplýva zo splnenia jej podmienky (b)

[79] a tiež poznámka 1 v tom istom paragrafe

11 Derivácia ako funkcia. Derivácie vyšších rádov. Derivácie elementárnych funkcií

.86 Definícia. Ak je daná funkcia $f : M \to \mathbf{R}$, nazýva sa funkcia, definovaná na množine D všetkých tých $x \in M$, v ktorých je funkcia f diferencovateľná, a priraďujúca každému prvku $x \in D$ hodnotu $f'(x)$, *derivácia funkcie* f a označuje sa f'.

Ak $D = M$, nazýva sa funkcia f *diferencovateľná.* Ak je naviac funkcia f' spojitá, nazýva sa f *spojito diferencovateľná.*

Funkcia f sa nazýva *diferencovateľná* (resp. *spojito diferencovateľná*) *na množine* M $\left(\emptyset \neq M \subset D(f)\right)$, ak je diferencovateľná (resp. spojito diferencovateľná) funkcia $f|_M$.

Derivácie vyšších rádov funkcie $f : M \to \mathbf{R}$ definujeme indukciou: pre $n = 0$ položíme

$$f^{(0)} := f$$

a pre $n \in \mathbf{N}$ potom definujeme

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)' .$$

Takto definovaná funkcia $f^{(n)}$ sa nazýva *n-tá derivácia funkcie f.* Ak $a \in D\left(f^{(n)}\right)$, hovoríme, že *funkcia f je v bode a n-krát diferencovateľná* (alebo, že *má n-tú deriváciu v bode a*). Ak funkcia $f^{(n-1)}$ má v bode a vlastnú alebo nevlastnú deriváciu, hovoríme, že f má v bode *a vlastnú alebo nevlastnú n-tú deriváciu.* Ak $D\left(f^{(n)}\right) = M$, hovoríme, že *funkcia f je n-krát diferencovateľná.* Pojmy *n-krát spojito diferencovateľnej funkcie* a *funkcie n-krát diferencovateľnej* (resp. *n-krát spojito diferencovateľnej na množine M*) sú pre $n > 1$ definované analogicky ako pre $n = 1$.

Namiesto označení $f^{(1)},\ f^{(2)},\ f^{(3)},\ f^{(4)},\ f^{(5)},\ f^{(6)},\ \dots$ používame aj označenia $f',\ f'',\ f''',\ f^{IV},\ f^{V},\ f^{VI},\ \dots$ [80].

.87 Lema (Leibnizova formula). *Nech funkcie $f : M \to \mathbf{R}$, $g : M \to \mathbf{R}$ sú*

(i) $(n-1)$-krát diferencovateľné $(n \in \mathbf{N})$ [81]

a

(ii) majú n-tú deriváciu v bode a.

Potom je v bode a n-krát diferencovateľná aj funkcia fg a platí

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a) \quad {}^{82}. \tag{115}$$

Dôkaz. Použijeme indukciu.

1° Pre $n = 1$ je naše tvrdenie totožné s vetou .83(c).

2° Nech teraz platí (i) a (ii) pre $n = i + 1$, tj. nech funkcie $f, g : M \to \mathbf{R}$ sú i-krát diferencovateľné a majú $(i+1)$-vú deriváciu v bode a. Z prvého z týchto predpokladov vyplýva, že pre $n = i$ je (i) a (ii) splnené v každom bode $x \in M$, preto (podľa indukčného predpokladu)

$$(fg)^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} f^{(k)}(x) g^{(i-k)}(x) . \tag{116}$$

Z predpokladov pre $n = i + 1$ ďalej vyplýva, že každá z funkcií $f^{(0)},\ f^{(1)},\ \dots,\ f^{(i)},\ g^{(0)},\ g^{(1)},\ \dots,\ g^{(i)}$ je definovaná na M a diferencovateľná v bode a, preto (tvrdenia (a) a (c) vety .83) platí

$$\left(\binom{i}{k} f^{(k)} g^{(i-k)}\right)'(a) = \binom{i}{k} f^{(k)}(a) g^{i+1-k)}(a) + \binom{i}{k} f^{(k+1)}(a) g^{(i-k)}(a) ,$$

[80] namiesto označenia $f^{(n)}$ sa používa aj symbol $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ alebo $\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$

[81] tento predpoklad v prípade $n = 1$ neobsahuje žiadnu informáciu o funkciách f, g a je vtedy totožný s predpokladom *nech funkcie f, g sú definované na množine M*

[82] pripomeňme, že $f^{(0)} := f$, $g^{(0)} := g$, $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$, pričom $0! := 1$, $(n+1)! := n!(n+1)$

odtiaľ, z (116) a z poznámky za vetou .83 potom dostávame

$$\begin{aligned}(fg)^{(i+1)}(a) &= \left((fg)^{(i)}\right)'(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{i}{k} \left(f^{(k)}g^{(i-k)}\right)'(a) = \\ &= \left[\binom{i}{0} f(a)g^{(i+1)}(a) + \binom{i}{0} f^{(1)}(a)g^{(i)}(a)\right] + \\ &+ \left[\binom{i}{1} f^{(1)}(a)g^{(i)}(a) + \binom{i}{1} f^{(2)}(a)g^{(i-1)}(a)\right] + \cdots + \\ &+ \left[\binom{i}{i-1} f^{(i-1)}(a)g^{(2)}(a) + \binom{i}{i-1} f^{(i)}(a)g^{(1)}(a)\right] + \\ &+ \left[\binom{i}{i} f^{(i)}(a)g^{(1)}(a) + \binom{i}{i} f^{(i+1)}(a)g(a)\right] .\end{aligned}$$

Na dokončenie nášho dôkazu teraz stačí s využitím rovnosti

$$\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k}$$

sčítať vždy druhý sčítanec jednej hranatej zátvorky s prvým sčítancom nasledujúcej hranatej zátvorky a na úpravu prvého sčítanca v prvej a druhého sčítanca v poslednej hranatej zátvorke použiť rovnosti

$$\binom{i}{0} = \binom{i+1}{0} = \binom{i+1}{i+1} = \binom{i}{i} = 1 .$$

.88 Derivácie základných elementárnych funkcií uvádzame v nasledujúcej tabuľke $\big($rovnosť $\big(f(x)\big)' = g(x)$, $x \in D$, pritom znamená, že funkcia g definovaná na množine D predpisom $g(x)$, je deriváciou elementárnej funkcie s predpisom $f(x)$; pokiaľ množina D nie je uvedená, je ňou definičný obor elementárnej funkcie s predpisom $g(x)\big)$.

(1) $(\mathrm{const})' \equiv 0\,,\ x \in \mathbf{R}$

(2) $(x)' \equiv 1\,,\ x \in \mathbf{R}$	(3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\})$
(4) $(e^x)' = e^x$	(5) $(a^x)' = a^x \ln a$
(6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}\,,\ x \in (0,\infty)$	(7) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\,,\ x \in (0,\infty)$
(8) $(\sin x)' = \cos x$	(9) $(\cos x)' = \sin x$
(10) $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	(11) $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
(12) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(13) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(14) $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	(15) $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
(16) $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$	(17) $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$

Venujme niekoľko poznámok odvodeniu týchto rovností.

Vzťahy (1) a (2) možno ľahko dokázať na základe definície derivácie.

Rovnosť (4) vyplýva z tvrdenia (d) vety .12 (ktorého dôkaz obsiahnutý v príkladoch .33, .34 a v cvičení .35 sa zakladá na definícii exponenciálnej a logaritmickej funkcie v paragrafoch .72 a .73) na základe nasledujúceho výpočtu

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} &= \lim_{x\to a} e^a \frac{e^{x-a}-1}{x-a} = \Big| x - a = y \Big| = {}^{83} e^a \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = \\ &= e^a .\end{aligned}$$

[83] oprávnenie k použitiu substitúcie $x - a = y$ je dané splnením podmienky (a) $\big($aj splnením podmienky (b)$\big)$ z vety .17 o limite zloženej funkcie

(5) vyplýva zo (4) na základe vety o derivácii zloženej funkcie: nech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, resp. $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je funkcia s predpisom $f(x) = x \ln a$, resp. $g(x) = e^x$. Potom $f'(x) = \ln a$ (veta .83(a) a rovnosť (2) z našej tabuľky), $g'(x) = e^x$. Keďže $a^x = (g \circ f)(x)$, je podľa vety .84

$$(a^x)' = g'\big(f(x)\big) f'(x) = e^{f(x)} f'(x) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a \ .$$

(6) možno odvodiť zo (4) na základe vety o derivácii inverznej funkcie [84]: ak funkcia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je daná predpisom $f(x) = e^x$, tak $f'(x) = e^x = f(x)$ a $\ln x = f^{-1}(x)$, preto (veta .85)

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{f\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{x} \ .$$

(7) potom vyplýva zo (6) na základe rovnosti $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\big($pozri (87)$\big)$ a vety .83(a).

Rovnosť (8) vyplýva z vety .12(b), zo spojitosti funkcie cos a [85] zo súčtových vzorcov (dôkaz všetkých uvedených skutočností zatiaľ ešte stále presahuje naše možnosti) nasledovne

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot \lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \\ &= (\cos a)\cdot \lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \left|\frac{x-a}{2} = y\right| = (\cos a)\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \\ &= \cos a \ . \end{aligned}$$

Odvodenie rovnosti (9) založené na súčtových vzorcoch, spojitosti funkcie sin a vete .12(b) je obdobné.

Vzťahy (10) a (11) vyplývajú z (8) a (9) na základe vety .83(d) o derivácii podielu.

(12) vyplýva z (8) podľa vety o derivácii inverznej funkcie: ak označíme $f := \sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$, tak $f'(x) = \cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (tvrdenie (a) lemy z poznámky v paragrafe .81) a $\arcsin x = f^{-1}(x)$, preto pre $x \in (-1,1)$ $\big($pre tieto x je totiž $f'\big(f^{-1}(x)\big) \neq 0\big)$ dostávame

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ;$$

súčasne podľa tvrdenia (b) vety .85 je $\left(f^{-1}\right)'(1) = \infty$, $\left(f^{-1}\right)'(-1) = \infty$, preto $1, -1 \notin D\Big(\left(f^{-1}\right)'\Big)$.

Odvodenie rovností (13), (14), (15) je obdobné.

Vzťahy (16) a (17) vyplývajú zo (4) a rovností $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Dôkaz rovnosti (3) bude pre $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \{0,1\}$ založený na identite [86]

$$A^r - B^r = (A-B)\left(A^{r-1} + A^{r-2}B + \cdots + A^{r-k}B^{k-1} + \cdots + AB^{r-2} + B^{r-1}\right) \ , \tag{117}$$

kde $A, B \in \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{N}$.

Začnime prípadom $\alpha = n$ ($n \in \mathbf{N}$), pre $a \neq 0$ dostávame

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\right) = na^{n-1} \ , \tag{118}$$

pričom posledná rovnosť vyplýva zo spojitosti limitovanej funkcie v bode a.

Pre $\alpha = -n$ ($n \in \mathbf{N}$) a $a \neq 0$ je

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{a^n}}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(-\frac{1}{x^n a^n}\cdot\frac{x^n - a^n}{x-a}\right) = -\frac{1}{a^{2n}}na^{n-1} = -na^{-n-1} \ . \tag{119}$$

V prípade $\alpha = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ a $q \in \mathbf{N}$ sú nesúdeliteľné, platí pre $a \neq 0$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x^p)^{\frac{1}{q}} - (a^p)^{\frac{1}{q}}}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\frac{x^p - a^p}{x-a}\cdot\right.$$

[84] samozrejme, možno tiež využiť tvrdenie (c) vety .12 (dokázané v príklade .34 na základe niektorých faktov o funkcii ln odvodených v paragrafe .73):

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x - \ln a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{\frac{x-a}{a}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \ .$$

[85] ešte presnejšie: zo spojitosti funkcie $f(x) = \cos\frac{x+a}{2}$ v bode a

[86] pri dokazovaní (3) pre prípad $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \{0,1\}$ možno postupovať aj nasledovne: v prípade $\alpha \in \mathbf{N}$ použiť matematickú indukciu (a pritom využiť rovnosť (2) a tvrdenie (c) vety .83); pomocou vety .85 potom dokázať (3) pre $\alpha = \frac{1}{n}$ a napokon pomocou vety .84 pre $\alpha = \frac{p}{q}$; aj pri tomto postupe však treba dôkaz rovnosti (3) v bode 0 robiť niekedy samostatne

$$\cdot \frac{1}{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1} + \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-2} a^{\frac{p}{q}} + \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-3} \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{2} + \dots + x^{\frac{p}{q}} \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q-2} + \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}\Bigg) =$$

$$= pa^{p-1} \frac{1}{q\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1} ,$$

pritom v prvej rovnosti sme použili (117) $\left(\text{kde sme položili } r = q\,,\ A = x^{\frac{p}{q}}\,,\ B = a^{\frac{p}{q}}\right)$, druhá rovnosť vyplýva zo spojitosti v bode a každého zo sčítancov v menovateli druhého zlomku a z už dokázaných vzťahov (118), resp. (119) [87].

Pre $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ a $a \neq 0$ vyplýva rovnosť (3) zo vzťahov (.72) a (89) (ktorými je v tomto prípade mocninová funkcia x^α definovaná) a zo (4).

Dôkaz vzťahu (3) v bode $x = 0$ $\Big($pokiaľ $0 \in D\big((x^\alpha)'\big)\Big)$ prenechávame na čitateľa.

12 Vety o strednej hodnote

.89 Veta (Rolleho veta o strednej hodnote). *Nech funkcia f je spojitá na intervale $[a,b]$ a má v každom bode $x \in (a,b)$ vlastnú alebo nevlastnú deriváciu. Ak $f(a) = f(b)$, tak pre niektoré $c \in (a,b)$ platí $f'(c) = 0$.*

Dôkaz. Pretože uzavretý ohraničený interval $[a,b]$ je kompaktná množina (veta .50), existuje podľa vety .78 $\max_{x\in[a,b]} f(x)$ aj $\min_{x\in[a,b]} f(x)$; nech $f(c_1) := \max_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(c_2) := \min_{x\in[a,b]} f(x)$. Ak aspoň jeden z bodov c_1, c_2 je vnútorným bodom intervalu $[a,b]$, tak v ňom — keďže globálny extrém na $[a,b]$ je aj lokálnym extrémom — musí mať podľa tvrdenia (c3) lemy .82 funkcia f nulovú deriváciu.

Ak c_1 ani c_2 nie sú vnútorné body intervalu $[a,b]$, vyplýva z predpokladu $f(a) = f(b)$ rovnosť $\max_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$; to znamená, že f je konštantná na $[a,b]$, a rovnosť $f'(c) = 0$ platí teda pre každé $c \in (a,b)$.

Poznámka. Na podobných myšlienkach je založený dôkaz nasledujúcej vety.

VETA. *Ak I je interval a funkcia $f : I \to \mathbf{R}$ je diferencovateľná, tak jej derivácia je darbouxovská.*

DÔKAZ. Nech $a, b \in I$, $a < b$, nech $f'(a) < f'(b)$ (postup v prípade $f'(a) > f'(b)$ je rovnaký), nech $d \in \big(f'(a), f'(b)\big)$, chceme dokázať (lema z paragrafu .67), že pre niektoré $c \in (a,b)$ platí $f'(c) = d$.

Spojitá funkcia $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ daná predpisom $g(x) = f(x) - dx$ nadobúda na $[a,b]$ globálne maximum. Pretože $g'(a) = f'(a) - d < 0$ a $g'(b) > 0$, je funkcia g klesajúca v bode a a rastúca v bode b $\big($lema .82(b)$\big)$, preto globálne maximum nemôže nadobúdať ani v a ani v b, nadobúda ho teda v niektorom vnútornom bode c intervalu $[a,b]$. Z lemy .82(c) potom vyplýva

$$0 = g'(c) = f'(c) - d ,$$

tj.

$$f'(c) = d ,$$

čo sme chceli dokázať. ♠

Nasledujúce tvrdenie, ktoré odvodíme z Rolleho vety, má názornú geometrickú interpretáciu: ak graf spojitej funkcie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ má v každom bode s výnimkou bodov $\big(a, f(a)\big)$, $\big(b, f(b)\big)$ dotyčnicu, potom niektorá z týchto dotyčníc je rovnobežná so spojnicou krajných bodov grafu funkcie f.

.90 Veta (Lagrangeova veta o strednej hodnote). *Nech funkcia f je spojitá na intervale $[a,b]$ a má v každom jeho vnútornom bode vlastnú alebo nevlastnú deriváciu. Potom pre niektoré $c \in (a,b)$ platí rovnosť*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} ,$$

tj.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) .$$

---

[87] inou možnosťou je použitie substitúcie $x^{\frac{p}{q}} = y$; ak označíme $A := a^{\frac{1}{q}}$, dostaneme (pozri tiež posledný odstavec poznámky 2 v paragrafe .71)

$$\lim_{x\to a} \frac{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p - \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p}{x - a} = \left| x^{\frac{1}{q}} = y \right| = \lim_{y\to A} \frac{y^p - A^p}{y^q - A^q} = \lim_{y\to A} \frac{\frac{y^p - A^p}{y - A}}{\frac{y^q - A^q}{y - A}} = \frac{pA^{p-1}}{qA^{q-1}} = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1} .$$

Dôkaz. Nech $F := f + g$, pričom $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ je funkcia s predpisom

$$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\ ,^{88} \tag{120}$$

potom F je spojitá, má v každom bode $x \in (a,b)$ vlastnú alebo nevlastnú deriváciu (veta .83(b) a poznámka 2 za ňou) a platí $F(a) = F(b)\quad\big(= f(a)\big)$. Funkcia F teda spĺňa všetky predpoklady Rolleho vety o strednej hodnote, preto existuje $c \in (a,b)$ tak, že

$$F'(c) = 0\ .$$

Keďže funkcie F a g sú v bode c diferencovateľné, vyplýva z rovnosti $f = F + g$ vzťah

$$f'(c) = F'(c) + g'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ ,$$

čím je náš dôkaz skončený.

Poznámka. Z predchádzajúcej vety vyplýva, že neexistuje spojitá funkcia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, ktorá by mala v každom bode $c \in (a,b)$ nevlastnú deriváciu.

Cvičenie. 1. Ak f je spojitá funkcia definovaná na intervale I a pre každý vnútorný bod x tohto intervalu platí $f'(x) = 0$, tak funkcia f je konštantná.

2. Nech f, g sú spojité funkcie definované na intervale I. Ak v každom vnútornom bode x tohto intervalu exitujú konečné $f'(x), g'(x)$ a platí $f'(x) = g'(x)$, tak sa funkcie f a g líšia o konštantu $\Big($tj. $\big(\exists k \in \mathbf{R}\big)\big(\forall x \in I\big)\big(f(x) - g(x) = k\big)\Big)$.

.91 Veta (Cauchyho veta o strednej hodnote). *Nech funkcie f, g sú spojité na $[a,b]$, pričom f má v každom bode $x \in (a,b)$ vlastnú alebo nevlastnú deriváciu a g je diferencovateľná na (a,b). Potom pre niektoré $c \in (a,b)$ platí rovnosť*

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big)\ . \tag{121}$$

Ak sú naviac splnené podmienky

(i) $g(b) \neq g(a)$*;*

(ii) $\big(\forall x \in (a,b)\big)\big(g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0\big)$,

tak (121) možno prepísať do podoby

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ . \tag{122}$$

Dôkaz. Funkcia $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ daná predpisom

$$F(x) = f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big)$$

je spojitá a má v každom bode $x \in (a,b)$ vlastnú alebo nevlastnú deriváciu (veta .83 a poznámka 2 za ňou), preto podľa vety .90 existuje $c \in (a,b)$, pre ktoré platí rovnosť

$$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}\ ,$$

tj. (keďže $F(b) = F(a) = 0$)

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = 0\ ,$$

čím je dokázaný vzťah (121).

Nech teraz platí aj (i) a (ii). Ak chceme z (121) odvodiť rovnosť (122), potrebujeme, aby boli splnené nerovnosti

$$g(b) \neq g(a)\ ,\quad g'(c) \neq 0\ . \tag{123}$$

[88] grafom funkcie g je priamka rovnobežná so spojnicou krajných bodov grafu funkcie f

Prvá z nich je totožná s predpokladom (i), druhú dokážeme nepriamo: keby $g'(c) = 0$, vyplývala by z (121) rovnosť

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = 0 \ ,$$

čo ale nie je možné, pretože $g(b) - g(a) \neq 0$ $\big($predpoklad (i)$\big)$ a $f'(c) \neq 0$ $\big($to vyplýva z rovnosti $g'(c) = 0$ a predpokladu (ii)$\big)$.

(122) teraz vyplýva z (121) a (123).

Poznámky. 1. Veta .91 zostane v platnosti, ak podmienky (i) a (ii) nahradíme podmienkou

(ii') $\big(\forall x \in (a,b)\big)\big(g'(x) \neq 0\big)$;

z predpoklaov o funkcii g a z (ii') totiž vyplýva (i) $\big($nepriamo: keby $g(b) = g(a)$, existoval by podľa vety .89 bod $c \in (a,b)$, pre ktorý by platilo $g'(c) = 0\big)$ aj (ii) $\big($keďže pre každé $x \in (a,b)$ je výrok $g'(x) = 0$ nepravdivý, je pre každé $x \in (a,b)$ pravdivá každá implikácia tvaru $g'(x) = 0 \Rightarrow V(x)$, kde V je výroková forma definovaná na (a,b); teda aj implikácia $g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0\big)$.

2. Priam klasickým príkladom chybného uvažovania je nasledujúci "dôkaz" Cauchyho vety:

"Nech sú splnené predpoklady vety .91 $\big($vrátane predpokladov (i) a (ii)$\big)$. Potom funkcie f aj g spĺňajú predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote, teda pre niektoré $c \in (a,b)$ platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ ,$$

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \ ,$$

pritom — keďže $g(b) \neq g(a)$ — vyplýva z druhej z týchto rovností nerovnosť $g'(c) \neq 0$. Ak teraz vydelíme prvú z uvedených rovností druhou, dostaneme (121)."

Hľadanie chyby prenechávame na čitateľa.

13 Vyšetrovanie priebehu funkcií

13.1 Monotónnosť

Znakom int I [89]budeme v nasledujúcich úvahách označovať množinu všetkých vnútorných bodov intervalu I $\big($teda ak I je interval $[a,b]$, resp. $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), tak int I je vždy interval $(a,b)\big)$.

.92 Veta. *Nech spojitá funkcia $f : I \to \mathbf{R}$ má v každom vnútornom bode intervalu I vlastnú alebo nevlastnú deriváciu. Potom*

(a) *f je neklesajúca (resp. nerastúca) práve vtedy, keď platí*

$$\big(\forall x \in \text{int } I\big)\big(f'(x) \succeq 0\big) \quad \Big(\textit{resp.} \quad \big(\forall x \in \text{int } I\big)\big(f'(x) \preceq 0\big)\Big) \quad ; \tag{124}$$

(b) *f je rastúca (resp. klesajúca) práve vtedy, keď platí (124) a množina $M := \{x \in I; f'(x) = 0\}$ neobsahuje žiadny nedegenerovaný interval* (tj. špeciálne: ak pre všetky $x \in$ int I platí $f'(x) \succ 0$, resp. $f'(x) \prec 0$).

Dôkaz. V (a) aj (b) dokážeme vždy prvé z dvojice uvedenených tvrdení (dôkaz tvrdení uvedených v zátvorkách je rovnaký).

(a) "$\Rightarrow$" Nech $c \in$ int I. Ak f je neklesajúca, tak platí

$$\big(\forall x \in I \setminus \{c\}\big) \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0\right) \ ,$$

z vety .24 potom vyplýva nerovnosť $f'(c) \succeq 0$.

"$\Leftarrow$" Nech $x, y \in I$, $x < y$. Keďže funkcia f spĺňa na intervale $[x,y]$ všetky predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (veta .90), platí pre niektoré $c \in (x,y) \subset$ int I rovnosť

$$f(y) - f(x) = f'(c)(x - y) \ .$$

[89]int je skratka slova *interior* (=vnútro)

Z nerovností $x > y$ a $f'(c) \geq 0$ $\big($druhá z nich vyplýva z nášho predpokladu (124) [90]$\big)$ potom vyplýva $f(y) \geq f(x)$. Keďže táto úvaha platí pre každé $x, y \in I$, $x < y$, je f neklesajúca.

(b) "$\Rightarrow$" Ak f je rastúca, tak je aj neklesajúca a z implikácie "$\Rightarrow$" v (a) potom vyplýva (124). Ďalej postupujme nepriamo: Ak M obsahuje nedegenerovaný interval J, je podľa cvičenia 1 z paragrafu .90 funkcia f na J konštantná, čo — keďže J je nedegenerovaný interval — znamená, že f nie je rastúca.

"$\Leftarrow$" Ak je splnená podmienka (124), je funkcia f podľa časti (a) neklesajúca. Ďalej budeme dokazovať sporom: Keby f bola neklesajúca a nebola rastúca, existoval by nedegenerovaný interval J, na ktorom by f bola konštantná. Pre každý bod intervalu J by potom platilo $f'(x) = 0$, odtiaľ by vyplývala inklúzia $J \subset M$, čo je spor.

Poznámka. 1. Tvrdenie *ak spojitá funkcia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ má v každom bode $x \in (a, b)$ vlastnú alebo nevlastnú deriváciu, pričom $f'(x) \succ 0$, tak f je rastúca* možno dokázať aj trocha odlišným postupom, založenom na leme .82(b) (ktorá formuluje postačujúcu podmienku pre rast funkcie v bode) a nasledujúcich tvrdeniach [91].

LEMA 1. *Ak funkcia $f : [c, d] \to \mathbf{R}$ je rastúca v každom bode $x \in [c, d]$, tak $f(c) < f(d)$.*

DÔKAZ. Stačí dokázať rovnosť $d = \sup B$, kde $B := \{x \in [c, d]; f(x) > f(c)\}$ $\big($keďže f je rastúca v bode c, platí inklúzia $[c, c + \varepsilon) \subset B$ pre niektoré $\varepsilon > 0$, teda $B \neq \emptyset$, ďalšie úvahy sú obdobné ako v poznámke 2 z paragrafu .77$\big)$ a potom z tejto rovnosti a faktu, že f je rastúca v bode d, odvodiť (opäť podobne ako v poznámke 2 z paragrafu .77) nerovnosť $f(c) < f(d)$.

DÔSLEDOK. *Ak funkcia f je rastúca v každom bode intervalu I, tak f je rastúca.*

LEMA 2. *Ak funkcia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je rastúca na intervale (a, b) a spojitá v bodoch a, b, tak f je rastúca.*

DÔKAZ. Treba dokázať nerovnosti

$$\big(\forall c \in (a, b)\big)\big(f(a) < f(c) < f(b)\big) .$$

Nech teda $c \in (a, b)$, zvoľme $d \in (a, c)$, potom — keďže f rastie na (a, b) — je

$$f(d) < f(c) . \tag{125}$$

Z dôsledku .30(a) $\big($pre $M = (a, b)\big)$ a spojitosti funkcie f v bode a vyplýva nerovnosť

$$f(a) = \inf_{x \in (a,b)} f(x) \leq f(d) ,$$

z (125) potom dostávame $f(a) < f(c)$. Dôkaz nerovnosti $\big(\forall c \in (a, b)\big)\big(f(c) < f(b)\big)$ je rovnaký. ♠

Keďže dokazovanie nerovností $f'(x) > 0$ *pre* $x \in \operatorname{int} I$ môže byť niekedy technicky náročnejšie ako dôkaz nerovnosti $f''(x) > 0$ *pre* $x \in \operatorname{int} I$, môže byť v niektorých prípadoch výhodnejšie použiť namiesto vety .92 dôsledok 1 z nasledujúceho odseku.

.93 Lema. *Nech spojitá funkcia $g : [c, d] \to \mathbf{R}$ má vlastnú alebo nevlastnú deriváciu v každom bode $x \in (c, d)$. Potom*

(a) *ak*

$$\big(\forall x \in (c, d)\big)\big(g'(x) \succ 0\big) \tag{126}$$

a

$$g(c) = 0 ,$$

tak platí nerovnosť

$$\big(\forall x \in (c, d]\big)\big(g(x) > 0\big) ;$$

---

[90] keďže c je podľa vety .90 prvkom množiny $K := \{x \in \operatorname{int} I; f'(x) \in \mathbf{R}\}$, možno podmienku (124$\big)$ nahradiť predpokladom $\big(\forall x \in K\big)\big(f'(x) \geq 0\big)$

[91] Na základe obdobných úvah možno dokázať aj tvrdenie *ak $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia a pre každé $x \in (a, b)$ je $f'_+(x) \succ 0$, tak f je rastúca.* Vtedy ovšem namiesto lemy 1 a jej dôsledku treba použiť tieto tvrdenia:

LEMA 1'. *Ak pre každé $x \in [c, d)$ platí $f'_+(x) \succ 0$, tak*

$$\big(\forall x \in (c, d)\big)\big(f(x) > f(c)\big) .$$

DÔKAZ. Stačí dokázať rovnosť $d = \sup \big\{z \in (c, d); \big(\forall x \in (c, z]\big)\big(f(c) < f(x)\big)\big\}$; pri jej odvodení založenom na podobných myšlienkach ako dôkaz z poznámky 2 v paragrafe .77 použite fakt, že z nerovnosti $f'_+(\xi) \succ 0$ vyplýva existencia čísla $\varepsilon > 0$ s vlastnosťou $\big(\forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon) \cap D(f)\big)\big(f(x) > f(\xi)\big)$.

DÔSLEDOK'. *Ak pre každé $x \in (a, b)$ platí $f'_+(x) \succ 0$, tak f je na intervale (a, b) rastúca.*

(b) *ak platí (126) a*

$$g(d) = 0 ,$$

tak $g(x) < 0$ *pre všetky* $x \in [c, d)$.

Dôkaz. (a) vyplýva z elementárneho tvrdenia *ak* $g : [c, d] \to \mathbf{R}$ *je rastúca funkcia a* $g(c) = 0$, *tak* $g(x) > 0$ *pre* $x \in (c, d]$ a vety .92, v prípade (b) je situácia obdobná.

Dôsledok 1. *Nech funkcia* f *je* $(n-1)$*-krát* ($n \in \mathbf{N}, n \geq 2$) *spojite diferencovateľná na intervale* $[c, d]$ *a má vlastnú alebo nevlastnú* n*-tú deriváciu v každom bode* $x \in (c, d)$.

(a) *Ak*

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0 \tag{127}$$

a

$$\big(\forall x \in (c, d)\big)\big(f^{(n)}(x) \succ 0\big) , \tag{128}$$

tak f *je na* $[c, d]$ *rastúca* [92].

(b) *Ak platí (128) a*

$$f'(d) = f''(d) = \cdots = f^{(n-1)}(d) = 0 , \tag{129}$$

tak f *je na* $[c, d]$ *rastúca, ak* n *je nepárne, a je na* $[c, d]$ *klesajúca, ak* n *je párne.*

Dôkaz. (a) Dôkaz je založený na viacnásobnom použití tvrdenia (a) predchádzajúcej lemy.

Z (128) a predpokladu $f^{(n-1)}(c) = 0$ vyplýva podľa uvedenej lemy (aplikovanej na funkciu $g = f^{(n-1)}$) nerovnosť

$$\big(\forall x \in (c, d)\big)\big(f^{(n-1)}(x) > 0\big) ; \tag{130}$$

z (130) a predpokladu $f^{(n-2)}(c) = 0$ dostávame na základe tej istej lemy (tentokrát použitej na funkciu $g = f^{(n-2)}$)

$$\big(\forall x \in (c, d)\big)\big(f^{(n-2)}(x) > 0\big)$$

atď. Po konečnom počte krokov tak dostaneme nerovnosť

$$\big(\forall x \in (c, d)\big)\big(f'(x) > 0\big) ,$$

z ktorej už podľa vety .92(b) vyplýva, že f rastie na intervale $[c, d]$. $\triangle$

Dôkaz tvrdenia (b) je obdobný a zakladá sa na tvrdení (b) lemy .93 (pritom práve zo skutočnosti, že nerovnosti $g'(x) \succ 0$ a $g(x) < 0$ v uvedenom tvrdení sú opačné, vyplýva rozlišovanie prípadov $n + 1$ *nepárne* a $n + 1$ *párne* v dokazovanom tvrdení).

Poznámka. Ak predpoklad (128) nahradíme predpokladom

$$\big(\forall x \in (c, d)\big)\big(f^{(n)}(x) \prec 0\big) , \tag{131}$$

treba v znení dôsledku 1 slovo *rastúca* nahradiť slovom *klesajúca* a naopak. ♠

Z dôsledku 1 vyplýva na základe tej istej úvahy, ktorú sme použili na dôkaz lemy .93, nasledujúce tvrdenie.

Dôsledok 2. *Nech funkcia* f *je* $(n-1)$*-krát* ($n \in \mathbf{N}, n \geq 2$) *spojite diferencovateľná na intervale* $[c, d]$ *a má vlastnú alebo nevlastnú* n*-tú deriváciu v každom bode* $x \in (c, d)$.

(a) *Ak platí (127), (128) a*

$$f(c) = 0 ,$$

tak

$$\big(\forall x \in (c, d]\big)\big(f(x) > 0\big) .$$

(b) *Ak platí (129), (128) a*

$$f(d) = 0 ,$$

tak

$$\big(\forall x \in [c, d)\big)\big(f(x) < 0\big) , \quad \textit{ak } n \textit{ je nepárne} ,$$

a

$$\big(\forall x \in [c, d)\big)\big(f(x) > 0\big) , \quad \textit{ak } n \textit{ je párne} .$$

[92] ako čitateľ z dôkazu zistí, podmienku (128) možno v (a) aj (b) nahradiť dvojicou podmienok $\big(\forall x \in (c, d)\big)\big(f^{(n+1)}(x) \succeq 0\big)$ a *množina* $M := \{x \in [c, d]; f^{(n+1)}(x) = 0\}$ *neobsahuje žiadny nedegenerovaný interval*

13.2 Lokálne a globálne extrémy.

Pojem lokálneho extrému sme definovali v paragrafe .82, kde sme tiež dokázali nutnú podmienku existencie lokálneho extrému (časť (c_3) tvrdenia (c)). Keďže globálny extrém funkcie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je aj jej lokálnym extrémom, vyplýva z tejto nutnej podmienky nasledujúci postup.

.94 Hľadanie globálnych extrémov. Ak $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia, stačí namiesto $\max_{x \in [a,b]} f(x)$ (ktorého existenciu zaručuje veta .78) nájsť $\max_{x \in K} f(x)$, kde $K := \{a, b\} \cup D_1 \cup D_2$, pričom $D_2 := \{x \in (a, b); f'(x) = 0\}$ a D_1 je množina tých $x \in (a, b)$, v ktorých f nemá vlastnú ani nevlastnú deriváciu; z lemy .82(c_3) totiž vyplýva — keďže v bode $x \in (a, b)$, pre ktorý platí $f'(x) \succ 0$ alebo $f'(x) \prec 0$, nemôže f nadobúdať lokálny extrém — rovnosť

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = \max_{x \in K} f(x) \, .$$

Pokiaľ je množina K konečná, $K = \{a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b\}$, je teda maximom funkcie f na $[a, b]$ najväčšie z čísel $f(a),\ f(x_1), \ldots,\ f(x_n),\ f(b)$.

Postup v prípade lokálneho maxima je obdobný. ♠

Ukážme teraz na prílade menej známeho dôkazu nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom možnosť použitia diferenciálneho počtu pri hľadaní globálnych extrémov na *neohraničenom* intervale.

Príklad. Dokážeme tvrdenie *ak* $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ *sú kladné čísla, tak*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \, , \tag{132}$$

pričom rovnosť nastane len v prípade $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ (ďalšie dôkazy tejto nerovnosti nájde čitateľ v príklade z paragrafu .98).

Použijeme indukciu:

1° Pre $n = 2$ má (132) tvar

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \, , \quad a_1 > 0 \, , \ a_2 > 0 \, ,$$

tj.

$$2\sqrt{a_1 a_2} \leq a_1 + a_2 \, , \quad a_1 > 0 \, , \ a_2 > 0 \, ; \tag{133}$$

postupnými úpravami, z ktorých prvou je umocnenie obidvoch strán na druhú, dostávame

$$4a_1 a_2 \leq a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 \, ,$$

$$0 \leq a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 \, ,$$

$$0 \leq (a_1 - a_2)^2 \, . \tag{134}$$

Posledná z týchto nerovností je zrejme pravdivá, a teda — keďže naše úpravy boli ekvivalentné (umocňovanie na druhú predstavovalo v tomto prípade ekvivalentnú úpravu vzhľadom na náš predpoklad $a_1 > 0$, $a_2 > 0$) — platí aj (133). Keďže v (134) nastane rovnosť len v prípade $a_1 = a_2$, platí to isté aj o (133). Tým je naše tvrdenie pre prípad $n = 2$ dokázané.

2° Nech sú teraz dané čísla $a_1, \ldots, a_{n+1} > 0$, chceme dokázať nerovnosť

$$\sqrt[n+1]{a_1 \ldots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + \cdots a_{n+1}}{n+1} \, ,$$

tj.

$$\frac{(n+1) \sqrt[n+1]{a_1 \ldots a_{n+1}}}{a_1 + \cdots + a_{n+1}} \leq 1 \tag{135}$$

a zistiť, kedy nastane rovnosť.

Podľa indukčného predpokladu je

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \, ,$$

tj.

$$\frac{n \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}}{a_1 + \cdots + a_n} \leq 1 \, , \tag{136}$$

pričom rovnosť platí len v prípade $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Nech $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ je funkcia s predpisom

$$f(x) = \frac{(n+1) \sqrt[n+1]{a_1 \ldots a_n x}}{a_1 + \cdots + a_n + x} \, ;$$

na dôkaz (135) zrejme stačí dokázať nerovnosť

$$\big(\forall x > 0\big)\big(f(x) \le 1\big) ;$$

vyšetrime preto pomocou prvej derivácie priebeh funkcie f:

Pre $x > 0$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= (n+1)\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n}\left(\frac{\sqrt[n+1]{x}}{a_1 + \dots + a_n + x}\right)' = \\ &= (n+1)\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n}\,\frac{\frac{1}{(n+1)\sqrt[n+1]{x^n}}(a_1 + \dots + a_n + x) - \sqrt[n+1]{x}}{(a_1 + \dots + a_n + x)^2} = \\ &= \frac{(n+1)\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n}}{(a_1 + \dots + a_n + x)^2}\cdot\frac{\big(a_1 + \dots + a_n + x - (n+1)x\big)}{(n+1)\sqrt[n+1]{x^n}} , \end{aligned}$$

preto pre $x > 0$ platí $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$ práve vtedy, keď

$$a_1 + \dots + a_n + x - (n+1)x > 0 , \quad \text{tj.} \quad 0 < x < \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} ,$$

resp.

$$a_1 + \dots + a_n + x - (n+1)x < 0 , \quad \text{tj.} \quad x > \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} .$$

Podľa vety .92(b) teda funkcia f rastie na $(0, \alpha]$ a klesá na $[\alpha, \infty)$, kde $\alpha := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$; v bode α preto f nadobúda ostré globálne maximu, platí teda

$$\big(\forall x \in (0, \infty), x \neq \alpha\big)\big(f(x) < f(\alpha)\big) , \tag{137}$$

pritom

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{(n+1)\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n \alpha}}{a_1 + \dots + a_n + \alpha} = \frac{(n+1)\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n}\sqrt[n+1]{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}}{(a_1 + \dots + a_n)\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \\ &= \frac{(n+1)\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n}\sqrt[n+1]{a_1 + \dots + a_n}}{\sqrt[n+1]{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)(a_1 + \dots + a_n)} = \frac{\sqrt[n+1]{n^n}\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_n}}{\sqrt[n+1]{(a_1 + \dots + a_n)^n}} = \\ &= \sqrt[n+1]{\frac{n^n (a_1 \dots a_n)}{(a_1 + \dots + a_n)^n}} = \left(\frac{n\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}{a_1 + \dots + a_n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \le 1 , \end{aligned}$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva z indukčného predpokladu (136). Keďže funkcia $x^{\frac{n}{n+1}}$ je rastúca (a teda prostá), bude rovnosť $f(\alpha) = 1$ platiť len v prípade $\frac{n\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}{a_1 + \dots a_n} = 1$, tj. (opäť podľa indukčného predpokladu) pre $a_1 = \dots = a_n$.

Z (137) a nerovnosti

$$f(\alpha) \le 1 \tag{138}$$

už vyplýva (135), pritom (ako tiež vidno z (137) a (138)) rovnosť v (135) nastane len v prípade

$$a_{n+1} = \alpha \wedge f(\alpha) = 1 ,$$

tj. (keďže rovnosť $f(\alpha) = 1$ platí len pre $a_1 = \dots = a_n$) pre

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \wedge a_1 = \dots = a_n ,$$

táto podmienka je ale ekvivalentná s požiadavkou

$$a_1 = \dots = a_n = a_{n+1} ,$$

čo sme chceli dokázať. ♠

V nasledujúcich tvrdeniach sformulujeme postačujúce podmienky existencie lokálneho extrému; dôkaz prvej z nich prenechávame na čitateľa.

.95 Lema. *Nech a je vnútorný bod definičného oboru funkcie f.*

(a) *Ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že f rastie (resp. neklesá) na $(a-\varepsilon, a]$ a klesá (resp. nerastie) na $[a, a+\varepsilon)$, tak f má v bode a ostré lokálne maximum (resp. lokálne maximum).*

(b) *Ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že f klesá (resp. nerastie) na $(a-\varepsilon, a]$ a rastie (resp. neklesá) na $[a, a+\varepsilon)$, tak f má v bode a ostré lokálne minimum (resp. lokálne minimum).*

Poznámka. Uvedené tvrdenie nemožno "obrátiť": napr. vzo skutočnosti, že funkcia f nadobúda vo vnútornom bode svojho definičného oboru ostré lokálne minimum, nemusí ešte vyplývať, že f by musela byť neklesajúca vľavo od a a nerastúca vpravo od a. Protipríkladom je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & \text{ak} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases},$$

ktorá

- je diferencovateľná:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x}, & \text{ak} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}$$

$\Big($hodnotu $f'(0)$ sme našli priamo na základe definície:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\right] = 0\,,$$

pritom posledná rovnosť vyplýva z vety .14, pri výpočte $f'(x)$ pre $x \neq 0$ sme použili vety .83 a .84$\Big)$;

- má v bode 0 ostré globálne minimum: z nerovnosti $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, vyplýva $2+\sin\frac{1}{x} > 0$ pre $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, preto

$$\big(\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}\big)\big(f(x) > 0 = f(0)\big)\,;$$

ale

- neexistuje $\varepsilon > 0$, pre ktoré by platilo, že f neklesá na $(-\varepsilon, 0]$ a nerastie na $[0, \varepsilon)$; to vyplýva z vety .92(a) a skutočnosti, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ nadobúda f' na každom z intervalov $(-\varepsilon, 0)$, $(0, \varepsilon)$ kladné aj záporné hodnoty $\Big($pre $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbf{N}$, platí $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = -1$, preto (podľa lemy .10) pre n "dostatočne veľké" — tj. pre x_n "blízke k 0" — sú hodnoty $f'(x_n)$ záporné; podobne možno dokázať existenciu kladných funkčných hodnôt v intervale $(0, \varepsilon)$ a kladných aj záporných hodnôt derivácie v intervale $(-\varepsilon, 0)\Big)$.

Dôsledok. *Ak funkcia f' zmení v bode a znamienko z kladného na záporné* $\Big($tj. existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $O(a,\varepsilon) \subset D(f')$, $\big(\forall x \in (a-\varepsilon, a)\big)\big(f'(x) > 0\big)$, $\big(\forall x \in (a, a+\varepsilon)\big)\big(f'(x) < 0\big)\Big)$, *tak f má v bode a lokálne maximum.*

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z predchádzajúcej lemy a vety .92(b) [93]. △

Formuláciu (a dôkaz) analogickej postačujúcej podmienky existencie lokálneho minima prenechávame na čitateľa. ♠

Ďalšie postačujúce podmienky existencie lokálneho extrému (ktoré — ako čitateľ z dôkazov zistí — zaručujú, že funkcia f' zmení v bode a znamienko) možno odvodiť z lemy .95 a dôsledku 1 z paragrafu .93. ♠

.96 Veta. *Nech funkcia f je n-krát ($n \in \mathbf{N}$) diferencovateľná na niektorom okolí $\mathcal{O}$ bodu a* $\big($tj. $\mathcal{O} \subset D(f^{(m)})\big)$ *a má vlastnú alebo nevlastnú $(n+1)$-vú deriváciu v bode a a nech*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0\,,\ f^{(n+1)}(a) \neq 0\,.$$

Potom

(a) *ak $n+1$ je párne a $f^{(n+1)}(a) \prec 0$ (resp. $f^{(n+1)}(a) \succ 0$), tak f má v bode a ostré lokálne maximum (resp. ostré lokálne minimum);*

(b) *ak $n+1$ je nepárne, tak f nenadobúda v bode a lokálny extrém.*

[93] pritom spojitosť funkcie f na intervaloch $(a-\varepsilon, a]$ a $[a, a+\varepsilon)$ (čo je jeden z predpokladov, ktoré — keďže vetu .92(b) používame na týchto intervaloch — treba splniť) vyplýva z nášho predpokladu $O(a,\varepsilon) \subset D(f')$ (tj. z diferencovateľnosti funkcie f v každom bode $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$) a lemy .82(a)

Dôkaz. (a) Predpokladajme $f^{(n+1)}(a) \prec 0$ (postup pre $f^{(n+1)}(a) \succ 0$ je rovnaký). Podľa lemy .82(b) potom funkcia $f^{(n)}$ v bode a klesá, preto — keďže podľa predpokladu je $f^{(n)}(a) = 0$ — existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset \mathcal{O}$ a

$$\big(\forall x \in (a-\varepsilon, a)\big)\big(f^{(n)}(x) > 0\big)\ ; \tag{139}$$

$$\big(\forall x \in (a, a+\varepsilon)\big)\big(f^{(n)}(x) < 0\big)\ . \tag{140}$$

Z (139) a predpokladov

$$f'(a) = 0\ ,\ f''(a) = 0\ ,\ \ldots\ ,\ f^{(n-1}(a) = 0 \tag{141}$$

vyplýva podľa tvrdenia (b) dôsledku 1 z paragrafu .93 (pre $c = a - \varepsilon$, $d = a$ [94]), že — keďže n je nepárne — funkcia f rastie na $[a-\varepsilon, a]$.

Podobne možno z (141) a (140) odvodiť(ak pre $c = a, d = a + \varepsilon$ použijeme analógiu tvrdenia (a) dôsledku 1 z odseku .93, ktorá vznikne nahradením predpokladu (128) predpokladom (131)), že f klesá na intervale $[a, a+\varepsilon]$. Preto podľa lemy .95 má f v bode a ostré lokálne maximum.

(b) Rovnakými úvahami ako v časti (a) možno dokázať, že v prípade $f^{(n+1)}(a) \succ 0$ (resp. $f^{(n+1)}(a) \prec 0$) funkcia f rastie (resp. klesá) na niektorom okolí bodu a, a preto v tomto bode nemôže nadobúdať lokálny extrém.

13.3 Konvexnosť a konkávnosť. Inflexné body

.97 Definícia. Hovoríme, že funkcia f je *konvexná na intervale* $I \subset D(f)$, ak

$$\big(\forall x, y, z \in I, x < z < y\big)\left(f(z) \leq f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x)\right) \tag{142}$$

(tj. ak na každom intervale $[x, y] \subset I$ všetky body grafu funkcie $f_1 := f|_{[x,y]}$ ležia pod alebo na spojnici krajných bodov tohto grafu [95]).

Definíciu funkcie *konkávnej*, resp. *rýdzo konvexnej*, resp. *rýdzo konkávnej na intervale* I dostaneme, ak v (142) nerovnosť $\leq$ nahradíme postupne nerovnosťami $\geq$, $<$, $>$.

Poznámky. 1a) Každý vnútorný bod z intervalu $[x, y]$ možno jednoznačne zapísať v tvare

$$z = x + q(y - x)\ , \tag{143}$$

kde $q \in (0, 1)$. Ak označíme $p := 1 - q$, bude mať (143) podobu

$$z = px + qy\ ,\quad \text{kde}\quad p, q \in (0, 1)\ ,\ p + q = 1\ .$$

Výrok (142) môžeme potom prepísať [96] nasledovne

$$\big(\forall x, y \in I, x < y\big)\big(\forall p, q \in (0, 1), p + q = 1\big)\big(f(px + qy) \leq pf(x) + qf(y)\big)\ . \tag{144}$$

1b) Aj v prípade $y < x$ možno každý vnútorný bod z intervalu $[y, x]$ zapísať jednoznačne v tvare $z = px + qy$, kde $p, q \in (0, 1), p + q = 1$. Ak zopakujeme úvahy z predchádzajúcej poznámky pre interval $[y, x]$, zistíme, že (144) zostane v platnosti, ak v ňom predpoklad $x < y$ nahradíme predpokladom $x > y$; preto (144) možno nahradiť výrokom

$$\big(\forall x, y \in I, x \neq y\big)\big(\forall p, q \in (0, 1), p + q = 1\big)\big(f(px + qy) \leq pf(x) + qf(y)\big)\ . \tag{145}$$

---

[94] pritom spojitosť $(n-1)$-vej derivácie (čo je jeden z predpokladov lemy .93) vyplýva z diferencovateľnosti funkcie $f^{(n-1)}$ a lemy .82(a)

[95] táto spojnica je grafom lineárnej funkcie, ktorej predpisom je práve pravá strana nerovnosti (142)

[96] keďže

$$(px + qy) - x = (p - 1)x + qy = -qx + qy = q(y - x)\ ,$$

tak

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\big((px + qy) - x\big) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\big(q(y - x)\big) = \big(f(y) - f(x)\big)q\ ,$$

preto

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x) &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\big((px + qy) - x\big) = f(x) + \big(f(y) - f(x)\big)q = \\ &= pf(x) + qf(y) \end{aligned}$$

2. Úvahy z poznámok 1a) a 1b) možno zovšeobecniť úplnou indukciou, dostaneme tak toto tvrdenie.

LEMA (Jensenova nerovnosť). *Ak funkcia f je konvexná na intervale I, tak pre každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, platí*

$$\big(\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I\big)\big(\forall p_1, p_2 \dots, p_n \in (0,1); p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1\big)$$

$$\left(f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} f(p_i x_i) \right) . \tag{146}$$

Ak f je na I rýdzo konvexná, tak platí (146), pričom rovnosť nastane len pre $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

DÔKAZ. Nech f je rýdzo konvexná na I (postup v prípade konvexnej funkcie f je rovnaký). Označme $V(n)$ výrok *platí (146), pričom rovnosť nastane len pre* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ a dokazujme indukciou.

Dôkaz tvrdenia $V(2)$, ktorý je založený na úvahách použitých v poznámkach 1a) a 1b), prenechávame na čitateľa. Predpokladajme teraz, že platí $V(2), V(3), \dots, V(n)$; zvoľme $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in I$, nech $p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1} \in (0,1)$, $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1$. Potom

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) &= f\left(p_1 x_1 + \cdots + p_{n-1}x_{n-1} + (p_n + p_{n+1})\left(\frac{p_n}{p_n + p_{n+1}} x_n + \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}} x_{n+1}\right)\right) \leq \\
&\overset{(1)}{\leq} p_1 f(x_1) + \cdots + p_{n-1} f(x_{n-1}) + (p_n + p_{n+1}) f\left(\frac{p_n}{p_n + p_{n+1}} x_n + \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}} x_{n+1}\right) \leq \\
&\overset{(2)}{\leq} \sum_{i=1}^{n-1} p_i f(x_i) + (p_n + p_{n+1})\left(\frac{p_n}{p_n + p_{n+1}} f(x_n) + \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}} f(x_{n+1})\right) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i) ,
\end{aligned}$$

pričom nerovnostť (1) vyplýva z $V(n)$, v ktorom úlohu n-tíc $[p_1, p_2, \dots, p_n]$ a $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ mali teraz n-tice $[p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n + p_{n+1}]$ a $\left[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \frac{p_n}{p_n + p_{n+1}} x_n + \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}} x_{n+1}\right]$, a (2) vyplýva z $V(2)$, kde v úlohe dvojíc $[p_1, p_2]$ a $[x_1, x_2]$ teraz boli $\left[\frac{p_n}{p_n + p_{n+1}}, \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}}\right]$ a $[x_n, x_{n+1}]$.

Z $V(n)$ tiež vyplýva, že na mieste nerovnosti (1) bude znak $=$ len vtedy, keď

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \frac{p_n}{p_n + p_{n+1}} x_n + \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}} x_{n+1} , \tag{147}$$

podobne z $V(2)$ vyplýva, že nerovnosť (2) možno nahradiť rovnosťou práve vtedy, keď

$$x_n = x_{n+1} . \tag{148}$$

Rovnosť

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i) \tag{149}$$

teda nastane práve vtedy, keď bude platiť (147) aj (148). Ak do (147) dosadíme $x_{n+1} = x_n$, dostaneme

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n ,$$

odtiaľ a z (148) potom vyplýva, že (149) platí len v prípade $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x_{n+1}$.

.98 Veta. *Nech spojitá funkcia $f : I \to \mathbf{R}$ je diferencovateľná v každom vnútornom bode intervalu I* [97]. *Ak funkcia f' je rastúca, resp. klesajúca, resp. neklesajúca, resp. nerastúca na* $\operatorname{int} I$, *tak f je na I rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna, resp. konvexná, resp. konkávna.*

Dôkaz. Predpokladajme, že f' je neklesajúca na $\operatorname{int} I$ (dôkaz v ostatných prípadoch je rovnaký). Dokážeme, že platí (144). Zvoľme teda $x, y \in I$, $x < y$, $p, q \in (0,1)$, $p + q = 1$ a označme

$$V := pf(x) + qf(y) - f(px + qy) .$$

Naším cieľom je dokázať nerovnosť $V \geq 0$.

Platí

$$V = pf(x) + qf(y) - (p+q)f(px+qy) = q\big[f(y) - f(px+qy)\big] - p\big[f(px+qy) - f(x)\big] . \tag{150}$$

[97] teda pre definičný obor $D(f')$ derivácie funkcie f iste platí $\operatorname{int} I \subset D(f')$

Na vyjadrenie rozdielu funkčných hodnôt v prvej aj druhej hranatej zátvorke použijeme teraz Lagrangeovu vetu (odsek .90) o strednej hodnote (najprv na intervale $[z,y]$, kde $z := px+qy$, potom na intervale $[x,z]$; oprávnenie k použitiu tejto vety dávajú predpoklady nášho tvrdenia). Existujú teda $c_1 \in (z,y)$, $c_2 \in (x,z)$ tak, že

$$f(y) - f(px+qy) = f'(c_1)\big[y - (px+qy)\big] = f'(c_1)\big[(1-q)y - px\big] = f'(c_1)p(y-x) \ ,$$

$$f(px+qy) - f(x) = f'(c_2)\big[(px+qy) - x\big] = f'(c_2)q(y-x) \ .$$

Po dosadení týchto vyjadrení do (150) dostaneme

$$V = pqf'(c_1)(y-x) - pqf'(c_2)(y-x) = pq(y-x)\big(f'(c_1) - f'(c_2)\big) \ . \tag{151}$$

Pretože $c_2 \in (x,z)$, $c_1 \in (z,y)$, je $c_2 < c_1$; z predpokladu, že f' je na $\operatorname{int} I$ neklesajúca, potom vyplýva nerovnosť $f'(c_2) \leq f'(c_1)$, tj.

$$f'(c_1) - f'(c_2) \geq 0 \ . \tag{152}$$

Z (151), (152) a nerovností $y > x$, $p > 0$, $q > 0$ už vyplýva, že $V \geq 0$, čo sme chceli dokázať. ♠

Postačujúce podmienky pre monotónnosť funkcie f' vyplývajú z vety .92, z nej a z predchádzajúceho tvrdenia možno odvodiť nasledujúci dôsledok.

Dôsledok. *Nech spojitá funkcia $f : I \to \mathbf{R}$ je dvakrát diferencovateľná v každom vnútornom bode intervalu I. Ak pre všetky $x \in \operatorname{int} I$ platí $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$, resp. $f''(x) \geq 0$, resp. $f''(x) \leq 0$, je f na intervale I rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna, resp. konvexná, resp. konkávna.*

Príklad. 1a) Dokážeme teraz nerovnosť

$$\big(\forall x, y > 0, x \neq y\big) \left((x+y)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) < x\ln x + y\ln y\right) \ , \tag{153}$$

ktorú využijeme v časti 1b).

Nech $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ je funkcia s predpisom $f(x) = x\ln x$, potom

$$f'(x) = (x\ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 \ , \quad f''(x) = \frac{1}{x} \ ,$$

preto

$$\big(\forall x \in (0,\infty)\big)\big(f''(x) > 0\big) \ ,$$

funkcia f je teda podľa vety .98 rýdzo konvexná.

Zvoľme $x, y > 0, x \neq y$; pre $p = q = \frac{1}{2}$ potom z (145), kde (pretože naša funkcia f je rýdzo konvexná) namiesto neostrej nerovnosti $\leq$ píšeme $<$, vyplýva

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big) \ ,$$

tj.

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}(x\ln x + y\ln y) \ ,$$

odtiaľ už vyplýva nerovnosť (153).

1b) Nech a, b sú kladné čísla, nech $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. *Priemerom rádu x z čísel a, b* nazveme číslo

$$s(x) := \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

(špeciálne pre $x = 1$ dostávame aritmetický a pre $x = -1$ harmonický priemer). Dokážeme, že

$$s(0) := \lim_{x\to 0} s(x) = \sqrt{ab} \tag{154}$$

(tj. funkciu s možno spojite dodefinovať v bode 0, pričom hodnotou $s(0)$ bude geometrický priemer čísel a, b);

$$\lim_{x\to-\infty} s(x) = \min\{a,b\} \ , \quad \lim_{x\to\infty} s(x) = \max\{a,b\} \ , \tag{155}$$

a napokon, že pre $a \neq b$ je funkcia s (ktorú už chápeme ako spojite dodefinovanú v bode 0) rastúca na $\mathbf{R}$ (zrejme pre $a = b$ je funkcia s konštantná, $s(x) \equiv a$). Jednoduchým dôsledkom našich úvah bude známa nerovnosť medzi harmonickým, geometrickým a aritmetickým priemerom, ktorá má v prípade $a, b > 0, a \neq b$, podobu

$$s(-1) < s(0) < s(1) \ ,$$

tj.

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \,.$$

Dokážme najprv (154): pre $x \neq 0$ platí

$$s(x) = e^{\sigma(x)}\,, \quad \text{kde} \quad \sigma(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\,, \tag{156}$$

pritom

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\sigma(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\left[1+\left(\frac{a^x-1}{2}+\frac{b^x-1}{2}\right)\right]\right) = \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left[1+\left(\frac{a^x-1}{2}+\frac{b^x-1}{2}\right)\right]}{\left(\frac{a^x-1}{2}+\frac{b^x-1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)\right) = 1\cdot\frac{1}{2}(\ln a+\ln b) = \\ &= \ln\sqrt{ab}\end{aligned}$$

(výpočet sme založili na poznámke z odseku .35), preto podľa vety o limite zloženej funkcie [98]

$$\lim_{x\to 0}s(x) = \lim_{x\to 0}e^{\sigma(x)} = |\sigma(x)=t| = \lim_{t\to\ln\sqrt{ab}}e^t = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}\,,$$

čím je rovnosť (154) dokázaná.

V našich ďalších úvahách predpokladajme, že $a \leq b$ (postup pre $a \geq b$ by bol rovnaký [99]) a pokračujme dôkazom tvrdenia (155). Platí

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \left[b^x\left(\left(\frac{a}{b}\right)^x+1\right)\right]^{\frac{1}{x}} = b\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}\,,$$

pritom — keďže $\frac{a}{b}\in(0,1]$ — je $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^x = 0$, preto (opäť podľa vety o limite zloženej funkcie, resp. podľa poznámky z odseku .35)

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)^x}\left(\frac{a}{b}\right)^x\frac{1}{x} = 1\cdot 0\cdot 0 = 0\,,$$

z týchto výpočtov vyplýva

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\left(b\cdot e^{\ln\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}}\right) = b\cdot e^0 = b = \max\{a,b\}\,,$$

čím je prvá rovnosť z (155) dokázaná. Dôkaz druhej rovnosti je podobný.

Dokážme teraz, že pre $a \neq b$ — tj. (keďže predpokladáme, že $a \leq b$) pre $a < b$ — pre $a < b$; je funkcia s (spojite dodefinovaná v bode 0) rastúca na $(-\infty, 0]$ a na $[0,\infty)$, odtiaľ už bude zrejme vyplývať, že s rastie na $\mathbf{R}$. Podľa vety .92(b) stačí dokázať, že pre všetky $x \neq 0$ je $s'(x) > 0$. Z rovnosti (156) podľa vety o derivácii zloženej funkcie dostávame

$$s'(x) = e^{\sigma(x)}\sigma'(x) \quad \text{pre} \quad x \neq 0\,; \tag{157}$$

pritom (podľa viet o derivácii podielu a zloženej funkcie)

$$\sigma'(x) = \frac{\frac{1}{\frac{a^x+b^x}{2}}\frac{1}{2}(a^x\ln a+b^x\ln b)-\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x^2} = \frac{a^x\ln a+b^x\ln b-(a^x+b^x)\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x^2(a^x+b^x)} > 0\,,$$

posledná nerovnosť vyplýva z (153) (kde sme dvojicu $[x,y]$ nahradili dvojicou $[a^x,b^x]$; z nášho predpokladu $a<b$ vyplýva nerovnosť $a^x \neq b^x$ pre $x \neq 0$). Z nerovnosti $\sigma'(x) > 0$ pre $x \neq 0$ vyplýva už podľa (157) nerovnosť $s'(x) > 0$ pre $x \neq 0$, ktorú sme chceli dokázať.

1c) Zopakovaním myšlienok z častí 1a) a 1b) možno dokázať toto tvrdenie:

Nech $a_1,\ldots,a_n$ sú kladné čísla, nech pre $p_1,\ldots,p_n\in(0,1)$ platí $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Pre $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ označme

$$s(x) = \left(\sum_{i=1}^n p_i a_i^x\right)^{\frac{1}{x}}\,.$$

[98]oprávnenie k jej použitiu dáva splnenie podmienky (c) (pozri vetu .12(a))

[99]alebo trocha inak: keďže z dvoch reálnych čísel musí byť jedno menšie alebo nanjvýš rovné druhému, zvoľme označenie tak, aby platilo $a \leq b$; takáto úvaha sa spravidla vyjadruje formuláciou *bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a \leq b$*

Potom

(1) $\lim_{x\to 0} s(x) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}$;

(2) ak $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, *je funkcia s (spojite dodefinovaná v bode* 0*) konštantná na* $\mathbf{R}$*; ak pre niektoré* $i \neq j$ *platí* $a_i \neq a_j$, *tak funkcia s (spojite dodefinovaná v bode* 0*) je rastúca.*

Ak v tomto tvrdení zvolíme špeciálne $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$, bude opäť $s(-1)$ harmonický, $s(0)$ geometrický a $s(1)$ aritmetický priemer čísel $a_1, \dots a_n$ a z tvrdenia (2) bude vyplývať nerovnosť

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{pre} \quad a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \;, \tag{158}$$

pričom v uvedenom vzťahu platia rovnosti len v prípade $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

2. Uveďme ešte jeden dôkaz nerovností (158). Keďže ln je rýdzo konkávna funkcia $\Big($pre všetky $x > 0$ totiž platí $(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0\Big)$, vyplýva z Jensenovej nerovnosti z paragrafu .97 $\big($kde zvolíme $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}\big)$ nerovnosť

$$\ln\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \ln a_1 + \cdots + \frac{1}{n} \ln a_n = \ln \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \;, \tag{159}$$

pričom nerovnosť $\geq$ možno nahradiť rovnosťou len v prípade $a_1 = \cdots = a_n$. Z (159) potom (keďže e^x je rastúca funkcia) vyplýva

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = e^{\ln\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)} \geq e^{\ln \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \;,$$

pričom rovnosť $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ platí len pre $a_1 = \cdots = a_n$.

Dôkaz prvej nerovnosti v (158) je podobný; z rýdzej konkávnosti funkcie ln vyplýva

$$\ln\left(\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots \frac{1}{a_n}}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \ln \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{n} \ln \frac{1}{a_n} = \ln \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdots a_n}} \;,$$

preto

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} \;,$$

odtiaľ $\big($keďže z nerovností $a \geq b > 0$ vyplýva $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}\big)$ dostávame

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \;,$$

pričom rovnosť opäť platí len pre $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. ♠

Nasledujúce úvahy vyslovíme len pre rýdzo konvexné funkcie, formuláciu (a dôkaz) pre prípad rýdzo konkávnych, resp. konvexných a konkávnych funkcií prenechávame na čitateľa.

.99 Lema. Nech funkcia f je rýdzo konvexná na intervale I. Potom funkcia $F_a : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ daná predpisom

$$F_a(x) = \frac{fx) - f(a)}{x - a}$$

je rastúca.

Dôkaz. (-: Toto tvrdenie možno ľahko vydedukovať z geometrickej interpretácie rýdzej konvexnosti:

- ak $a < x < y$, leží bod $X := [x, f(x)]$ pod spojnicou bodov $A := [a, f(a)]$ a $Y := [y, f(y)]$, preto smernica priamky AX (ktorou je práve číslo $F_a(x)$) je menšia než smernica priamky AY;
- úvaha v prípade $x < y < a$ je obdobná;
- ak $x < a < y$, leží bod A pod spojnicou bodov X a Y, preto opäť smernica priamky XA musí byť menšia než smernica priamky AY. :-)

Ak $x, y \in I$, $a < x < y$, vyplýva z definície rýdzej konvexnosti nerovnosť

$$f(x) < f(a) + \frac{f(y) - f(a)}{y - a}(x - a) \;,$$

z ktorej dostávame

$$f(x) - f(a) < \frac{f(y) - f(a)}{y - a}(x - a) \;,$$

a — keďže $x-a>0$ — platí

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \,,$$

tj.

$$F_a(x) < F_a(y) \,.$$

V prípade $x<y<a$ je postup rovnaký.

Ak $x<a<y$, vyplýva opäť z definície rýdzej konvexnosti nerovnosť

$$f(a) < f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(a-x) \,,$$

z ktorej postupnými úpravami dostaneme

$$f(a) - f(x) < \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(a-x) \,,$$

$$\big(f(a-f(x)\big)(y-x) < \big(f(y)-f(x)\big)(a-x) \,; \tag{160}$$

ak teraz do (160) dosadíme podľa rovností

$$y-x = (y-a)+(a-x) \,,$$

$$\big(f(y)-f(x)\big) = \big(f(y)-f(a)\big) + \big(f(a)-f(x)\big) \,,$$

dostaneme

$$\big(f(a)-f(x)\big)(y-a) + \big(f(a)-f(x)\big)(a-x) < \big(f(y)-f(a)\big)(a-x) + \big(f(a)-f(x)\big)(a-x)$$

a po odčítaní výrazu $\big(f(a)-f(x)\big)(a-x)$ od obidvoch strán máme

$$\big(f(a)-f(x)\big)(y-a) < \big(f(y)-f(a)\big)(a-x) \,,$$

tj.

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} < \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \,,$$

čo je dokazovaná nerovnosť

$$F_a(x) < F_a(y) \,.$$

Veta. (a) *Nech funkcia f je rýdzo konvexná na intervale I. Potom f má v každom vnútornom bode a intervalu I konečné jednostranné derivácie, pričom*

$$f'_-(a) \le f'_+(a) \tag{161}$$

a platí

$$(\forall x \in I, x<a)\big(f(x) > f(a) + f'_-(a)(x-a)\big) \,, \tag{162}$$

$$(\forall x \in I, x>a)\big(f(x) > f(a) + f'_+(a)(x-a)\big) \,, \tag{163}$$

$\big($tj. „napravo" (resp. „naľavo") od a leží graf funkcie f nad dotyčnicou ku grafu f v bode a sprava (resp. zľava); špeciálne, ak pre $x \in \operatorname{int} I$ existuje $f'(a)$, ležia body grafu funkcie f zodpovedajúce hodnotám $x \neq a$ nad dotyčnicou v bode $a)\big)$.

Funkcie f'_- a f'_+ sú na $\operatorname{int} I$ rastúce a platí

$$\big(\forall a, b \in \operatorname{int} I, b<a\big)\big(f'_+(b) < f'_-(a)\big) \,. \tag{164}$$

(b) *Ak funkcia f je na intervale I rýdzo konvexná, tak množina M tých bodov $x \in I$, v ktorých f nie je diferencovateľná, je najviac spočítateľná.*

(c) *Nech funkcia $f:(c,d)\to \mathbf{R}$ je diferencovateľná v každom bode $a \in (c,d)$, pričom*

$$\big(\forall x \in (c,d), x \neq a\big)\big(f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)\big) \tag{165}$$

(tj. nech pre každý bod $a \in (c,d)$ platí, že body grafu funkcie f zodpovedajúce hodnotám $x \neq a$ ležia nad dotyčnicou ku grafu funkcie f v bode a).

Potom f je rýdzo konvexná funkcia.

Dôkaz. (a) Podľa predchádzajúcej lemy je funkcia $F_a: I\setminus\{a\}\to\mathbf{R}$, $F_a(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, rastúca, preto podľa tvrdenia z poznámky 1 v odseku .31 existujú konečné $\lim_{x\to a-} F_a(x) = f'_-(a)$, $\lim_{x\to a+} F_a(x) = f'_+(a)$ a platí $f'_-(a) \le f'_+(a)$.

Podľa poznámky 2 z odseku .31 je

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=F_a(x)<\lim_{y\to a-}F_a(y)=f'_-(a) \quad \text{pre} \quad x\in I\,,\ x<a\,,$$

tj.

$$(\forall x\in I, x<a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<f'_-(a)\right)\,,$$

z tejto nerovnosti už vyplýva (162). Dôkaz nerovnosti (163) je obdobný.

Dokážme teraz (164). Nech $a,b\in\operatorname{int}I$, $b<a$; zvoľme $z\in(b,a)$.

(-: Nasledujúce úvahy majú opäť jednoduchú geometrickú interpretáciu. Označme $A:=[a,f(a)]$, $B:=[b,f(b]$, $Z:=[z,f(z)]$; keďže f je rýdzo konvexná funkcia a $b<z<a$, je smernica s_{BZ} priamky BZ menšia než smernica s_{ZA} priamky ZA; smernica s_{B+} dotyčnice v bode B sprava je ale menšia než s_{BZ} (to je geometrický obsah tvrdenia (162)), smernica s_{ZA} je naopak menšia než smernica s_{A-} dotyčnice v bode A zľava (pozri (163)) a tá je podľa (161) menšia alebo rovná smernici s_{A+} dotyčnice v bode A sprava, teda

$$s_{B+}<s_{BZ}<s_{ZA}<s_{A-}\le s_{A+}\,. \quad :-)$$

Z rýdzej konvexnosti funkcie f vyplýva (pozri dôkaz lemy pre prípad $x<a<y$, v ktorom trojicu $[x,a,y]$ nahradíme trojicou $[b,z,a]$)

$$\frac{f(z)-f(b)}{z-b}<\frac{f(a)-f(z)}{a-z}\,. \tag{166}$$

Z (162) (kde namiesto dvojice $[a,x]$ teraz uvažujeme dvojicu $[b,z]$) vyplýva

$$\frac{f(z)-f(b)}{z-b}>f'_+(b)\,, \tag{167}$$

podobne podľa (163) (pre $x=z$) platí

$$\frac{f(a)-f(z)}{a-z}<f'_-(a)\,. \tag{168}$$

Z (167), (166) a (168) potom vyplýva

$$f'_+(b)<\frac{f(z)-f(b)}{z-b}<\frac{f(a)-f(z)}{a-z}<f'_-(a)\,,$$

čím je nerovnosť (164) dokázaná.

Podľa (161) platí

$$f'_-(b)\le f'_+(b)\,,\quad f'_-(a)\le f'_+(a)\,,$$

odtiaľ a z (164) dostávame

$$f'_-(b)\le f'_+(b)<f'_-(a)\le f'_+(a)\,,$$

z týchto nerovností už vyplýva, že funkcie f'_- a f'_+ rastú na $\operatorname{int}I$.

(b) Stačí dokázať, že množina M_1 tých $x\in\operatorname{int}I$, v ktorých funkcia f nie je diferencovateľná, je najviac spočítateľná (množina M je totiž zjednotením M_1 s najviac dvojprvkovou množinou). Náš dôkaz bude založený na tomto pomocnom tvrdení.

Lema. *Ak funkcia f je rýdzo konvexná na intervale I a funkcia f'_- je spojitá v bode $a\in\operatorname{int}I$, tak f je v bode a diferencovateľná.*

Dôkaz. Podľa (161) a (164) (kde dvojicu $[b,a]$ nahradíme dvojicou $[a,x]$) platí

$$\big(\forall x\in\operatorname{int}I, x>a\big)\big(f'_-(a)\le f'_+(a)\le f'_-(x)\big)\,. \tag{169}$$

Pretože f'_- je podľa predpokladu spojitá v bode a, je

$$\lim_{x\to a+}f'_-(x)=\lim_{x\to a}f'_-(x)=f'_-(a)\,.$$

Keďže $\lim_{x\to a+}f'_-(a)=f'_-(a)$ a $\lim_{x\to a+}f'_+(a)=f'_+(a)$, vyplýva z nerovností (169) podľa vety .24

$$f'_-(a)\le f'_+(a)\le f'_-(a)\,,$$

tj.

$$f'_-(a)=f'_+(a)\,,$$

čo znamená (tvrdenie (c) poznámky v odstavci .81), že f je v bode a diferencovateľná. △

Z tejto lemy vyplýva inklúzia $M_1\subset\mathcal{N}$, kde $\mathcal{N}$ je množina všetkých bodov nespojitosti funkcie $g:=f'_-|_{\operatorname{int}I}$. Keďže g je rastúca funkcia, je $\mathcal{N}$ spočítateľná množina (časť (b) príkladu .58).

(c) (-: Presvedčenie o správnosti tohto tvrdenia možno opäť získať z geometrickej interpretácie: Ak $y, a, z \in I$, $y < a < z$, a $Y := [y, f(y)], A := [a, f(a)], Z = [z, f(z)]$, tak bod A leží na dotyčnici ku grafu funkcie f v bode A a body Y a Z ležia nad touto dotyčnicou, preto A musí ležať pod spojnicou bodov Y a Z. :-)

Chceme dokázať tvrdenie (pozri definíciu rýdzej konvexnosti)

$$\Big(\forall y, a, z \in I, y < a < z\Big) \left(f(a) < f(y) + \frac{f(z) - f(y)}{z - y}(a - y) \right) ,$$

tj. [100]

$$\Big(\forall y, a, z \in I, y < a < z\Big) \left(f(a) < \frac{z - a}{z - y} f(y) + \frac{a - y}{z - y} f(z) \right) . \tag{170}$$

Zvoľme teda $y, a, z \in I, y < a < z$, potom iste platí $a \in \operatorname{int} I$ a z (165) vyplýva (ak za x zvolíme najprv y a potom z)

$$f(y) > f(a) + f'(a)(y - a) ,$$
$$f(z) > f(a) + f'(a)(z - a) .$$

Ak prvú z týchto nerovností vynásobíme kladným číslom $\frac{z-a}{z-y}$ a druhú kladným číslom $\frac{a-y}{z-y}$ a získané nerovnosti sčítame, dostaneme nerovnosť z (170).

Dôsledok 1. *Ak f je rýdzo konvexná funkcia definovaná na intervale I, tak f je spojitá v každom vnútornom bode tohto intervalu.*

Dôkaz. Nech a je vnútorný bod intervalu I, potom funkcie $f_+ := f|_{I \cap [a,\infty)}$ a $f_- := f|_{I \cap (-\infty, a]}$ sú podľa tvrdenia (a) predchádzajúcej vety diferencovateľné v bode a, preto (lema .82(a))

$$\lim_{x \to a+} f(x) \quad \left(= \lim_{x \to a} f_+(x) \right) \quad = f(a) , \qquad \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) ;$$

tj.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) ,$$

a funkcia f je teda v bode a spojitá (tvrdenie (b) lemy z paragrafu .53).

(Pre záujemcov uvádzame ešte jeden dôkaz neodvolávajúci sa na predchádzajúcu vetu.

Nech a je vnútorný bod intervalu I; zvoľme $\varepsilon > 0$ tak, aby pre body $b := a - \varepsilon, c := a + \varepsilon$ platilo $b, c \in I$ (to sa dá, pretože a je vnútorný bod intervalu I).

Nech

$$f(x) = g(a) + \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a) , \quad h(x) = g(a) + \frac{g(c) - g(a)}{c - a}(x - a) .$$

:-) Z geometrickej interpretácie rýdzej konvexnosti vyplýva, že na intervale $[b, c]$ leží graf funkcie g medzi spojnicou bodov $\big(a, g(a)\big)$ a $\big(b, g(b)\big)$ (ktorá je grafom funkcie f) a priamkou spájajúcou bod $\big(a, f(a)\big)$ s bodom $\big(c, g(c)\big)$ (čo je graf funkcie h). (-:

Pre $x \in [a, c]$ platí $f(x) \le g(x) \le h(x)$, z vety .25 potom vyplýva [101] – keďže $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = g(a)$ – rovnosť $\lim_{x \to a+} g(x) = g(a)$, rovnako možno dokázať aj rovnosť $\lim_{x \to a-} g(x) = g(a)$.)

Dôsledok 2. *Nech $f : (c, d) \to \mathbf{R}$ je diferencovateľná funkcia. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*
(a) *funkcia f je rýdzo konvexná;*
(b) *funkcia f' je rastúca;*
(c) *pre každé $a \in (c, d)$ platí (165).*

.100 Definícia. Hovoríme, že bod $a \in \mathbf{R}$ je *inflexný bod funkcie* f, ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset D(f)$, pričom funkcia f má v bode a vlastnú alebo nevlastnú deriváciu a je rýdzo konvexná na jednom z intervalov $(a - \varepsilon, a]$, $[a, a + \varepsilon)$ a rýdzo konkávna na druhom z nich. $\triangle$

---

[100] pretože

$$f(y) + \frac{f(z) - f(y)}{z - y}(a - y) = f(y)\left(1 - \frac{a - y}{z - y}\right) + f(z)\frac{a - y}{z - y} = f(y)\frac{z - a}{z - y} + f(z)\frac{a - y}{z - y}$$

[101] Keďže používame "jednostrannú verziu" uvedenej vety, zopakujme pre istotu ešte raz štandardné úvahy umožňujúce aplikáciu viet o limitách v prípade jednostranných limít: označíme $I_+ := I \cap [a, \infty)$, $f_1 := f|_{I_+}$, $g_1 := g|_{I_+}$, $h_1 := h|_{I_+}$. Keďže $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = g(a)$, platí aj $\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} h_1(x) = g(a)$ (lema .11(a)), funkcie f_1, g_1, h_1 teda spĺňajú predpoklady vety .25 (pre $M = I_+, \mathcal{P} = (b, c) \setminus \{a\}$), podľa ktorej $\lim_{x \to a} g_1(x) = g(a)$, podľa definície limity sprava to znamená, že $\lim_{x \to a+} g(x) = g(a)$.

Z vety .98 vyplýva toto tvrdenie:

Nech funkcia $g : I \to \mathbf{R}$ je diferencovateľná v každom vnútornom bode intervalu I. Ak $a \in \operatorname{int} I$, pričom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset I$ a funkcia g' rastie na jednom z intervalov $(a-\varepsilon, a]$, $[a, a+\varepsilon)$ a klesá na druhom z nich, tak a je inflexný bod funkcie g.

Postačujúce podmienky na to, aby funkcia rástla na jednom z intervalov $(a-\varepsilon, a]$, $[a, a+\varepsilon)$ a klesala na druhom z nich, sú sformulované v dôsledku 1 z odseku .95 a tvrdení (a) vety .96; tvrdenie (b) tejto vety stanovuje postačujúcu podmienku na to, aby funkcia na $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ rástla, resp. klesala. Ak uvedené tvrdenia prepíšeme pre prípad $f = g'$, dostaneme nasledujúcu vetu.

Veta. (a) *Ak funkcia g'' zmení v bode a znamienko* [102], *tak a je inflexný bod funkcie g.*

(b) *Nech funkcia g je $(n+1)$-krát $(n \in \mathbf{N})$ diferencovateľná na niektorom okolí $\mathcal{O}$ bodu a a má v bode a vlastnú alebo nevlastnú $(n+2)$-hú deriváciu, pričom*

$$g''(a) = g'''(a) = \cdots = g^{(n+1)}(a) = 0\,, \quad g^{(n+2)}(a) \neq 0\,.$$

Potom a je inflexný bod funkcie g práve vtedy, keď n je nepárne.

14 L'Hospitalovo pravidlo

.101 Pasáž o l'Hospitalovom pravidle, ktoré umožňuje za istých predpokladov previesť výpočet neurčitého výrazu $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$ na výpočet $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, uveďme jednoduchou lemou, ktorú v blízkej budúcnosti využijeme a ktorá dokumentuje, že môže existovať vzťah medzi $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a podielom $\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Lema. *Nech funkcie f, g definované na množine M sú diferencovateľné v bode $a \in M$, pričom $f(a) = g(a) = 0$ a $g'(a) \neq 0$. Potom*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =^{103} \frac{f'(a)}{g'(a)}\,.$$

Dôkaz. Toto tvrdenie vyplýva z nasledujúceho výpočtu

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'a)}{g'(a)}$$

(ako je zrejmé, predpoklad $f(a) = g(a) = 0$ sme využili hneď v prvej z uvedených rovností, podmienka $g'(a) \neq 0$ nám umožnila v poslednej rovnosti použiť vetu o limite podielu). ♠

Sformulujeme teraz prvé l'Hospitalovo pravidlo, umožňujúce v istých situáciách výpočet limít neurčitých výrazov typu $\frac{0}{0}$.

.102 Veta (prvé l'Hospitalovo pravidlo). *Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod intervalu I, nech diferencovateľné funkcie $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ spĺňajú nasledujúce predpoklady:*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$;

(ii) $\big(\forall x \in I \setminus \{a\}\big)\big(g(x) \neq 0\big)$;

(iii) $\big(\forall x \in I \setminus \{a\}\big)\big(g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0\big)$.

Potom platí: ak existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje aj $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad . \tag{171}$$

Poznámka. Zrejme uvedená formulácia zahŕňa prípad jednostranných limít (ak $a \in \mathbf{R}$ je krajný bod intervalu I, resp. $a = \infty$ alebo $a = -\infty$) aj obojstranných limít (ak a je vnútorný bod intervalu I).

[102] tj. ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $O(a,\varepsilon) \subset D(g'')$, pričom na jednom z intervalov $(a-\varepsilon, a), (a, a+\varepsilon)$ nadobúda funkcia g'' len kladné a na druhom z nich len záporné hodnoty

[103] keďže funkcie f, g sú v bode a diferencovateľné a $f(a) = g(a) = 0$, platí aj rovnosť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, teda $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ je neurčitým výrazom typu $\frac{0}{0}$

Dôkaz je v prípade $a \in \mathbf{R}$ založený na Cauchyho vete o strednej hodnote (pozri rovnosť (122) vo vete .91; jej použitie umožňujú predpoklady (ii) a (iii) nášho tvrdenia). Funkcie $F, G : I \to \mathbf{R}$ dané predpisom

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak} \quad x \in I \setminus \{a\} \\ 0, & \text{ak} \quad x = a \end{cases} \quad , \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ak} \quad x \in I \setminus \{a\} \\ 0, & \text{ak} \quad x = a \end{cases}$$

(tj. funkcie f a g spojite dodefinované v bode a) spĺňajú predpoklady vety .91 na každom uzavretom intervale s koncovými bodmi a, x, kde $x \in I \setminus \{a\}$; preto (keďže $F(a) = G(a) = 0$)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,, \tag{172}$$

pričom c "leží medzi x a a".

Nech $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R}^*$; keďže chceme dokázať rovnosť $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, zvoľme okolie $\mathcal{O}$ bodu L a hľadajme prestencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a tak, aby platilo

$$\left(\forall x \in \mathcal{P}_1 \cap I\right)\left(\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathcal{O}\right) . \tag{173}$$

Pretože $L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, k okoliu $\mathcal{O}$ iste existuje prstencové okolie $\mathcal{P}_1$ bodu a s vlastnosťou

$$\left(\forall c \in \mathcal{P}_1 \cap D\right)\left(\frac{f'(c)}{g'(c)} \in \mathcal{O}\right) , \tag{174}$$

kde $D \subset I$ je definičný obor funkcie $\frac{f'}{g'}$. Ukážeme, že toto $\mathcal{P}_1$ vyhovuje našim požiadavkám. Podľa (172) je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{175}$$

pre niektoré c "medzi x a a", pre x a c vystupujúce v (175) teda platí implikácia

$$x \in \mathcal{P}_1 \cap I \Longrightarrow c \in \mathcal{P}_1 \cap D \tag{176}$$

(pričom inklúzia $c \in D$ vyplýva zo znenia vety .91). Tvrdenie (173) teraz vyplýva z (176), (175) a (174). $\triangle$

Zostáva dokázať naše tvrdenie ešte pre $a = \infty$ a $a = -\infty$. V prípade $a = \infty$ na výpočet $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ použijeme substitúciu $x = \frac{1}{t}$ a už dokázanú verziu prvého l'Hospitalovho pravidla v bode 0 (postup pre $a = -\infty$ je rovnaký):

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \left| x = \frac{1}{t} \right| = \lim_{t\to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \overset{\text{l'Hosp}}{=} \lim_{t\to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to)+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \left| t = \frac{1}{x} \right| = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

(podrobné zdôvodnenie správnosti jednotlivých krokov prenechávame na čitateľa). ♠

Na výpočet limít neurčitých výrazov typu $\frac{\infty}{\infty}$ možno za istých predpokladov použiť druhé l'Hospitalovo pravidlo.

.103 Veta (druhé l'Hospitalovo pravidlo). *Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod intervalu I, nech diferencovateľné funkcie $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ spĺňajú predpoklady*

(i) $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$;

(ii) $\left(\forall x \in I \setminus \{a\}\right)\left(g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0\right)$.

Potom platí: ak existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *tak existuje aj* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dôkaz urobíme pre prípad $a \in \mathbf{R}$ *je ľavý koncový bod intervalu* I *alebo* $a = -\infty$ $\Big($v tomto prípade budeme teda z existencie jednostrannej limity $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ odvodzovať existenciu limity $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}\Big)$; dôkaz v prípade, že $a \in \mathbf{R}$ je pravý koncový bod intervalu I alebo $a = \infty$, je rovnaký; ak $a \in \mathbf{R}$ je vnútorný bod intervalu I, je rovnosť $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ dôsledkom rovností $\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ktoré vyplývajú z už dokázaných jednostranných verzií našej vety, a rovnosti $\lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ktorá vyplýva z predpokladu existencie limity $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. $\triangle$

Nech teda $a \in \mathbf{R}$ je ľavý koncový bod intervalu I alebo $a = -\infty$. Keďže podľa predpokladu (i) je $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$, existuje prstencové okolie $\mathcal{T}$ bodu a s vlastnosťou

$$\big(\forall x \in \mathcal{T} \cap I\big)\big(g(x) \neq 0\big) \ . \tag{177}$$

Z (177) a predpokladu (ii) vyplýva, že na každom uzavretom intervale s koncovými bodmi x a x_1, kde $x \neq x_1$ a $x, x_1 \in \mathcal{T} \cap I$, môžeme použiť Cauchyho vetu o strednej hodnote [104], podľa ktorej existuje c ležiace "medzi x a x_1" tak, že

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ , \tag{178}$$

odtiaľ a z rovnosti

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \left(1 + \frac{g(x)}{g(x_1)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)}$$

potom dostávame, že pre každé $x, x_1 \in \mathcal{T} \cap I$, $x \neq x_1$, existuje c ležiace "medzi x a x_1", pre ktoré platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 + \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)} \ . \tag{179}$$

Predpokladajme najprv, že $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R}$ a dokazujme rovnosť $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

(-: Náš postup bude nasledujúci: pre x a x_1 ležiace blízko k a leží aj c blízko k a, a keďže $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, líši sa výraz $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ málo od L; ak teraz zvolíme x_1 pevné, vyplýva z rovností $\lim_{x\to a} \frac{g(x_1)}{g(x)} = 0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x_1}{g(x)}$ (tie sú dôsledkom rovnosti $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$), že pre x ležiace blízko k a sa výraz $\left(1 + \frac{g(x_1}{g(x)}\right)$ líši málo od čísla 1 a podiel $\frac{f(x_1)}{g(x)}$ málo od nuly, a teda pre takéto x pravá strana rovnosti (179) leží blízko k číslu L. :-)

Zvoľme teda ε–okolie čísla L a hľadajme prstencové okolie $\mathcal{U}$ bodu a s vlastnosťou

$$\big(\forall x \in \mathcal{U} \cap I\big) \left(L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon\right) \ .$$

Keďže $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, existuje prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a s vlastnosťou

$$\big(\forall c \in \mathcal{P} \cap D\big) \left(L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(c)}{g'(c)} < L + \frac{\varepsilon}{2}\right) \ , \tag{180}$$

kde $D \subset I$ je definičný obor funkcie $\frac{f'}{g'}$. Vyberme $x_1 \in \mathcal{P}$ pevne; pretože c vystupujúce v (178) leží "medzi x a x_1", platí implikácia

$$x, x_1 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{P} \cap I \Longrightarrow c \in \mathcal{T} \cap \mathcal{P} \cap D \ \subset \ \mathcal{P} \cap \mathcal{D} \tag{181}$$

(pritom inklúzia $c \in D$ vyplýva zo znenia Cauchyho vety o strednej hodnote; pripomeňme tiež, že (178) platí pre $x, x_1 \in \mathcal{T} \cap I$). Z (178), (181) a (180) dostávame

$$\big(\forall x \in \mathcal{T} \cap \mathcal{P} \cap I\big) \left(L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} < L + \frac{\varepsilon}{2}\right) \ . \tag{182}$$

[104] keby a bol *vnútorný* bod intervalu I, mohli by sme Cauchyho vetu použiť na každom uzavretom intervale $J \subset \mathcal{T} \cap I$; požadovali by sme teda. aby koncové body x a x_1 intervalu J ležali na rovnakú stranu od bodu a (tj. aby bod a neležal "medzi x a x_1"); keďže v ďalšom zvolíme bod x_1 pevne, platili by naše úvahy len pre body x ležiace na tú istú stranu od a ako x_1; to je dôvod, prečo náš dôkaz robíme pre prípad jednostrannej limity

Kedže $\lim_{x\to a}\frac{g(x_1)}{g(x)}=0$ $\big($to vyplýva z predpokladu $\lim_{x\to a}|g(x)|=\infty\big)$, je $\lim_{x\to a}\left(1+\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)=1$, preto existuje prstencové okolie $\mathcal{R}$ bodu a, pre ktoré platí

$$(\forall x\in\mathcal{R}\cap\mathcal{T}\cap I)\left(1+\frac{g(x_1)}{g(x)}>0\right)\ ^{105}. \tag{183}$$

Z (179), (182) a (183) potom dostávame $\Big($ak všetky členy v nerovnosti (182) vynásobíme výrazom $1+\frac{g(x_1)}{g(x)}$ [106] a potom pripočítame podiel $\frac{f(x_1)}{g(x)}\Big)$

$$(\forall x\in\mathcal{P}\cap\mathcal{R}\cap\mathcal{T}\cap I)\left(h_1(x)<\frac{f(x)}{g(x)}<h_2(x)\right)\ , \tag{184}$$

kde

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \left(L-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1+\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}\ , \\ h_2(x) &= \left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1+\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}\ . \end{aligned}$$

Pretože $\lim_{x\to a}h_1(x)=L-\frac{\varepsilon}{2}$, existuje prstencové okolie $\mathcal{S}_1$ bodu a tak, že platí

$$(\forall x\in\mathcal{S}_1\cap\mathcal{T}\cap I)\left(\left|h_1(x)-L-\frac{\varepsilon}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\ ,$$

a teda aj

$$(\forall x\in\mathcal{S}_1\cap\mathcal{T}\cap I)\big(L-\varepsilon<h_1(x)\big)\ , \tag{185}$$

podobne z rovnosti $\lim_{x\to a}h_2(x)=L+\frac{\varepsilon}{2}$ vyplýva existencia prstencového okolia $\mathcal{S}_2$ bodu a s vlastnosťou

$$(\forall x\in\mathcal{S}_2\cap\mathcal{T}\cap I)\big(h_2(x)<L+\varepsilon\big)\ . \tag{186}$$

Z (184), (185), (186) dostávame

$$(\forall x\in\mathcal{P}\cap\mathcal{R}\cap\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2\cap\mathcal{T}\cap I)\left(L-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<L+\varepsilon\right)\ ,$$

a $\mathcal{P}\cap\mathcal{R}\cap\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2\cap\mathcal{T}$ je teda hľadané prstencové okolie bodu a. △

Postup v prípade $L=\infty$ je obdobný (prípad $L=-\infty$ si čitateľ už iste rád premyslí sám); zvoľme $K\in\mathbf{R}$, potom existuje prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a s vlastnosťou

$$(\forall c\in\mathcal{P}\cap D)\left(K+1<\frac{f'(c)}{g'(c)}\right)\ ,$$

odtiaľ dostávame

$$(\forall x\in\mathcal{P}\cap\mathcal{R}\cap\mathcal{T}\cap I)\left(h(x)<\frac{f(x)}{g(x)}\right)\ , \tag{187}$$

kde $\mathcal{T}$, resp. $\mathcal{R}$, je prstencové okolie bodu a, pre ktoré platí (177), resp. (183), a

$$h(x)=(K+1)\left(1+\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}\ . \tag{188}$$

Kedže $\lim_{x\to a}h(x)=K+1$, existuje prstencové okolie $\mathcal{S}$ bodu a s vlastnosťou

$$(\forall x\in\mathcal{S}\cap\mathcal{T}\cap I)\big(h(x)>K\big)\ ,$$

z (187) a (188) potom vyplýva, že $\mathcal{U}:=\mathcal{P}\cap\mathcal{R}\cap\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ je prstencové okolie bodu a, pre ktoré platí

$$(\forall x\in\mathcal{U}\cap I)\left(\frac{f(x}{g(x)}>K\right)\ .$$

[105] funkcia (premennej x) $1+\frac{g(x_1)}{g(x)}$ je definovaná pre tie $x\in I$, pre ktoré $g(x)\neq 0$, teda iste pre všetky $x\in\mathcal{T}\cap I$, preto sa v (183) — a v (185) a (186) — vyskytuje prstencové okolie $\mathcal{T}$

[106] kedže pre $x\in\mathcal{R}\cap I$ je tento výraz kladný, zostanú pre $x\in\mathcal{P}\cap\mathcal{R}\cap\mathcal{T}\cap I$ aj po vynásobení nerovnosti z (182) zachované

.104 Príklady. **1.** Použitím l'Hospitalovho pravidla nájdeme teraz niekoľko limít, ktorých znalosť sa nám v budúcnosti môže hodiť.

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0$ *pre* $\alpha, \beta > 0$.

Limitovaný výraz napíšeme v tvare

$$\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \left(\frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha$$

a na výpočet $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}$ použijeme druhé l'Hospitalovo pravidlo (overenie predpokladov (i) a (ii) na intervale $(0,\infty)$ prenechávame samozrejme na čitateľa):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}} \overset{\text{l'Hosp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\beta}{\alpha}x^{\beta/\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{x^{\beta/\alpha}} = 0$$

(posledná rovnosť vyplýva z predpokladu $\alpha, \beta > 0$ a rovnosti $\lim_{x\to\infty} x^\gamma = \infty$ pre $\gamma > 0$).

Podľa vety o limite zloženej funkcie potom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \left|\frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}} = t\right| = \lim_{t\to 0} t^\alpha = 0\ .$$

b) $\lim_{x\to 0} x^\beta \ln^\alpha x = 0$ *pre* $\alpha, \beta > 0$.

Postup bude obdobný; limitovaný výraz prepíšeme na tvar

$$x^\beta \ln^\alpha x = \left(x^{\beta/\alpha}\ln x\right)^\alpha$$

a na výpočet $\lim_{x\to 0} x^{\beta/\alpha}\ln x$ (čo je neurčitý výraz typu $0.\infty$) skúsime použiť druhé l'Hospitalovo pravidlo (a preto limitovaný súčin najprv zapíšeme v tvare podielu):

$$\lim_{x\to 0} x^{\beta/\alpha}\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-\beta/\alpha}} \overset{\text{l'Hosp}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\beta}{\alpha}x^{-\beta/\alpha-1}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\alpha}{\beta}x^{\beta/\alpha}\right) = 0\ .$$

Z vety o limite zloženej funkcie potom opäť vyplýva

$$\lim_{x\to 0} x^\beta \ln^\alpha x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{x^{-\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \left|\frac{\ln x}{x^{-\beta/\alpha}} = t\right| = \lim_{t\to 0} t^\alpha = 0\ .$$

2. *Ak spojitá funkcia $f : I \to \mathbf{R}$, kde I je interval, je diferencovateľná v každom bode $x \in I \setminus \{a\}$, kde $a \in I$, pričom existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{x\to a} f'(x)$, tak f má v bode a (vlastnú alebo nevlastnú) deriváciu a platí*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)\ .$$

Na dôkaz uvedenej rovnosti stačí pri výpočte limity $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ použiť prvé l'Hospitalovo pravidlo:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{\text{l'Hosp}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to a} f'(x)\ .$$

Poznámky. **1.** I keď l'Hospitalovo pravidlo možno často s úspechom využiť nielen na výpočet limít neurčitých výrazov typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$, ale aj $0\cdot\infty$ (čo sme videli v príklade 2) a $\infty - \infty$ [107], je pri jeho používaní potrebná istá opatrnosť; ako ukazujú nasledujúce príklady, môže sa v prípade, že vo vete .103 nie je splnený predpoklad (ii) (na overovanie ktorého sa pri používaní l'Hospitalovho pravidla často zabúda), stať, že $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ aj limita neurčitého výrazu $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ síce existujú, ale sú navzájom rôzne (príklady 1 a 2), prípadne, že $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje ale $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje (príklad 3.)

Pri konštrukcii týchto (depresívnych) kontrapríkladov použijeme nasledujúce tvrdenia (z ktorých prvé dokážeme neskôr v odseku **??**).

Lema 1. *Ak $f : I \to \mathbf{R}$, kde I je interval, je spojitá funkcia, tak existuje diferencovateľná funkcia $F : I \to \mathbf{R}$ taká, že $F'(x) = f(x)$ pre každé $x \in I$.*

[107] ide len o to, rozdiel $f - g$ vhodným spôsobom napísať v tvare podielu; vo všeobecnosti možno využiť rovnosť

$$f - g = \frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}\ ,$$

podiel na jej pravej strane je potom neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, v konkrétnych prípadoch však možno tento prepis urobiť aj odlišným spôsobom

LEMA 2. *Nech* $F_1 : [1,\infty) \to \mathbf{R}$, $F_2 : [1,\infty) \to \mathbf{R}$ *sú diferencovateľné funkcie také, že* $F_1'(x) = \frac{\sin x}{x^2}$, $F_2'(x) = \frac{\cos 2x}{x}$ *pre všetky* $x \in [1,\infty)$ [108]. *Potom existujú konečné limity* $\lim_{x\to\infty} F_1(x)$, $\lim_{x\to\infty} F_2(x)$.

DÔKAZ. Naše tvrdenie dokážeme pre funkciu F_1, dôkaz pre F_2 je obdobný. Keďže $F_1'(x) = \frac{\sin x}{x^2}$, je $F_1'(x) > 0$ pre $x \in [1,\pi)$ a $x \in \big(2k\pi, 2(k+1)\pi\big)$, $k \in \mathbf{N}$, $F_1'(x) < 0$ pre $x \in \big((2k-1)\pi, 2k\pi\big)$, $k \in \mathbf{N}$. Funkcia F_1 teda rastie na $[1,\pi]$, klesá na $[\pi, 2\pi]$, rastie na $[2\pi, 3\pi]$ atď. Označme

$$a_n := F_1(2n\pi) , \qquad b_n := F_1\big((2n+1)\pi\big) , \qquad n \in \mathbf{N} .$$

Keďže na intervale $\big[2n\pi, (2n+1)\pi\big]$ funkcia F_1 rastie, je

$$a_n < b_n , n \in \mathbf{N} . \quad \triangle \tag{189}$$

Dokážeme teraz, že

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 . \tag{190}$$

Podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote je

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= F_1\big((2n+1)\pi\big) - F_1(2n\pi) = F_1'(c)\pi = \frac{\sin c}{c^2}\,\pi \le \frac{1}{c^2}\,\pi < \\ &< \frac{\pi}{(2n)^2\pi} = \frac{1}{(2n)^2} , \end{aligned}$$

pričom posledná nerovnosť je dôsledkom inklúzie $c \in \big(2n\pi, (2n+1)\pi\big)$. Z nerovností

$$0 < b_n - a_n < \frac{1}{(2n)^2} , \quad n \in \mathbf{N} ,$$

(prvá z nich vyplýva z (189)) už dostávame (190) (podľa vety .25). $\triangle$

Dokážeme ďalej, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť (dôkaz skutočnosti, že postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesá, ktorý je analogický, prenechávame na čitateľa), tj. že

$$a_{n+1} - a_n > 0 , \quad n \in \mathbf{N} .$$

(-: Ak si načrtneme graf funkcie $F_1'x = \frac{\sin x}{x^2}$ na intervale $\big(2n\pi, (2n+2)\pi\big)$, vidíme, že absolútna hodnota funkčnej hodnoty je v bode $x \in \big(2n\pi, (2n+1)\pi\big)$ vždy väčšia než v bode $x+\pi$. To znamená, že rast funkcie F_1 na intervale $\big[2n\pi, (2n+1)\pi\big]$ je "strmší" než jej klesanie na $\big[2n+1\pi, (2n+2)\pi\big]$, a teda že rozdiel funkčných hodnôt v bodoch $(2n+1)\pi$ a $2n\pi$ (tj. $b_n - a_n$) musí byť väčší než rozdiel hodnôt v bodoch $(2n+2)\pi$ a $(2n+1)\pi$ (tj. $a_{n+1} - b_n$). Túto úvahu môžeme prevteliť do formálnych zápisov pomocou tvrdenia z poznámky 1 v odseku .93. :-)

Nech

$$h(x) := F_1(x) - F_1(2n\pi) , \qquad f(x) := -\Big(F_1(x+\pi) - F_1\big((2n+1)\pi\big)\Big) , \qquad x \in \big[2n\pi, (2n+1\pi\big] ,$$

potom — keďže $h(2n\pi) = f(2n\pi) = 0$ a $h'(x) = F_1'(x) > -F_1'(x+\pi) = f'(x)$ — podľa tvrdenia z poznámky 1 v odseku .93 (kde položíme $c = 2n\pi$, $d = (2n+1\pi)$) platí $h(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \big(2n\pi, 2n+1)\pi\big]$; ak zvolíme $x = (2n+1)\pi$, dostávame

$$\begin{aligned} 0 &< h\big((2n+1)\pi\big) - f\big((2n+1)\pi\big) = F_1\big((2n+1)\pi\big) - F_1(2n\pi) + F_1\big(2n+2)\pi\big) - F_1\big((2n+1)\pi\big) = \\ &= F_1\big((2n+2)\pi\big) - F_1(2n\pi) = a_{n+1} - a_n , \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať. $\triangle$.

Z monotónnosti postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a z (189) dostávame

$$a_1 < a_n < b_n , \quad n \in \mathbf{N} ,$$

teda $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená klesajúca postupnosť, preto existuje konečná $\lim_{n\to\infty} b_n$. Rovnako možno dokázať existenciu konečnej $\lim_{n\to\infty} a_n$; z (190) pritom vyplýva rovnosť

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n . \quad \triangle \tag{191}$$

[108] existencia funkcií F_1, F_2 vyplýva z predchádzajúcej lemy

Keďže F_1 rastie na $\big[2n\pi, (2n+1)\pi\big]$ a klesá na $\big[(2n+1)\pi, (2n+2)\pi\big]$, je číslo $b_n = F_1\big((2n+1)\pi\big)$ maximom funkcie F_1 na intervale $\big[2n\pi, (2n+2)\pi\big]$; pretože $F_1\big(2n\pi\big) = a_n < a_{n+1} = F_1\big((2n+2)\pi\big)$, nadobúda F_1 svoje minimum na $\big[2n\pi, (2n+2)\pi\big]$ v bode $2n\pi$; platia teda nerovnosti

$$\Big(\forall x \in \big[2n\pi, (2n+2)\pi\big]\Big)\big(a_n \le F_1(x) \le b_n\big) ,$$

z nich a z (191) už vyplýva existencia konečnej $\lim_{x\to\infty} F_1(x)$.

PRÍKLAD 1. Nech funkcie $f, g : [1,\infty) \to \mathbf{R}$ sú dané predpismi

$$f(x) = 2\ln x - \cos x + 2F_1(x) - F_2(x) , \qquad g(x) = \ln x - \cos x ,$$

kde F_1, F_2 sú funkcie z lemy 2. Potom z nerovnosti

$$\big(\forall x \in [1,\infty)\big)\big(g(x) \ge \ln x - 1\big)$$

vyplýva — keďže $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ — rovnosť $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, a teda aj

$$\lim_{x\to\infty} |g(x)| = \infty ,$$

čo je predpoklad (i) vety .103. Ďalej platí

- funkcie f, g sú diferencovateľné:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2}{x} + \sin x + \frac{2\sin x}{x^2} - \frac{\cos 2x}{x} = \frac{2}{x} + \sin x + \frac{2\sin x}{x^2} - \frac{1 - 2\sin^2 x}{x} = \\
&= \frac{2}{x} + \sin x + \frac{2\sin x}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2\sin^2 x}{x} = \frac{1}{x} + \sin x + \frac{2\sin x}{x}\left(\frac{1}{x} + \sin x\right) = \\
&= \left(\frac{1}{x} + \sin x\right)\left(1 + \frac{2\sin x}{x}\right) , \\
g'(x) &= \frac{1}{x} + \sin x ;
\end{aligned}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x} + \sin x\right)\left(1 + \frac{2\sin x}{x}\right)}{\frac{1}{x} + \sin x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2\sin x}{x}\right) = 1$
  $\Big($podľa vety .14 je totiž $\lim_{x\to\infty} \frac{2\sin x}{x} = 0\Big)$;

ale

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x - \cos x + 2F_1(x) - F_2(x)}{\ln x - \cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{\cos x}{\ln x} + 2\frac{F_1(x)}{\ln x} - \frac{F_2(x)}{\ln x}}{1 - \frac{\cos x}{\ln x}} = 2 ,$
  pretože $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{\ln x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{F_1(x)}{\ln x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{F_2(x)}{\ln x} = 0$ podľa vety .18 a vety o limite súčinu (existenciu konečných limít $\lim_{x\to\infty} F_1(x)$ a $\lim_{x\to\infty} F_2(x)$ sme dokázali v leme 2).

Pripomeňme, že v tomto prípade nebola na žiadnom okolí bodu ∞ splnená podmienka (ii) z druhého l'Hospitalovho pravidla; v každom okolí bodu ∞ totiž existujú body x, pre ktoré $\frac{1}{x} + \sin x = 0$, tj. body x, v ktorých $f'(x) = 0 = g'(x)$.

PRÍKLAD 2. Nech

$$f(x) = \ln x - \cos x + 2\sqrt{x} + 2F_3(x) - F_4(x) , \qquad g(x) = \ln x - \cos x , \qquad x \in [1,\infty) ,$$

kde $F_3 : [1,\infty) \to \mathbf{R}$, $F_4 : [1,\infty) \to \mathbf{R}$ sú diferencovateľné funkcie také, že $F_3'(x) = \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$, $F_4'(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}$. Rovnako ako v prípade funkcií F_1, F_2 z príkladu 1 možno dokázať existenciu konečných limít $\lim_{x\to\infty} F_3(x)$, $\lim_{x\to\infty} F_4(x)$. Pre funkcie f, g platí

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} |g(x)| = \infty$;
- $\displaystyle f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \sin x\right)\left(1 + \frac{2\sin x}{\sqrt{x}}\right) , \quad g'(x) = \frac{1}{x} + \sin x$;

preto

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2\sin x}{\sqrt{x}}\right) = 1$;

ale

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + 2 + \frac{2F_3(x)}{\sqrt{x}} - \frac{F_4(x)}{\sqrt{x}}\right)}{\ln x\left(1 - \frac{\cos x}{\ln x}\right)} = \infty$

  (pretože $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \infty$ podľa druhého l'Hospitalovho pravidla a limita pre $x \to \infty$ zátvorky v čitateli, resp. v menovateli, je 2, resp 1).

Príklad 3. Pre $x \in [1, \infty)$ položme

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} - 8F_5(\sqrt{x}) - \sin 2\sqrt{x}\,, \\ g(x) &= 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x}\,, \end{aligned}$$

kde $F_5 : [1, \infty) \to \mathbf{R}$ je diferencovateľná funkcia taká, že $F_5'(x) = \frac{\cos x}{x}$. Zopakovaním postupu z lemy 2 možno dokázať existenciu konečnej $\lim_{x\to\infty} F_5(x)$, preto aj $\lim_{x\to\infty} F_5(\sqrt{x})$ je konečná. Z nerovnosti

$$g(x) = \sqrt{x}\left(4 + 2\sin\sqrt{x} + \frac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) \geq \sqrt{x}\left(2 + \frac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$$

vyplýva (podľa vety .20(b), resp. druhého "pravidla" v strednom stĺpci z (33)), že

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty\,.$$

Ďalej platí

- $f'(x) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \cos\sqrt{x}\right)\left(1 - \dfrac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$ [109], $\quad g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \cos\sqrt{x}$;

preto

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \dfrac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = 1$

  $\Big($pretože $\lim_{x\to\infty} \frac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$ podľa viet .18 a .14),

ale

- $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje; pre $x > 0$ totiž platí

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\sqrt{x}\left(2 + 2\sin\sqrt{x} + \frac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{8F_5(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{\sin 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(4 + 2\sin\sqrt{x} + \frac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)} = \\ &= \frac{2 + 2\sin\sqrt{x} + \frac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{8F_5(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{\sin 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{4 + 2\sin\sqrt{x} + \frac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,, \end{aligned}$$

  pritom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{F_5(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0\,;$$

  ak teraz zvolíme $x_n = (2\pi n)^2$, $y_n = \left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)^2$, tak $\sin\sqrt{x_n} = 0$, $\sin\sqrt{y_n} = 1$, preto

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2 + 2\sin\sqrt{x_n} + \frac{2\cos\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_n}} - \frac{8F_5(\sqrt{x_n})}{\sqrt{x_n}} - \frac{\sin 2\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_n}}}{4 + 2\sin\sqrt{x_n} + \frac{2\cos\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_n}}} = \frac{2+0+0-0-0}{4+0+0} = \\ &= \frac{1}{2}\,, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)}{g(y_n)} &= \frac{2}{3}\,, \end{aligned}$$

  neexistencia limity $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ potom vyplýva z lemy .11(c).

[109] pripomeňme, že $\left(F_5(\sqrt{x})\right)' = F_5'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Predpoklad (ii) z vety .103 (a identický predpoklad (iii) z vety .102) požaduje, aby funkcie f' a g' nenadobúdali súčasne nulové hodnoty. Nasledujúca lema, ukazuje, že i v prípade, že f' a g' nadobúdajú súčasne nulové hodnoty, možno použiť l'Hospitalovo pravidlo, ovšem za dodatočného predpokladu, že funkcia g' nezmení napravo ani naľavo od bodu a znamienko. Preto v predchádzajúcich kontrapríkladoch je porušená nielen podmienka (ii) z vety .103, ale aj predpoklad (ii) nasledujúcej lemy.

Lema. *Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je pravý koncový bod intervalu I, nech diferencovateľné funkcie $f, g : I \to \mathbf{R}$ spĺňajú nasledujúce podmienky:*

(i) $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$ *alebo* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$*;*

(ii) $\big(\forall x \in I\big)\big(g'(x) \geq 0\big)$ *alebo* $\big(\forall x \in I\big)\big(g'(x) \leq 0\big)$*;*

(iii) $\big(\forall x \in I\big)\big(g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0\big)$.

Potom platí: ak existuje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*, tak existuje aj* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dôkaz. Predpokladajme, že $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$, je splnená podmienka (iii) a pre všetky $x \in I$ je $g'(x) \geq 0$ (teda g je neklesajúca funkcia; odtiaľ a z predpokladu $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$ dostávame rovnosť $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$); prispôsobenie dôkazu na ostatné prípady prenechávame dychtivému čitateľovi.

Z predpokladu $\lim_{x\to a} \frac{f'x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R}$ vyplýva pre dané $\varepsilon > 0$ existencia prstencového okolia $\mathcal{P}$ bodu a s vlastnosťou

$$\big(\forall x \in \mathcal{P} \cap D\big) \left(L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \frac{\varepsilon}{2}\right) ,$$

kde $D := \{x \in I; g'(x) \neq 0\}$ je definičný obor funkcie $\frac{f'}{g'}$. Pre $x \in \mathcal{P} \cap D$ teda platí

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) g'(x) \leq f'(x) \leq \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) g'(x) . \tag{192}$$

Z predpokladu (iii) vyplýva, že (192) platí aj pre tie $x \in I$, v ktorých $g'(x) = 0$, teda uvedené nerovnosti platia pre všetky $x \in \mathcal{P} \cap I$.

Nech x_1 je ľavý koncový bod intervalu $\mathcal{P} \cap I$ (o okolí $\mathcal{P}$ môžme iste bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že je to zdola ohraničená množina). Z tvrdenia v poznámke 1 z odseku .93 $\Big($kde ostré nerovnosti nahradíme neostrými, za c zvolíme x_1 a v úlohe funkcií f, h budú vystupovať najprv funkcie $\big(L - \varepsilon/2\big)\big(g(x) - g(x_1)\big)$ a $f(x) - f(x_1)$ (pri dôkaze prvej z nasledujúcich nerovností) a potom (pri dôkaze druhej z nich) funkcie $f(x) - f(x_1)$ a $\big(L + \varepsilon/2\big)\big(g(x) - g(x_1)\big)\Big)$ vyplýva

$$\big(\forall x \in (x_1, a)\big) \left(\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) \big(g(x) - g(x_1)\big) \leq f(x) - f(x_1) \leq \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) \big(g(x) - g(x_1)\big)\right) . \tag{193}$$

Keďže $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, existuje prstencové okolie $\mathcal{T}$ bodu a tak, že pre $x \in \mathcal{T} \cap I$ platí $g(x) > g(x_1)$, tj.

$$\big(\forall x \in \mathcal{T} \cap I\big)\big(g(x) - g(x_1) > 0\big) .$$

Pre $x \in \mathcal{T} \cap (x_1, a) = \mathcal{T} \cap \mathcal{P} \cap I$ sa teda nerovnosti v (193) po vydelení číslom $g(x) - g(x_1)$ nezmenia, platí teda

$$\big(\forall x \in \mathcal{T} \cap \mathcal{P} \cap I\big) \left(L - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \leq L + \frac{\varepsilon}{2}\right) . \tag{194}$$

Ďalší postup je totožný s úvahami z dôkazu vety .103 za vzťahom (182) (s ktorým je (194) v podstate zhodný).

15 Taylorov polynóm

V tejto kapitole sa budeme snažiť pre danú funkciu f definovanú na intervale I a daný bod $a \in I$ nájsť spomedzi všetkých polynómov stupňa najviac n ten, ktorý "najlepšie aproximuje funkciu f blízko bodu a" (čo znamená, že od hľadaného polynómu T_n budeme požadovať, aby pre každý od neho rôzny polynóm P stupňa najviac n existovalo prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a s vlastnosťou

$$\big(\forall x \in \mathcal{P} \cap I\big)\big(|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - P(x)|\big) , \tag{195}$$

tj. aby dostatočne blízko k bodu a platilo, že chyba, ktorej sa dopustíme, ak funkciu f nahradíme polynómom T_n, je menšia, než chyba, ktorá by vznikla nahradením funkcie f polynómom P.).

V prípade $n = 0$ teda hľadáme konštantu, ktorá sa spomedzi všetkých konštánt najmenej odlišuje od hodnôt funkcie f pre x blízke k a; dúfame, že čitateľovi je z doterajšieho priebehu nášho kurzu jasné, že hľadanou konštantou — pokiaľ je funkcia f spojitá v bode a — je $f(a)$, tj. $\lim_{x\to a} f(x)$ [110].

Pre $n = 1$ dostávame nám už známu úlohu nájsť dotyčnicu k funkcii f v bode a; vieme teda, že hľadaný polynóm T_1 — pokiaľ existuje vlastná $f'(a)$ — má v tomto prípade tvar

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad ^{111}. \tag{196}$$

Skôr, než budeme pokračovať v našich úvahách pre prípad väčšieho n a ľubovoľnej funkcie f, všimnime si ešte špeciálny prípad, keď f je polynóm P stupňa nanjvýš n; vtedy zrejme hľadaný polynóm T_n je totožný s P. Nasledujúca lema ukazuje, že koeficienty polynómu P (a teda v tomto prípade aj T_n) možno vyjadriť pomocou derivácií funkcie P.

---

[110] nie je ťažké presvedčiť sa, že $T_0(x) \equiv f(a)$ má skutočne vlastnosť z (195) (pritom nasledujúce úvahy pre $n = 0$ rovnako ako v ďalšej poznámke uvedený dôkaz pre $n = 1$ sú totožné s dôkazom vety .108(b) pre $n = 0, 1$):
ak $P(x) \equiv k \neq f(a)$, tak podľa lemy .13(e) (a vety o limite rozdielu) je $\lim_{x\to a} |f(x) - P(x)| = |f(a) - k| > 0$, $\lim_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0$, teda

$$\lim_{x\to a} \big(|f(x) - P(x)| - |f(x) - T_0(x)|\big) > 0 ,$$

preto podľa lemy .10(b) existuje prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a s vlastnosťou

$$\big(\forall x \in \mathcal{P} \cap I\big)\big(|f(x) - P(x)| - |f(x) - T_0(x)| > 0\big) ,$$

čo už je (195)

[111] presvedčme sa aj v tomto prípade, že T_1 má vlastnosť požadovanú v (195): každý polynóm najviac prvého stupňa môžeme zapísať v tvare $A + B(x - a)$ (pre $B = 0$ dostaneme konštantnú funkciu); ak je tento polynóm rôzny od T_1, nastane (keďže dva polynómy $A_1 + B_1(x - a)$, $A_2 + B_2(x - a)$ sa rovnajú práve vtedy, keď $A_1 = A_2 \wedge B_1 = B_2$) jedna z dvoch nasledujúcich možností:
buď

- $A \neq f(a)$, vtedy $\lim_{x\to a} |f(x) - P(x)| = |f(a) - P(a)| = |f(a) - A| > 0$, $\lim_{x\to a} |f(x) - T_1(x)| = |f(a) - T_1(a)| = |f(a) - f(a)| = 0$, a teda
$$\lim_{x\to a} \big(|f(x) - P(x)| - |f(x) - T_1(x)|\big) > 0 ,$$
ďalší postup je rovnaký ako v prípade $n = 0$;

alebo

- $A = f(a) \wedge B \neq f'(a)$, vtedy
$$\lim_{x\to a} \left|\frac{f(x) - P(x)}{x - a}\right| = \left|\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - B\right| = |f'(a) - B| > 0 ,$$
$$\lim_{x\to a} \left|\frac{f(x) - T_1(x)}{x - a}\right| = \left|\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right| = |f'(a) - f'(a)| = 0 ,$$
a teda
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{|x - a|} \Big(\underbrace{|f(x) - P(x)| - |f(x) - T_1(x)|}_{h(x)}\Big) > 0 ,$$
preto existuje prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a s vlastnosťou
$$\big(\forall x \in \mathcal{P} \cap I\big) \left(\frac{h(x)}{|x - a|} > 0\right) ,$$
z ktorej už vyplýva (195) (stačí obidve strany získanej nerovnosti vynásobiť kladným výrazom $|x - a|$)

.105 Lema. *Nech P je polynóm stupňa nanajvýš n, nech $a \in \mathbf{R}$. Potom P možno písať v tvare*

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \ .$$

Špeciálne, k–tu deriváciu ($k \le n$) polynómu P možno písať v tvare

$$P^{(k)}(x) = P^{(k)}(a) + P^{(k+1)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{(n-k)!}(x-a)^{n-k} \ . \tag{197}$$

Dôkaz. P možno zapísať ako polynóm so stredom a, tj. v tvare

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n \ , \tag{198}$$

stačí do predpisu

$$P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

dosadiť $x = (x-a) + a$ a získané dvojčleny umocniť pomocou binomickej vety na príslušné mocniny. Zostáva dokázať rovnosti

$$a_i = \frac{P^{(i)}(a)}{i!} \ , \quad i = 0, 1, \ldots, n \ . \tag{199}$$

Ak do (198) dosadíme $x = a$, dostaneme $P(a) = a_0$, čo je (199) pre $i = 0$. Keďže

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} \ ,$$

je $P'(a) = a_1$; z rovnosti

$$P''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2\, a_3(x-a) + \cdots + n(n-1)(x-a)^{n-2}$$

vyplýva $P''(a) = 2a_2$. Tak možno pokračovať až po $i = n$, čím bude (199) dokázané.

Keďže $P^{(k)}$ je polynóm stupňa najviac $n-k$, možno ho podľa práve dokázaného tvrdenia písať v tvare

$$P^{(k)}(x) = P^{(k)}(a) + \left(P^{(k)}\right)'(a)(x-a) + \cdots + \left(P^{(k)}\right)^{(n-k)}(a)(x-a)^{n-k} \ ,$$

tým je dokázaná aj rovnosť (197). ♠

Vráťme sa teraz k našej pôvodnej úlohe; pri jej riešení teraz použijeme túto jednoduchú pomocnú úvahu: *ak funkcie F, G sú definovanné na intervale I, pričom G je na niektorom prstencovom okolí bodu $a \in I$ nenulová, a existuje konečná $\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{G(x)} =: \gamma$, tak pre hodnoty x ležiace blízko bodu a sa spomedzi všetkých funkcií tvaru kG od funkcie F najmenej líši funkcia γG* [112] (teda — veľmi voľne vyjadrené — "v mierke určenej funkciou G je veľkosťou funkcie F číslo γ").

Ak je daná spojitá funkcia f, tak pre hodnoty x málo sa líšiace od a je spomedzi konštánt k funkcii f najbližšie konštanta $f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1}$ ("mierkou" je teda v tomto prípade konštantná funkcia s hodnotou 1). Rozdiel $R_0(x) := f(x) - f(a)$ (tj. chyba, ktorej sa dopustíme pri nahradení funkcie f konštantnou funkciou $f(a)$) je už "na úrovni konštánt" nerozlíšiteľný od nuly, pretože

$$\lim_{x\to a} R_0(x) = \lim_{x\to a} \bigl(f(x) - f(a)\bigr) = 0 \ .$$

Ak chceme nájsť lepšiu aproximáciu funkcie f, budeme hľadať nielen medzi konštantami, ale aj medzi polynómami prvého stupňa. Keďže už vieme, že hľadaný polynóm T_1 má tvar (196), pričom $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$

---

[112] dôkaz opäť nie je ťažký ani prekvapujúci: pre $k \neq \gamma$ je

$$\lim_{x\to a} \left|\frac{F(x) - \gamma G(x)}{G(x)}\right| = 0 \ , \quad \lim_{x\to a} \left|\frac{F(x) - kG(x)}{G(x)}\right| = |\gamma - k| > 0 \ ,$$

odtiaľ vyplýva

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{|G(x)|}\Bigl(|F(x) - kG(x)| - |F(x) - \gamma G(x)|\Bigr) = |k - \gamma| > 0 \ ,$$

preto existuje prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a s vlastnosťou

$$\bigl(\forall x \in \mathcal{P} \cap I\bigr)\bigl(|F(x) - kG(x)| > |F(x) - \gamma G(x)|\bigr)$$

$\lim_{x\to a}\frac{R_0(x)}{x-a}$, vidíme, že polynóm T_1 sme našli tak, že sme — ako vidno z našej pomocnej úvahy — hľadali najlepšiu aproximáciu zvyšku R_0 funkciou tvaru $k(x-a)$ pre hodnoty x ležiace blízko k a. Pre rozdiel $R_1 := f - T_1$ platí

$$\lim_{x\to a}\frac{R_1(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right) = 0\,,$$

teda "v mierke určenej funkciou $x-a$ už nevieme R_1 odlíšiť od nuly".

Pokračujme týmto spôsobom ďalej: "mierku" $x-a$ nahraďme "jemnejšou[113] mierkou" $(x-a)^2$ a hľadajme najlepšiu aproximáciu zvyšku R_1 funkciou tvaru $k(x-a)^2$ pre x málo sa líšiace od a, číslo k (pokiaľ f je diferencovateľná na I a existuje $f''(a)$) nájdeme na základe našej pomocnej úvahy:

$$k = \lim_{x\to a}\frac{R_1(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} \overset{l'Hosp}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)} = \frac{f''(a)}{2}\,,$$

hľadaný polynóm T_2 teda bude mať tvar

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

a pre zvyšok $R_2 := f - T_2$ bude platiť $\lim_{x\to a}\frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = 0$.

Pri hľadaní polynómu T_3 nahradíme "mierku" $(x-a)^2$ (v ktorej už R_2 nevieme odlíšiť od nuly) v poradí nasledujúcou "jemnejšou mierkou" $(x-a)^3$ a budeme hľadať funkciu tvaru $k(x-a)^3$, ktorá blízko k a najlepšie nahradí funkciu R_2; pre hľadané k dostávame (ak f je na I dvakrát diferencovateľná a existuje vlastná $f'''(a)$) na základe našej pomocnej úvahy rovnosť

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to a}\frac{R_2}{(x-a)^3} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}{(x-a)^3} \overset{l'Hosp}{=} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)}{3(x-a)^2} \overset{l'Hosp}{=} \lim_{x\to a}\frac{1}{3!}\,\frac{f''(x)-f''(a)}{x-a} = \frac{f'''(a)}{3!}\,, \end{aligned}$$

teda

$$T_3 = f(a) + f'(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3\,.$$

Ak tento postup zopakujeme ešte niekoľkokrát, zistíme, že T_n má (pokiaľ f je $(n-1)$–krát diferencovateľná na I a existuje konečná $f^{(n)}(a)$) tvar

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,.$$

.106 Definícia. Nech funkcia $f : I \to \mathbf{R}$ je $(n-1)$–krát diferencovateľná na intervale I a n–krát diferencovateľná v bode $a \in I$. Potom polynóm

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

sa nazýva *Taylorov polynóm rádu n funkcie f v bode a*. Ak $a = 0$, hovoríme o *Maclaurinovom polynóme rádu n funkcie f*.

Poznámka. Z lemy .105 vyplýva toto tvrdenie:
Nech $f : I \to \mathbf{R}$ je funkcia $(n-1)$–krát diferencovateľná na intervale I a n–krát diferencovateľná v bode a, nech P je polynóm stupňa nanajvýš n. Potom P je Taylorovým polynómom rádu n funkcie f v bode a práve vtedy, keď

$$f^{(i)}(a) = P^{(i)}(a)\,, \quad i = 0,1,\dots,n\,. \quad \spadesuit$$

Základné vlastnosti Taylorovho polynómu sformulujeme vo vete .108, pri ich dôkaze použijeme nasledujúcu lemu.

.107 Lema. *Nech funkcia $f : I \to \mathbf{R}$ je $(k-1)$–krát diferencovateľná na intervale I a k–krát diferencovateľná v bode $a \in I$ ($k \in \mathbf{N}$). Nech P je polynóm stupňa nanajvýš r ($r \geq k$) taký, že*

$$P(a) = f(a)\,,\ P'(a) = f'(a)\,,\ \dots, P^{(k-1)}(a) = f^{(k-1)}(a)\,. \tag{200}$$

[113] skutočne, z rovnosti $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{x-a} = 0$ vyplýva, že dostatočne blízko k a je veľkosť čísla $(x-a)^2$ zanedbateľná v porovnaní s veľkosťou čísla $x-a$, vidno teda, že "mierka" $(x-a)^2$ je "jemnejšia" než $x-a$, súčasne je ale (na základe takého istého zdôvodnenia) "hrubšia" než každá "mierka" $(x-a)^k$ pre $k > 2$

Potom

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k}=\frac{1}{k!}\left(f^{(k)}(a)-P^{(k)}(a)\right) .$$

Dôkaz. Na výpočet limity neurčitého výrazu $\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k}$ typu $\frac{0}{0}$ [114] použijeme $(k-1)$–krát prvé l'Hospitalovo pravidlo (ako vyplýva z rovností (200), po každom jeho použití dostaneme opäť neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ [115]) a limitu posledného takto získaného neurčitého výrazu $\frac{f^{(k-1)}(x)-P^{(k-1)}(x)}{k!(x-a)}$ (na výpočet ktorej už l'Hospitalovo pravidlo použiť nemôžeme, pretože naše predpoklady nezaručujú diferencovateľnosť funkcie $f^{(n-1)}$ na niektorom prstencovom okolí bodu a) nájdeme na základe definície čísla $f^{(n)}(a)$; pritom využijeme rovnosť

$$P^{(k-1)}(x)=P^{(k-1)}(a)+P^{(k)}(a)(x-a)+P^{(k+1)}(a)(x-a)^2+\cdots+P^{(r)}(a)(x-a)^{r-k+1}$$

(tú dostaneme, ak v (197) za dvojicu čísel (n,k) dosadíme $(r,k-1)$), z nej na základe nášho predpokladu

$$P^{(k-1)}(a)=f^{(k-1)}(a)$$

vyplýva

$$P^{(k-1)}(x)=f^{(k-1)}(a)+P^{(k)}(a)(x-a)+P^{(k+1)}(a)(x-a)^2+\cdots+P^{(r)}(a)(x-a)^{r-k+1} .$$

Uvedeným postupom dostaneme

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k}\overset{l'Hosp}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-P'(x)}{k(x-a)^{k-1}}\overset{l'Hosp}{=}\cdots\overset{l'Hosp}{=}\lim_{x\to a}\frac{f^{(k-1)}(x)-P^{(k-1)}(x)}{k!(x-a)}=$$

$$=\frac{1}{k!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(a)-P^{(k)}(a)(x-a)-\cdots-P^{(r)}(a)(x-a)^{r-k+1}}{x-a}=$$

$$=\frac{1}{k!}\lim_{x\to a}\left(\frac{f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(a)}{x-a}-P^{(k)}(a)-P^{(k+1)}(a)(x-a)-\cdots-P^{(r)}(a)(x-a)^{r-k}\right)=$$

$$=\frac{1}{k!}\left(f^{(k)}(a)-P^{(k)}(a)\right) ,$$

čo sme chceli dokázať.

.108 Veta. *Nech funkcia $f:I\to\mathbf{R}$ je $(n-1)$–krát diferencovateľná na intervale I a n–krát diferencovateľná v bode a. Potom*

(a) *polynóm P stupňa nanajvýš n je Taylorovým polynómom rádu n funkcie f v bode a práve vtedy, keď*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}=0 ; \tag{201}$$

(b) *pre každý polynóm P stupňa nanajvýš n, ktorý je odlišný od Taylorovho polynómu T_n rádu n funkcie f v bode a, existuje prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a s vlastnosťou*

$$\big(\forall x\in\mathcal{P}\cap I\big)\big(|f(x)-T_n(x)|<|f(x)-P(x)|\big) . \tag{202}$$

Dôkaz. (a) "$\Rightarrow$": Ak P je Taylorov polynóm rádu n funkcie f v bode a, tak platí (pozri poznámku za definíciou .106) $n+1$ rovností

$$f^{(i)}(a)=P^{(i)}(a) ,\quad i=0,1,\dots n . \tag{203}$$

Splnenie prvých n z nich nám umožňuje použiť lemu .107 (pre $k=n$), podľa ktorej

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}=\frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(a)-P^{(n)}(a)\right)=0 , \tag{204}$$

[114] rovnosť $\lim_{x\to a}\big(f(x)-P(x)\big)=0$ je dôsledkom predpokladu $f(a)=P(a)$, pritom spojitosť funkcie f v bode a, ktorej dôsledkom je rovnosť $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$, vyplýva z jej diferencovateľnosti v tomto bode

[115] pritom spojitosť funkcií $f',f'',\dots,f^{(k-1)}$ v bode a — dôsledkom ktorej je rovnosť $\lim_{x\to a}f^{(i)}(x)=f^{(i)}(a)$,$i=1,2,\dots,k-1$ — vyplýva opäť z predpokladu ich diferencovateľnosti v tomto bode

pričom posledná rovnosť v (204) vyplýva z poslednej rovnosti v (203).

"$\Leftarrow$": Z definície Taylorovho polynómu vyplýva (pozri poznámku v odseku .106), že treba dokázať rovnosti (203), to urobíme úplnou indukciou.

Z (201) vyplýva rovnosť

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-P(x)\big)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}(x-a)^n\right)=0\cdot 0=0\ , \tag{205}$$

pritom funkcie f a P sú v bode a spojité (spojitosť f v bode a vyplýva z jej diferencovateľnosti v tomto bode), preto

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\ ,\quad \lim_{x\to a}P(x)=P(a)\ ,$$

z týchto rovností a z (205) vyplýva $f(a)=P(a)$, čo je (203) pre $i=0$.

Predpokladajme teraz, že (203) platí pre $i=0,1,\dots,k-1$, pričom $k\le n$. Z (201) dostávame

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}(x-a)^{n-k}\right)=0\ ; \tag{206}$$

súčasne ale z indukčného predpokladu vyplýva, že sú splnené rovnosti (200) z lemy .107, podľa ktorej

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k}=\frac{1}{k!}\left(f^{(k)}(a)-P^{(k)}(a)\right)\ ,$$

odtiaľ a z (206) už dostávame rovnosť $f^{(k)}(a)=P^{(k)}(a)$, čo je (203) pre $i=k$. $\triangle$

(b) Keďže polynóm P, ktorý podľa lemy .105 možno písať v tvare

$$P(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+\cdots+\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\ ,$$

a Taylorov polynóm

$$T_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

sú navzájom rôzne, musia sa líšiť v niektorom zo svojich koeficientov; nech $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$ je prvý spomedzi $P(a),P'(a),\dots,\frac{P^{(n)}(a)}{n!}$, ktorý sa odlišuje od príslušného koeficientu polynómu T_n, teda nech

$$P(a)=f(a)\ ,\ P'(a)=f'(a)\ ,\dots,P^{(k-1)}(a)=f^{(k-1)}(a)\ , \tag{207}$$

ale

$$P^{(k)}(a)\neq f^{(k)}(a)\ . \tag{208}$$

Rovnosti (207) nám umožňujú použiť lemu .107, podľa ktorej

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k}=\frac{1}{k!}\left(f^{(k)}(a)-P^{(k)}(a)\right)\neq 0\ , \tag{209}$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva z (208). Podľa tvrdenia (a) našej vety je $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n}=0$, preto aj

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^k}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n}(x-a)^{n-k}\right)=0\ ,$$

odtiaľ, z (209) (a lemy .13(e)) vyplýva

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{|x-a|^k}\big(\underbrace{|f(x)-P(x)|-|f(x)-T_n(x)|}_{h(x)}\big)=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\left|\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k}\right|-\left|\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^k}\right|\right)=\left|\frac{1}{k!}\left(f^{(k)}(a)-P^{(k)}(a)\right)\right|>0\ ,$$

preto (podľa lemy .10(b)) existuje prstencové okolie $\mathcal{P}$ bodu a s vlastnosťou

$$(\forall x \in \mathcal{P} \cap I) \left(\frac{h(x)}{|x-a|^k} > 0 \right) ,$$

odtiaľ — ak obidve strany nerovnosti vynásobíme kladným výrazom $|x-a|^k$ — už dostávame (202). ♠

Niektoré zápisy nám pomôže sprehľadniť symbolika, ktorú zavedieme v nasledujúcom odseku.

.109 Definícia. Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie g, ktorá je nenulová v niektorom prstencovom okolí $\mathcal{R}$ bodu a (tj. na množine $\mathcal{R} \cap D(g)$). Symbolom $o(g)$ *pre* $x \to a$ ("malé o g pre x idúce k a") budeme označovať množinu všetkých funkcií spĺňajúcich nasledujúce podmienky:

(i) existuje prstencové okolie P bodu a s vlastnosťou $P \cap D(f) = P \cap D(g)$;

(ii) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

pritom — pokiaľ bude zo súvislosti zrejmé, o ktoré $a \in \mathbf{R}^*$ sa jedná — budeme zápis $o(g)$ *pre* $x \to a$ skracovať na $o(g)$.

Ak f je funkcia a A, B sú množiny funkcií, tak množiny $A + B$, $f + A$, $A \cdot B$ a $f \cdot A$ definujeme rovnosťami

$$A + B := \{f + g\,;\, f \in A \wedge g \in B\}\,, \qquad f + A := \{f\} + A \quad \Big(= \{f + g\,;\, g \in A\} \Big)$$

$$A \cdot B := \{fg\,;\, f \in A \wedge g \in B\}\,, \qquad f \cdot A := \{f\} \cdot A\,, \quad \text{špeciálne} \quad -A := (-1) \cdot A\,.$$

Lema. *Nech $r, s \in \mathbf{N}$, potom pre $x \to 0$ platí:*

(a) *ak $r > s$, tak $x^r \in o(x^s)$;*

(b) *ak $r > s$, tak $o(x^r) \subset o(x^s)$;*

(c) *ak $r \geq s$, tak $o(x^r) + o(x^s) \subset o(x^s)$;*

(d) $-o(x^r) = o(x^r)$;

(e) $x^r o(x^s) = o(x^{r+s})$;

(f) $o(x^r) o(x^s) \subset o(x^{r+s})$;

(g) *ak $f \in o(x^r)$, tak $f(x^s) \in o(x^{rs})$;*

(h) *ak $f \in o(x^r)$, pričom $f(0) = 0$ a $g \in o(x^s)$, tak $f \circ g \in o(x^{rs})$.*

Poznámka. Nie je ťažké presvedčiť sa, že v prípadoch (c), (e) a (f) možno inklúziu $\subset$ nahradiť rovnosťou [116].

Dôkaz. Dokážeme tvrdenia (b), (c) a (h), ostatné dôkazy sú obdobné.

(b) Ak $f \in o(x^r)$, tak — keďže $D(x^r) = \mathbf{R}$ — f je definovaná na niektorom prstencovom okolí bodu 0 (to vyplýva z podmienky (i) z definície .109) a $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^r} = 0$, preto

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^s} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^r} x^{r-s} = 0 \cdot 0 = 0\,;$$

[116] v prípade (c) stačí funkciu $f \in o(x^s)$ napísať ako súčet $0 + f$ a uvedomiť si, že pre konštantnú funkciu 0 platí inklúzia $0 \in o(x^r)$; v prípade (e) možno $f \in o(x^{r+s})$ písať ako súčin $x^r \cdot \frac{f(x)}{x^r}$, pričom — pokiaľ $0 \in D(f)$ — funkciu $\frac{f(x)}{x^r}$ spojito dodefinujeme v bode 0 hodnotou 0; napokon v prípade (f) zapíšeme funkciu $f \in o(x^{r+s})$ ako súčin

$$|f(x)|^{\frac{r}{r+s}} \cdot \left(|f(x)|^{\frac{s}{r+s}} \operatorname{sgn} f(x) \right) ,$$

pritom

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)|^{\frac{s}{r+s}} \operatorname{sgn} f(x)}{x^s} = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{x^{r+s}} \right|^{\frac{s}{r+s}} \operatorname{sgn} f(x) \operatorname{sgn} x^{r+s} ,$$

limita prvého súčiniteľa je 0 a zvyšné dva súčinitele sú ohraničeneé funkcie to znamená, že funkcia f spĺňa obidve podmienky z definície symbolu $o(x^s)$, a preto $f \in o(x^s)$.

(c) Stačí dokázať inklúziu

$$o(x^s) + o(x^s) \subset o(x^s)\ , \tag{210}$$

dokazované tvrdenie bude potom vyplývať z bodu (ii), pretože — ak A, B, C sú množiny funkcií — z inklúzie $C \subset B$ zrejme vyplýva inklúzia $A + C \subset A + B$; v našom prípade teda iste platí

$$o(x^r) + o(x^s) \subset o(x^s) + o(x^s)\ .$$

Dokazujme teda (210): Ak $f, g \in o(x^s)$, tak — keďže $D(x^s) = \mathbf{R}$ — existujú (podľa bodu (i) definície .109) prstencové okolia P_1 a P_2 bodu 0 tak, že $P_1 \subset D(f)$, $P_2 \subset D(g)$, pre prstencové okolie $P_1 \cap P_2$ teda iste platí inklúzia $P_1 \cap P_2 \subset D(f+g)$, čím je pre funkciu $f+g$ splnená podmienka (i) z definície .109. Ďalej z rovností $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x^s} = 0 = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{x^s}$ vyplýva (podľa vety o limite súčtu) rovnosť $\lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)}{x^s} = 0$, čo znamená, že funkcia $f + g$ spĺňa aj druhú z podmienok definície .109, a teda $f + g \in o(x^s)$.

(h) Predovšetkým si všimnime, že z predpokladu $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^s} = 0$ vyplýva rovnosť

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^s} x^s = 0 \cdot 0 = 0\ . \tag{211}$$

Keďže $f \in o(x^r)$, $g \in o(x^s)$, existujú podľa bodu (i) definície .109 prstencové okolia P a R bodu 0 tak, že $P \subset D(f)$, $R \subset D(g)$. Pretože podľa našich predpokladov je $0 \in D(f)$, platí aj inklúzia

$$O := P \cup \{0\} \subset D(f)\ . \tag{212}$$

Z rovnosti $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ potom podľa definície limity vyplýva, že k okoliu O bodu 0 musí existovať prstencové okolie S_1 bodu 0 s vlastnosťou $g(R \cap S_1) \subset O \subset D(f)$, odtiaľ dostávame

$$S := R \cap S_1 \subset D(f \circ g)\ , \tag{213}$$

čo znamená, že pre funkciu $f \circ g$ je splnená podmienka (i) z definície .109.

Dokážeme teraz, že $\lim_{x\to 0} \frac{f\big(g(x)\big)}{x^{rs}} = 0$, tj. že platí výrok

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists T\big)\big(\forall x \in T \cap D(f \circ g)\big)\Big(\big|f\big(g(x)\big)\big| < \varepsilon |x|^{rs}\Big)\ . \tag{214}$$

Zvoľme teda $\varepsilon > 0$ a hľadajme prstencové okolie T požadovaných vlastností. Keďže $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^r} = 0$, existuje k nášmu číslu $\varepsilon > 0$ prstencové okolie U bodu 0 také, že

$$\big(\forall x \in U \cap D(f)\big)\big(|f(x)| < \varepsilon |x|^r\big)\ .$$

Nech $V_1 := U \cup \{0\}$. Podľa našich predpokladov je $f(0) = 0$, odtiaľ a z predchádzajúcej nerovnosti dostávame

$$\big(\forall x \in V_1 \cap D(f)\big)\big(|f(x)| \leq \varepsilon |x|^r\big)\ ,$$

a teda — ak písmenom V označíme okolie $V_1 \cap O$ (okolie O pozri v (212))

$$\big(\forall x \in V\big)\big(|f(x)| \leq \varepsilon |x|^r\big)\ . \tag{215}$$

Pretože $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (pozri (211)), existuje k okoliu V prstencové okolie W s vlastnosťou

$$\big(\forall x \in W \cap D(g)\big)\big(g(x) \in V\big)\ ,$$

preto — keďže podľa (213) je $S \subset D(g)$ — pre prstencové okolie $W_1 := W \cap S$ platí

$$\big(\forall x \in W_1\big)\big(g(x) \in V\big)\ . \tag{216}$$

Ďalej, z rovnosti $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^s} = 0$ vyplýva ohraničenosť limitovanej funkcie na niektorom prstencovom okolí W_2 bodu 0, tj. na množine $W_2 \cap D(g)$, a teda iste na množine $W_2 \cap S$ (keďže $S \subset D(g)$), preto

$$\big(\forall x \in W_2\big)\big(|g(x)| < |x|^s\big)\ . \tag{217}$$

Pre všetky x z prstencového okolia $W_1 \cap W_2 \cap S$ bodu 0 potom platí

$$\bigl|f\bigl(g(x)\bigr)\bigr| \le \varepsilon|g(x)|^r < \varepsilon|x^s|^r = |x|^{rs}$$

(prvá nerovnosť vyplýva z (216) a (215), druhá z (217)), za hľadané prstencové okolie T môžeme preto zvoliť $T := W_1 \cap W_2 \cap S$ [117]. ♠

Inklúzie z predchádzajúcej lemy sa pri ich používaní pre jednoduchosť zapisujú ako rovnosti; pri čítaní takýchto zápisov je teda potrebná istá opatrnosť: keďže ide v skutočnosti o inklúzie, nemožno tieto "rovnosti" čítať sprava doľava. Pri uvedenej dohode budú mať tvrdenia predchádzajúcej lemy túto podobu:

(a) *ak* $r > s$, *tak* $x^r = o(x^s)$;

(b) *ak* $r > s$, *tak* $o(x^r) = o(x^s)$;

(c) *ak* $r \ge s$, *tak* $o(x^r) + o(x^s) = o(x^s)$;

(d) $-o(x^r) = o(x^r)$;

(e) $x^r o(x^s) = o(x^{r+s})$;

(f) $o(x^r)o(x^s) = o(x^{r+s})$;

(g) *ak* $f(x) = o(x^r)$, *tak* $f(x^s) = o(x^{rs})$;

(h) *ak* $f = o(x^r)$ *a* $f(0) = 0$, *tak* $f\bigl(o(x^s)\bigr) = o(x^{rs})$. ♠

Podľa tvrdenia (a) vety .108 platí pre zvyšok R_n Taylorovho polynómu T_n rádu n funkcie f v bode a inklúzia $R_n \in o\bigl((x-a)^n\bigr)$, preto pre funkciu f platí (v zmysle našich predchádzajúcich dohôd) rovnosť

$$f(x) = T_n(x) + o\bigl((x-a)^n\bigr) \quad \text{pre} \quad x \to a\ ,$$

ktorá sa nazýva *Taylorov vzorec so zvyškom v Peanovom tvare.*

Samozrejme, inklúzia $R_n \in o\bigl((x-a)^n\bigr)$ nám nedáva žiadnu informáciu o veľkosti zvyšku R_n v konkrétnom bode x (samozrejme, s výnimkou bodu a). Nasledujúca veta ukazuje, že číslo $R_n(x)$ (tj. veľkosť chyby, ktorej sme sa pri nahradení čísla $f(x)$ číslom $T_n(x)$ dopustili) možno odhadnúť, pokiaľ vieme odhadnúť veľkosť $(n+1)$–vej derivácie funkcie f na intervale s krajnými bodmi a, x.

.110 Veta. *Nech funkcia* $f : I \to \mathbf{R}$ *je* $(n+1)$*–krát diferencovateľná na intervale* I *a nech* $g : I \to \mathbf{R}$ *je diferencovateľná funkcia, pre ktorú platí*

$$\bigl(\forall x \in I \setminus \{a\}\bigr)\bigl(g'(x) \ne 0\bigr)\ ,$$

pričom $a \in I$. *Potom pre každé* $x \in I \setminus \{a\}$ *existuje bod* c *ležiaci v otvorenom intervale s koncovými bodmi* a, x *taký, že zvyšok* $R_n := f - T_n$ *Taylorovho polynómu* T_n *rádu* n *funkcie* f *v bode* a *možno vyjadriť v tvare*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{g'(c)}\ . \tag{218}$$

Špeciálne, ak $g(x) = x - a$, *dostávame zvyšok* R_n *v* Cauchyho tvare

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-a)}{n!}\ , \tag{219}$$

pre $g(x) = (x-a)^{n+1}$ *dostávame* Lagrangeov tvar zvyšku

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ . \tag{220}$$

[117] z tohto dôkazu tiež vidno, že uvedené tvrdenie by zostalo v platnosti, keby sme predpoklad $g \in o(x^s)$ nahradili predpokladom *funkcia* $\frac{g(x)}{x^s}$ *je definovaná a ohraničená na niektorom prstencovom okolí bodu* 0

Dôkaz. Nech $F : I \to \mathbf{R}$ je funkcia s predpisom [118]

$$F(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

potom

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = F(x) - F(a)$$

a pre $t \in I$ je [119]

$$\begin{aligned}
F'(t) &= f'(t) + \Big(-f'(t) + f''(t)(x-t)\Big) + \cdots + \left(-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\right) + \\
&\quad + \cdots + \left(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right) = \\
&= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \,.
\end{aligned}$$

Z Cauchyho vety o strednej hodnote použitej pre funkcie F a g na intervale s koncovými bodmi x a a (splnenie jej predpokladov zaručuje okrem iného poznámka 1 za vetou.91) vyplýva existencia čísla c ležiaceho "medzi x a a", pre ktoré platí

$$\frac{R_n(x)}{g(x)-g(a)} = \frac{F(x)-F(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{F'(c)}{g'(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g'(c)} \,,$$

ak túto rovnosť vynásobíme číslom $g(x)-g(a)$, dostaneme (218). Preverenie rovností (219) a (220) (tj. dosadenie konkrétnych funkcií do (218)) prenechávame na čitateľa.

[118]predpis pre F dostaneme tak, že v predpise Taylorovho polynómu T_n nahradíme bod a premennou t a x budeme chápať ako konštantu
[119]nezabudnime, že derivujeme podľa t