# II. Metrický priestor

## 1. Definícia a základné vlastnosti metrických priestorov

Medzi najzákladnejšie pojmy v matematickej analýze patria pojmy metriky a metrického priestoru.

**Definícia 1.1.** *Nech $X \neq \emptyset$ je množina, $d$ je reálna funkcia definovaná na karteziánskom súčine $X \times X$ nasledujúcimi vlastnosťami:*

1. *Pre všetky $x, y \in X$ je $d(x, y) \geq 0$ a $d(x, y) = 0$ práve vtedy, keď $x = y$.*
2. *Pre všetky $x, y \in X$ je $d(x, y) = d(y, x)$.*
3. *Pre všetky $x, y, z \in X$ je $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*

*Funkciu $d$ nazývame metrika na množine $X$ a dvojicu $(X, d)$ nazývame metrickým priestorom.*

V ďalšom texte obyčajne namiesto $(X, d)$ je metrický priestor (ak je jasné o akú metriku ide), budeme krátko písať $X$ je metrický priestor.

**Poznámka 1.1**. Vlastnosť 2. funkcie $d$ sa nazýva symetričnosť a vlastnosť 3. trojuholníková nerovnosť.

**Poznámka 1.2**. Nech $(X, d)$ je metrický priestor a $\emptyset \neq Y; Y \subset X$. Na $Y \times Y$ definujeme funkciu $d'$ nasledovne:

Pre každú dvojicu $(x, y) \in Y \times Y$ platí $d'(x, y) = d(x, y)$. Potom $d'$ je metrika na množine $Y$ a dvojicu $(Y, d')$ nazývame metrickým podpriestorom priestoru $(X, d)$.

**Definícia 1.2.**

1. *Nech $(X, d)$ je metrický priestor. Nech $A \subset X$. Potom číslo (môže byť aj $+\infty$)*

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y);\ x, y \in A\}$$

   *nazývame priemerom (diametrom) množiny $A$. Množina $A$ sa nazýva ohraničená (neohraničená), ak* $\operatorname{diam} < +\infty$ $(\operatorname{diam} = +\infty)$.

2. *Pre ľubovoľný bod $p \in X$ a $\varepsilon > 0$ označíme:*

$$O(p, \varepsilon) = \{x \in X; d(p, x) < \varepsilon\}.$$

*Túto množinu budeme nazývať $\varepsilon$ - ovým okolím bodu $p$ (vzhľadom na metriku $d$).*

**Definícia 1.3.** *Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov metrického priestoru $(X, d)$. Hovoríme, že táto postupnosť konverguje k bodu $x \in X$, ak postupnosť $\{d(x_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule. Postupnosť, ktorá nekonverguje k žiadnemu bodu priestoru $(X, d)$, nazývame divergentnou. Ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x \in X$ hovoríme tiež, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

**Veta 1.1.** *Každá postupnosť bodov metrického priestoru má najviac jednu limitu.*

**Veta 1.2.** *Ak postupnosť bodov metrického priestoru $(X, d)\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x \in X$, tak každá z nej vybraná postupnosť konverguje ku tomu istému bodu $x \in X$.*

**Poznámka 1.3**. Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme ohraničenou, ak množina jej členov je ohraničená.

**Veta 1.3.** *Každá konvergentná postupnosť bodov metrického priestoru je ohraničená.*

**Poznámka 1.4**. Na každej množine možno definovať viacero metrík.

Nech $d, d'$ sú dve metriky na množine $X$. Budeme hovoriť, že metriky $d$ a $d'$ sú ekvivalentné ak platí: Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $x$ v priestore $(X, d)$ práve vtedy, keď konverguje ku $x$ v priestore $(X, d')$.

Na karteziánskom súčine metrických priestorov obvykle definujeme metriku nasledovne:

**Definícia 1.4.** *Nech $(X_1, d_1), (X_2, d_2), ..., (X_m, d_m)$ sú metrické priestory. Označíme $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$. Ak $x, y \in X, x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), y = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$. Položme:*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} d_i^2(\alpha_i, \beta_i)}.$$

Doporučujeme čitateľovi overiť si, že funkcia $d$ je metrikou na priestore $X$. (Vlastnosti 1. a 2. sú zrejmé. Trojuholníkovu vlastnosť možno overiť pomocou nasledujúcej lemy.)

**Lema 1.1.** *Nech $a_i, b_i (i = 1, , 2, ..., m)$ sú reálne čísla. Potom platí:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i.b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}.$$

**Veta 1.4.** *Nech $(X_1, d_1), (X_2, d_2), ..., (X_m, d_m)$ sú metrické priestory. Postupnosť $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$, t.j.*

$$X^n = (\alpha_1^n, \alpha_2^n, ..., \alpha_m^n) \in X$$

*konverguje k prvku $X = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \in X$, v zmysle metriky zavedenej v definícii 1.4, vtedy a len vtedy, keď pre každé $i; 1 \leq i \leq m$ platí: $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_i^n = \alpha_i$, t.j. postupnosť $\{\alpha_i^n\}_{n=1}^{\infty}$, konverguje v priestore $(X_i, d_i)$ ku bodu $\alpha_i \in X_i$.*

**Poznámka 1.5**. Konvergencia spomínaná vo vete 1.4 sa nazýva konvergenciou po súradniciach.

**1**. Nech $< a, b > \subset R$. Označíme $M(a,b)$ množinu všetkých reálnych funkcií definovaných a ohraničených na intervale $< a, b >$. Nech $f, g \in M(a,b)$. Dokážte, že funkcia

$$d(f,g) = \sup_{x \in <a,b>} \mid f(x) - g(x) \mid,$$

je metrika na priestore $M(a,b)$.

**2**. Označme $M-$ množinu všetkých ohraničených reálnych postupností. Nech $x, y \in M; x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Dokážte, že funkcia

$$d(x,y) = \sup_{i=1,2,...} \mid x_i - y_i \mid,$$

je metrika na priestore $M$.

**3**. Označme znakom $l^{(2)}$ množinu všetkých tých reálnych čísel, pre ktoré platí:
Ak $x \in l^{(2)}, x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, tak $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ konverguje. Nech $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ sú dva body z $l^{(2)}$. Dokážte, že funkcia

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$$

je metrikou na $l^{(2)}$.

**4**. Nech $X = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\}$. Položme $d(x,x) = 0$, pre každé $x \in X$. Ďalej

$$d(1, \frac{1}{2}) = d(\frac{1}{2}, 1) = 1; d(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = d(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}; d(1, \frac{1}{3}) = d(\frac{1}{3}, 1) = \frac{1}{3}.$$

Je funkcia $d$ metrikou na $X$?

**5**. Dokážte, že vlastnosti 1.,2.,3. metriky, z definície 1.1 sú nezávislé. (Nezávislosť vlastností chápeme v tom zmysle, že žiadna z nich nevyplýva z ostatných vlastností. Pozri návod.)

**6**. Nech $X \neq \emptyset$ a $d : X \times X \to R$ má nasledujúce vlastnosti:
a) $d(x,x) = 0$ pre všetky $x \in X$ a $d(x,y,) \neq \emptyset$ pre každé dva rôzne prvky z $X$.
b) Pre každé tri prvky $x, y, z \in X$ platí:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Dokážte, že $d$ je metrika!

**7**. Nech $d_1, d_2$ sú dve metriky na $X$. Sú funkcie $d_1+d_2, \max\{d_1, d_2\}, \min\{d_1, d_2\}$ metrikami na $X$?

**8**. Označme $E_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n); a_i \in R, i = 1, 2, ..., n\}$. Ak $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sú dva body z $E_n$, tak kladieme

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

a) Ukážte, že funkcia $d$ je metrikou na priestore $E_n$. (Funkcia $d$ sa nazýva euklidovská metrika na $E_n$.)
b) Ak

$$\begin{aligned} A_1 &=(a_1^1, a_2^1, ..., a_n^1) \\ A_2 &=(a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2) \\ &\vdots \\ A_k &=(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k) \\ &\vdots \end{aligned}$$

je postupnosť bodov priestoru $(E_n, d)$, potom táto postupnosť $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje v priestore $(E_n, d)$ k bodu $A_0 = (a_1^0, a_2^0, ..., a_n^0)$ vtedy a len vtedy, ak $\{a_k^i\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje ku $a_k^0$, $k = 1, 2, ..., n$. Dokážte. V zmysle poznámky 1.5 možno posledné tvrdenie preformulovať: V euklidovských priestoroch postupnosť bodov konverguje práve vtedy, keď konverguje po súradniciach.

**9**. Označme znakom $l$ množinu všetkých takých postupností $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, pre ktoré rad $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |$ konverguje. Ak $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ sú dva body z $l$, položme

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i |.$$

a) Dokážte, že $d_1$ je metrika na priestore $l$.
b) Dokážte, že $l \subset l^{(2)}$ (pozri príklad 3.)
c) Takto na priestore $l$ máme definované dve rôzne metriky $d_1$ a metriku $d$ z príkladu 3. Je na mieste otázka, koľko metrík možno definovať na danej množine?

**10.** Označme $C(a, b)$ množinu všetkých spojitých funkcií, definovaných na intervale $< a, b >$. Presvedčte sa, že ak $f, g \in C$, tak funkcia

$$d(f, g) = \int_a^b | f(x) - g(x) | \, dx$$

je metrika na $C(a, b)$.

**11.** Nech $S$ označuje množinu všetkých postupností reálnych čísel. Pre $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ položme:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{| x_i - y_i |}{1+ | x_i - y_i |}.$$

Dokážte, že $d$ je metrika na $S$.

**12.** Nech $R = (-\infty, +\infty)$. Pre každú dvojicu $x, y \in R$ definujeme

$$d(x,y) = \sin^2 (x-y).$$

Je $d$ metrika na $R$ ?

**13.** Pre každé $x, y \in R$ definujeme

$$d(x,y) = \operatorname{arctg} | x - y |.$$

a) Ukážte, že $d$ je metrika na $R$.
b) Ukážte, že táto metrika je ekvivalentná euklidovskej metrike na priamke.

**14.** Pre každé $x, y \in R$ definujeme:

$$d(x,y) = \sqrt{| x - y |}.$$

Je funkcia $d$ metrika na $R$ ?

**15.** $X = \{(a,b); a, b \in R\}$. Pre každé dva body $x = (a_1, b_1), y = (a_2, b_2)$ z priestoru $X$ definujeme:

$$d_1(x,y) = \max\{| a_1 - a_2 |; | b_1 - b_2 |\}$$
$$d_2(x,y) = | a_1 - a_2 | + | b_1 - b_2 |$$
$$d_3(x,y) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \quad \text{(euklidovská metrika)}$$

Ukážte:

a) Funkcie $d_1$ a $d_2$ sú tiež metriky.
b) Metriky $d_1, d_2$ a $d_3$ sú ekvivalentné.

**16.** Nech $X$ je množina bodov kružnice $k$. Pre každú dvojicu $x, y \in X$ definujeme:
$d(x,y) =$ dĺžka kratšieho oblúka kružnice $k$, spájajúceho body $x$ a $y$. Je $d$ metrika na $X$ ?

**17.** Nech $(X, d)$ je metrický priestor. Pre každé $A, B \subset X, A, B \neq \emptyset$ položme:

$$d_1(A,B) = \inf\{d(a,b), a \in A, b \in B\}.$$

Je $d_1$ metrika na systéme všetkých podmnožín priestoru $X$ ?

**18.** Označujeme $C(a,b)$ množinu všetkých spojitých funkcií, definovaných na $< a, b >$ . Ak $f, g \in C(a,b)$, položme

$$d(f,g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}.$$

Je $d$ metrika na $C(a,b)$ ?

**19.** Ukážte, že k ekvivatentnosti metrík $d_1$ a $d_2$, definovaných na priestore $X$ stačí, aby existovali kladné konštanty $a, b$ tak, že pre všetky $x, y \in X$ platí:

$$a.d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b.d_1(x,y).$$

Ukážte, že táto podmienka nie je nutná k ekvivalentnosti metrík $d_1$ a $d_2$ !

**20.** Pseudometrikou nazveme takú funkciu $\overline{d}$, ktorá sa od metriky líši iba v tom, že $\bar{d}(x,y)$ sa môže rovnať nule aj pre $x \neq y$.

Nech $(X, \overline{d})$ je pseudometrický priestor.

Označme $Y$ nasledujúci rozklad priestoru $X$:

Do jednej a tej istej triedy $A \in Y, A \subset X$ patria tie a len tie body $x, y$, pre ktoré $\overline{d}(x,y) = 0$. Pre $A, B \in Y$ definujeme:

$$d(A,B) = \bar{d}(a,b); a \in A, b \in B.$$

Dokážte, že $d$ je metrika na priestore $Y$.

**21.** Nech $(X,d)$ je metrický priestor. $\emptyset \neq A_1 \subset A_2$. Potom diam $A_1 \leq$ diam $A_2$. Dokážte!

**22.** Nech $(X,d)$ je metrický priestor. Nech $A \subset X$. Označme

$$D(A) = \{d(x,y); x, y \in A\}.$$

Existuje taká trojprvková množina $A \subset E_2$, aby $D(A) = \{0, 1\}$ ? Platí niečo podobné v $E_1 = R$ ?

**23.** Označme $Q$ - množinu všetkých racionálnych čísel z intervalu $< 0, 1 >$ a $I$ - množinu všetkých iracionálnych čísel z intervalu $< 0, 1 >$ . Vypočítajte diam $Q$ a diam $I$.

**24.** Nech $j_1 < j_2 < ...; k_1 < k_2 < ...$ sú dve rastúce postupnosti prirodzených čísel. Nech $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov metrického priestoru $(X,d)$ taká, že $\{x_{j_i}\}_{i=1}^{\infty}$ ak $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ konvergujú k tomu istému bodu $x_0$. Nech zjednotenie množín $\{j_1, j_2, ...\}$ a $\{k_1, k_2, ...\}$ je množina všetkých prirodzených čísel. Potom aj postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x_0$. Dokážte!

**25.** Dokážte, že postupnosť $\{1 - \frac{1}{i}, \frac{2i}{3i+4}\}_{i=1}^{\infty}$ bodov euklidovského priestoru $(E_2, d)$ konverguje k bodu $(1, \frac{2}{3}) \in E_2$!

**26.** Veta 1.4 nám hovorí, že napr. v euklidovských priestoroch $(E_n, d)$ je konvergencia bodov ekvivalentná tzv. konvergencia po súradniciach. Majú podobnú vlastnosť i konvergencia v priestoroch $M, l^{(2)}, l$ z príkladov 2.,3. a 9.?

**27.** Na priestore $E_n$ všetkých usporiadaných $n$-tíc zaveďme okrem euklidovskej metriky $d_0$ inú funkciu $h$:

Ak $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sú dva body z $E_n$, tak $h(x, y) = \frac{1}{s}$, kde $s$ je prvá súradnica, v ktorej sa body $x$ a $y$ líšia. Dokážte, že $h$ je metrika na $E_n$!

**28.** Nech $N$ je množina všetkých prirodzených čísel. Pre každé celé číslo $a \geq 0$ definujeme na $N \times N$ nasledujúce funkcie:

$$d_a(n, n) = 0, \text{ pre každé } n \in N,$$

$$d_a(m, n) = a + \frac{1}{m+n}, \text{ ak } m, n \in N,\ m \neq n.$$

Ukážte:

a) $d_0$ nie je metrikou na $N$.
b) $d_a$, pre $a \geq 1$ je metrikou na $N$.
c) Pre všetky $a, b \geq 1$ sú $d_a, d_b$ ekvivalentné metriky.

**29.** V súvislosti s vetou 1.2 dokážte: Ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ metrického priestoru $(X, d)$ nekonverguje k prvku $x \in X$, tak existuje taká čiastočná postupnosť $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, že žiadna jej čiastočná postupnosť nekonverguje k bodu $x$.