3. Hlavná hodnota nevlastného integrálu

Definícia 3.1. *Nech funkcia f je definovaná na celej množine reálnych čísel $(-\infty, \infty)$ a nech je integrovateľná na každom uzavretom intervale. Budeme hovoriť, že funkcia f je integrovateľná v zmysle Cauchyho, ak existuje limita*

$$\lim_{\eta \to \infty} \int_{-\eta}^{\eta} f(x)dx.$$

Túto limitu budeme nazývať hlavnou hodnotou nevlastného integrálu funkcie f v zmysle Cauchyho a označovať symbolom

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\eta \to \infty} \int_{-\eta}^{\eta} f(x)dx$$

(v.p. sú začiatočné písmená francúzskych slov valuer principal - hlavná hodnota.)

Veta 3.1. *Ak je funkcia f nepárna a integrovateľná na každom uzavretom intervale, tak je integrovateľná v zmysle Cauchyho a hlavná hodnota jej integrálu sa rovná 0.*

Ak je funkcia f párna, tak je integrovateľná v zmysle Cauchyho na intervale $(-\infty, \infty)$ práve vtedy, keď konverguje nevlastný integrál

$$\int_0^{\infty} f(x)dx.$$

Definícia 3.2. *Nech funkcia f je definovaná v uzavretom intervale $< a, b >$ s výnimkou jediného bodu c, $a < c < b$ a nech je integrovateľná v každom uzavretom podintervale intervalov $< a, c), (c, b >$. Budeme hovoriť, že funkcia f je integrovateľná podľa Cauchyho, ak existuje limita*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right) = \text{v.p.} \int_a^b f(x)dx,$$

ktorá sa nazýva hlavnou hodnotou integrálu v zmysle Cauchyho.

97. Ukážte, že

a) v.p. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0;$ b) v.p. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0;$ c) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = 0.$

98. Nájdite:

a) v.p. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2};$ b) v.p. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x \ln x};$

c) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx;$ d) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \text{arctg } x dx.$