2. Podmienky konvergencie nevlastného integrálu. Absolútna a neabsolútna konvergencia nevlastného integrálu

Podľa definície 1.3 konvergencia nevlastného integrálu (3) je ekvivalentná s existenciou vlastnej limity funkcie

$$F(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx \tag{6}$$

pre $\eta \to B,\ \eta \in < a, B)$.

Preto platí

Veta 2.1. *(Cauchyova - Bolzanova podmienka.) Nech funkcia f je definovaná na intervale $< a, B)$ a integrovateľná na ľubovoľnom uzavretom intervale $< a, \eta > \subset < a, B)$. Potom integrál $\int_a^B f(x)dx$ konverguje práve vtedy, keď pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje $\eta_0 \in < a, B)$ tak, že pre každé $\eta_1, \eta_2 \in < a, B)$ také, že $\eta_1 > \eta_0,\ \eta_2 > \eta_0$, platí vzťah*

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Definícia 2.1. *Hovoríme, že $\int_a^B f(x)dx$ konverguje absolútne, ak konverguje integrál $\int_a^B |f(x)|dx$.*

Definícia 2.2. *Nevlastný integrál $\int_a^B f(x)dx$ konverguje neabsolútne, ak konverguje, ale $\int_a^B |f(x)|dx$ diverguje.*

Poznámka 2.1. Z absolútnej konvergencie vyplýva konvergencia v obyčajnom zmysle.

Skúmanie absolútnej konvergencie nevlastného integrálu sa redukuje na skúmanie konvergencie integrálu nezápornej funkcie.

Veta 2.2. *Ak funkcia f spĺňa podmienky definície 1.3 a $f(x) \geq 0$ na $< a, B)$, tak nevlastný integrál (3) existuje práve vtedy, keď funkcia (6) je ohraničená na $< a, B)$.*

Dôsledok 2.1. *Nech funkcia f je nezáporná, nerastúca na intervale $< 1, +\infty)$ a nech je integrovateľná na každom uzavretom intervale $< 1, \eta > \subset < 1, +\infty)$. Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots$$

a integrál $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ konvergujú alebo divergujú súčasne.

Veta 2.3. *(Porovnávacie kritérium.) Nech funkcie f a g sú definované na intervale $< a, B)$ a sú integrovateľné na ľubovoľnom uzavretom intervale $< a, \eta > \subset < a, B)$. Ak na intervale $< a, B)$ platí*

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

tak z konvergencie integrálu (5) vyplýva konvergencia integrálu (4) a platí nerovnosť

$$\int_a^B f(x)dx \leq \int_a^B g(x)dx$$

a z divergencie integrálu (4) vyplýva divergencia integrálu (5).

Z poznámky 2.1, vety 2.3 a príkladu 1.1 vyplýva

Veta 2.4. *(Špeciálne porovnávacie kritérium pre nevlastný integrál na neohraničenom intervale.) Nech na intervale $< a, +\infty)$ funkcia f spĺňa vzťah $|f(x)| \leq \dfrac{c}{x^\alpha}$, kde c a α sú konštanty, $\alpha > 1$. Potom $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguje. Ak existuje taká konštanta $c > 0$, že na intervale $< a, +\infty)$ platí vzťah $f(x) \geq \dfrac{c}{x^\alpha}$, v ktorom $\alpha \leq 1$, tak $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverguje.*

Dôsledok 2.2. *(Špeciálne porovnávacie kritérium v limitnom tvare). Ak pre $\alpha > 1$ existuje vlastná limita $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)|x^\alpha = c \geq 0$, tak integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguje. Ak pre $\alpha \leq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)x^\alpha = c$, kde $0 < c \leq +\infty$, tak integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverguje.*

Poznámka 2.2. Špeciálne porovnávacie kritérium pre nevlastný integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ možno zapísať pomocou $\mathcal{O}$ - symboliky.

Nech $f(x) = \mathcal{O}^\star\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ pre $x \to +\infty$. Potom integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguje, ak $\alpha > 1$, a diverguje, ak $\alpha \leq 1$.

Zápis $f(x) = \mathcal{O}^\star\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ pre $x \to +\infty$ je ekvivalentný s tým, že existuje vlastná $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)x^\alpha = c \neq 0$.

Podobne môžeme sformulovať porovnávacie kritérium konvergencie nevlastného integrálu z definície 1.2. S využitím poznámky 2.1, vety 2.3 a príkladu 1.2 uvedieme pre tento prípad len špeciálne porovnávacie kritérium v limitnom tvare a jeho zápis pomocou $\mathcal{O}$ - symboliky.

Veta 2.5. *Nech pre $\alpha < 1$ existuje vlastná limita $\lim\limits_{x \to b^-} |f(x)|(b-x)^\alpha = c \geq 0$, tak $\int_a^b f(x)dx$ konverguje. Ak pre $\alpha \geq 1$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)(b-x)^\alpha = c$, kde $0 < c \leq +\infty$, tak $\int_a^b f(x)dx$ diverguje.*

Poznámka 2.3. Nech $f(x) = \mathcal{O}^\star\left(\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}\right)$ pre $x \to b^-$. Potom integrál $\int_a^b f(x)dx$ konverguje, ak $\alpha < 1$, a diverguje, ak $\alpha \geq 1$.

Aj tu zápis $f(x) = \mathcal{O}^\star\left(\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}\right)$ pre $x \to b^-$ znamená, že existuje vlastná limita $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)(b-x)^\alpha = c \neq 0$.

Poznámka 2.4. Uvedieme špeciálne porovnávacie kritérium konvergencie nevlastného lintegrálu z definície 1.3, zapísanom pomocou $\mathcal{O}$ - symboliky. Nech $f(x) = \mathcal{O}^\star\left(\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}\right)$ pre $x \to a^+$. Potom integrál $\int_a^b f(x)dx$ konverguje, ak $\alpha < 1$, a diverguje, ak $\alpha \geq 1$.

Veta 2.6. *Ak konverguje integrál $\int_a^B |f(x)|dx$ a funkcia $g(x)$ je ohraničená na $< a, B)$, tak ich súčin $f(x)g(x)$ je tiež absolútne integrovateľná funkcia na $< a, B)$.*

Uvedieme ešte niektoré ďalšie (jemnejšie) kritéria konvergencie nevlastného integrálu použiteľné aj v prípade neabsolútnej konvergencie integrálu (v zmysle definície 1.5).

Veta 2.7. *(Dirichletovo kritérium.) Nech funkcie f a g sú definované na intervale $< a, B)$ a sú integrovateľné na ľubovoľnom uzavretom intervale $< a, \eta > \subset < a, B)$. Ak platí:*

1. *funkcia $F(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$ je ohraničená na $< a, B)$,*
2. *funkcia $g(x)$ je monotónna a $\lim\limits_{x\to B} g(x) = 0$, tak $\int_a^B f(x)g(x)dx$ konverguje.*

Veta 2.8. *(Abelovo kritérium.) Nech funkcia f a g sú definované na intervale $< a, B)$ a sú integrovateľné na každom uzavretom intervale $< a, \eta > \subset < a, B)$. Ak platí:*

1. *integrál $\int_a^B f(x)dx$ konverguje,*
2. *funkcia $g(x)$ je monotónna a ohraničená na $< a, B)$, tak $\int_a^B f(x)g(x)dx$ konverguje.*

Zistite konvergenciu integrálov:

35. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

36. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$.

37. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+c^2}dx$.

38. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^3+x+1}$.

39. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2dx}{2x^4-x^3+2x-1}$.

40. $\displaystyle\int_a^\infty \cos x dx$.

41. $\displaystyle\int_0^\infty x\cos x dx$.

42. $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$.

43. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

44. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+2}dx$.

45. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

46. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

47. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)\sqrt[3]{x-a}}$.

48. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

49. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2-a^2}$.

50. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$.

51. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

52. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$.

53. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$.

54. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$.

55. Dokážte, že integrál $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{(sinx)^s}$ konverguje, ak $s<1$ a diverguje, ak $s \geq 1$.

56. Dokážte, že integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx$ konverguje, ak $p<2$.

57. Dokážte, že, ak integrál $\int_a^x \varphi(t)dt$ je ohraničená funkcia pre $x \to \infty$, tak $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}dx$ konverguje pre $\alpha > 0$.

58. Nech $\varphi(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, $\varphi'(x) \leq 0$, $\varphi'(x)$ je spojitá funkcia pre $a \leq x < \infty$. Dokážte, že integrály $\int_0^\infty \varphi(x)\cos txdx$ a $\int_a^\infty \varphi(x)\sin txdx$, kde $t>0$, konvergujú.

Pre aké hodnoty parametra α konvergujú nasledujúce integrály:

59. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{x^2+1}$.

60. $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha.\frac{x+\sin x}{x-\sin x}dx$.

61. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$.

62. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^\alpha}dx$.

63. $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$.

64. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{arctg } ax}{x^\alpha}dx \ (a \neq 0)$.

65. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$.

66. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^\alpha}dx \ (\alpha \geq 0)$.

67. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Nájdite hodnoty parametrov m a n (resp. p a q), pre ktoré nasledujúce integrály konvergujú:

68. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}dx$.

69. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m}{1+x^n}dx \ (n \geq 0)$.

70. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m \text{arctg } x}{2+x^n}dx \ (n \geq 0)$.

71. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

72. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^p+x^q}$.

73. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}$.

74. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^m|x-1|^n dx.$ **75.** $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx.$

76. Pre aké hodnoty parametrov p, q a r konverguje integrál

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}?$$

77. Určte hodnoty parametrov $p_1, p_2, \ldots, p_n$, pre ktoré konverguje integrál:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\ldots|x-a_n|^{p_n}}.$$

78. Dokážte, že integrál $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x^s}dx$ konverguje, ak $0 < s < 2$, a absolútne konverguje, ak $1 < s < 2$.

79. Dokážte, že integrál $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos tx}{x^s}dx$ konverguje absolútne, ak $1 < s < 3$.

80. Dokážte, že integrál $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^s}dx$ konverguje, ak $0 < s < 4$ a absolútne konverguje, ak $1 < s < 4$.

81. Dokážte, že nasledujúce integrály konvergujú neabsolútne:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$; b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$; c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx.$

Zistite absolútnu a neabsolútnu konvergenciu nasledujúcich integrálov:

82. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx.$ **83.** $\displaystyle\int_0^{\infty} x^p\sin(x^q)dx \;(q \neq 0).$

84. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x)\,dx.$ **85.** $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2\cos(e^x)dx.$

86. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx \;(q \geq 0).$

87. Nech P a Q sú dva polynómy a polynóm Q nemá reálne korene v intervale $< a, \infty)$. Dokážte, že, ak st $P \leq$ st $Q - 2$, integrály

$$\int_a^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\sin tdt, \int_a^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\cos tdt$$

konvergujú absolútne.

88. Nech na uzavretom intervale $< a, b >$ pre každé $b > a$ je funkcia $f(x) > 0$ a funkcia $\varphi(x)$ je rastúca, pričom $\varphi(x) \geq x$, $\varphi'(x)$ a $f(x)$ sú integrovateľné funkcie. Ak za týchto podmienok pre dostatočne veľké x

$$\frac{f\left[\varphi(x)\right].\varphi'(x)}{f(x)} \leq q < 1,$$

tak integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje, ak pre dostatočne veľké x

$$\frac{f\left[\varphi(x)\right].\varphi'(x)}{f(x)} \geq 1, \ \varphi(x) \not\equiv x,$$

tak integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ diverguje.

Sformulujte uvedené kritérium konvergencie resp. divergencie integrálu $\int_a^\infty f(x)dx$ v prípadoch: $\varphi(x) = x+1$; $\varphi(x) = 2x$; $\varphi(x) = x^2$; $\varphi(x) = e^x$.

89. Použitím tvrdenia úlohy 88 pre prípad $\varphi(x) = x+1$ ukážte, že

a) integrály $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{2^x}dx$ a $\displaystyle\int_1^\infty x^5 \sin\frac{1}{2^x}dx$ konvergujú;

b) integrály $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2^x}{x^4}dx$ a $\displaystyle\int_1^\infty 2^x \sin\frac{1}{x^5}dx$ divergujú.

90. Na základe tvrdenia úlohy 88 pre prípad $\varphi(x) = 2x$ ukážte, že

a) integrál $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}dx$ konverguje;

b) integrál $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(\ln x)^2}$ diverguje.

91. Použitím tvrdenia úlohy 88 pre prípad $\varphi(x) = e^x$ ukážte, že integrál

$$\int_{10}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}\ln x(\ln\ln x)^\alpha}, \text{ kde } \alpha > 1,$$

konverguje a integrál

$$\int_{10}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}\ln x.\ln\ln x}$$

diverguje.

92. Ak $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje, musí $f(x) \to 0$ pre $x \to \infty$?

Uvažujte príklady: a) $\int_a^\infty \sin x^2 dx$; b) $\int_a^\infty (-1)^{[x^2]}dx$.

93. Nech $f(x) \in C^{(1)} < x_0, \infty)$ t.j. funkcia f a jej derivácia sú spojité v $< x_0, \infty)$, $|f'(x)| < C$ pre $x_0 < x < \infty$ a $\int_{x_0}^\infty |f(x)|dx$ konverguje. Dokážte, že $f(x) \to 0$ pre $x \to \infty$.

94. Môžeme konvergentný nevlastný integrál

$$\int_a^b f(x)dx$$

neohraničenej funkcie $f(x)$, definovanej na $< a, b >$, definovať ako limitu zodpovedajúceho integrálneho súčtu

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\tau_i) \bigtriangleup x_i,$$

kde $x_i \leq \tau_i \leq x_{i+1}$ a $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i$?

95. Nech

$$\int_a^\infty f(x)dx \tag{1}$$

konverguje a funkcia $\varphi(x)$ je ohraničená. Musí potom konvergovať aj integrál

$$\int_a^\infty f(x)\varphi(x)dx? \tag{2}$$

Ak nie, uveďte zodpovedajúci príklad. Čo môžete povedať o konvergencii integrálu (2), ak integrál (1) konverguje absolútne?

96. Nech funkcia $f(x)$ je monotónna v intervale $0 < x \leq 1$ a je neohraničená v okolí bodu $x = 0$. Dokážte, že ak existuje

$$\int_0^1 f(x)dx,$$

tak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$