2. Podmnožiny a body metrického priestoru

Definícia 2.1. *Nech (X, d) je metrický priestor. $A \subset X$. Bod $x \in X$ nazveme bodom uzáveru množiny A, ak existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A, n = 1, 2, ...$, ktorá konverguje k bodu x. Množinu všetkých bodov uzáveru množiny A nazývame uzáverom množiny A a označujeme $\overline{A}$.*

Definícia 2.2. *Množina $A, A \subset X$ sa nazýva uzavretá, ak $A = \overline{A}$. Množina $A, A \subset X$ nazveme otvorenou, ak $X \setminus A$ je uzavretá.*

K problematike uzavretých a otvorených množín sa môžeme dostať aj cez otvorené množiny.

Definícia 2.3. *Nech (X, d) je metrický priestor. $A \subset X$. Bod $p \in A$ nazveme vnútorným bodom množiny A, ak existuje také $\delta > 0$, že $O(p, \delta) \subset A$. Množinu všetkých vnútorných bodov nazývame vnútrom množiny A a označujeme $intA$.*

Veta 2.1. *Množina $A, A \subset X$ sa nazýva otvorená, ak $A = intA$. Množina $A, A \subset X$ sa nazýva uzavretá, ak $X \setminus A$ je otvorená.*

Veta 2.2. *Nech $R = (-\infty, +\infty)$ s obvyklou metrikou. Potom $G \subset R$ je otvorená práve vtedy, ak sa dá vyjadriť ako zjednotenie disjunktného spočitateľného systému otvorených intervalov.*

Vlastnosti otvorených množín, spomínané v príklade 33. tejto kapitoly inšpirovali k zavedeniu pojmu topologického priestoru.

Definícia 2.4. *Nech X je množina a $\mathcal{T}$ je systém jej podmnožín s týmito vlastnosťami:*
1. *$\emptyset, X \in \mathcal{T}$.*
2. *Zjednotenie ľubovoľného systému množín z $\mathcal{T}$ patrí do $\mathcal{T}$ a prienik konečného počtu množín z $\mathcal{T}$ patrí do $\mathcal{T}$.*

Systém $\mathcal{T}$, spĺňajúci podmienky 1. a 2. *sa nazýva topológiou na X a množinu X nazývame topologickým priestorom s topológiou $\mathcal{T}$ a zapisujeme v tvare $(X, \mathcal{T})$.*

Poznámka 2.1. Prvky systému $\mathcal{T}$ nazývame otvorenými množinami, ak $p \in X$, potom okolím bodu p v topologickom priestore $(X, \mathcal{T})$ nazveme každú množinu $G \in \mathcal{T}$, ktorá obsahuje bod p.

Definícia 2.5. *Nech X je metrický priestor. $A \subset X$. Bod $p \in X$ sa nazýva hromadným (kondenzačným) bodom množiny A, ak pre každé $\varepsilon > 0$ je $A \cap O(p, \varepsilon)$ nekonečná (nespočitateľná). Bod $p \in A$ sa nazýva izolovaným, ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $A \cap O(p, \varepsilon) = \{p\}$.*

Označme v poradí znakmi A^d, A^c, A^o množinu všetkých hromadných, kondenzačných, izolovaných bodov množiny A.

Veta 2.3. *X - metrický priestor. $A \subset X, p \in X, p \in A^d$ vtedy a len vtedy, ak existuje postupnosť $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}, p_n \in A, n = 1, 2, ...$, ktorá konverguje k bodu p.*

Veta 2.4.

a) $\overline{A} = A \cup A^d$.

b) $A^d = \overline{A^d}$.

c) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

d) *Ak označíme $A^{dd} = (A^d)^d$, tak $A^{dd} \subset A^d$.*

(Čitateľ si ľahko na príklade ukáže, že vo všeobecnosti nemusí v bode d) platiť rovnosť.)

Definícia 2.6.

a) *Množina $A \subset X$ sa nazýva hustá v X, ak $\overline{A} = X$.*

b) *Množina $A \subset X$ sa nazýva brehová (riedka) v X, ak množina $X - A$ $(X - \overline{A})$ je hustá v X.*

c) *Množina $A \subset X$ nazývame množinou prvej (Baireovej) kategórie v X, ak $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_n, n = 1, 2, ...$ sú riedke v X. Množina $A \subset X$ sa nazýva množinou druhej (Baireovej) kategórie, ak nie je množinou prvej kategórie.*

d) *Množina $A \subset X$ sa nazýva husto rozložená, ak $A \subset A^d$ (teda ak každý jej bod je hromadným bodom). Množina sa nazýva perfektná (dokonalá), ak je uzavretá a husto rozložená. Množina $A \subset X$ sa nazýva rozprášená, ak neobsahuje žiadnu neprázdnu husto rozloženú podmnožinu.*

Veta 2.5.

a) *Množina $A \subset X$ je hustá v X vtedy a len vtedy, ak pre každé okolie $O(p, \delta), p \in X$, $\delta > 0$ platí $A \cap O(p, \delta) \neq \emptyset$.*

b) *Množina $A \subset X$ je riedka v X vtedy a len vtedy, ak ku každému okoliu $O(p, \delta) \subset X$ existuje také okolie $O(p', \delta') \subset O(p, \delta)$, že $A \cap O(p', \delta') = \emptyset$.*

c) *Množina A je husto rozložená práve vtedy, ak $\overline{A}$ je husto rozložená.*

d) *Zjednotenie ľubovoľného systému husto rozložených množín je husto rozložená množina.*

Veta 2.6. *(Cantorova - Bendixonova). Každý metrický priestor je zjednotením dvoch disjunktných množín, z ktorých jedna je perfektná a druhá rozprášená.*

Na záver tejto kapitoly jeden zaujímavý príklad.

Príklad 2.1. Označme $C_0 =< 0, 1 >, C_1 =< 0, \frac{1}{3} > \cup < \frac{2}{3}, 1 >$, t.j. z pôvodného intervalu $< 0, 1 >$ vynecháme vnútornú tretinu (otvorený interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$).$C_2 =< 0, \frac{1}{9} > \cup < \frac{2}{9}, \frac{3}{(} > \cup < \frac{6}{9}, \frac{7}{9} > \cup < \frac{8}{9}, 1 >$, t.j. z oboch pôvodných intervalov vynecháme vnútorné tretiny, teda z intervalu $< 0, \frac{1}{3} >$ vynecháme otvorený interval $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ a z intervalu $< \frac{2}{3}, 1 >$ otvorený interval $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Takto postupujúc možno po n - tom kroku označiť množinu:

$$C_n =< 0, \frac{1}{3^n} > \cup < \frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n} > \cup ... \cup < \frac{3^n - 1}{3^n}, 1 > .$$

Ihneď vidno, že každá z množín $C_i, i = 1, 2, ...$ je uzavretá. Uvažujme množinu

$$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i.$$

Množina C je zrejme uzavretá a nazývame ju *Cantorovou* množinou. Je to známy a dôležitý príklad uzavretej, riedkej, nespočítateľnej a perfektnej množiny na reálnej priamke.

Poznámka 2.2.
Množinu $A = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde $F_n,\ n = 1, 2, ...$ sú uzavreté, nazývame množinou typu F_σ.
Množinu $B = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde $G_n,\ n = 1, 2, ...$ sú otvorené, nazývame množinou typu G_δ.

30. Nech (X, d) - metrický priestor. Ukážte, že pre každú množinu $A, A \subset X$ platí, $A \subset \overline{A}$.

31. $A, B \subset X$. Potom platí:
a) Ak $A \subset B$, tak $\overline{A} \subset \overline{B}$.
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
c) Ak $A_i \subset X, i = 1, 2, ...$ tak $\overline{\cup_{i=1}^{\infty} A_i} \supset \cup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.
d) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.
e) Bod $p \in X$ patrí do $\overline{A}$ vtedy a len vtedy, ak pre každé $\varepsilon > 0$ je $A \cap O(p, \varepsilon) \neq \emptyset$.

32. Dokážte vetu 2.1.

33. Ukážte, že v každom metrickom priestore platí:
a) Zjednotenie (prienik) ľubovoľného systému otvorených (uzavretých) množín je otvorená (uzavretá) množina.
b) Zjednotenie (prienik) konečného počtu uzavretých (otvorených) množín je uzavretá (otvorená) množina.
c) Nájdite nasledujúce príklady (napr. na priamke):
Aby zjednotenie nekonečného systému uzavretých množín nebola uzavretá množina.
Aby prienik nekonečného systému otvorených množín nebola otvorená množina.

34. Ukážte, že v každom metrickom prestore (X, d) sú množiny $\emptyset, X$ obojaké, t.j. súčasne otvorené aj uzavreté.

35. Dokážte, že v každom metrickom priestore (X, d) platí: Ak $p \in X, \delta > 0, q \in O(p, \delta)$, tak existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $O(q, \delta_1) \supset O(p, \delta)$.

36. Nech d označuje triviálnu metriku na priestore X. ($d(x, x) = 0$ pre každé $x \in X$ a $d(x, y) = 1$ pre každé $x, y \in X, x \neq y$.) Ukážte, že každá množina $A \subset X$ je obojaká v (X, d).

37. Dokážte, že množina Q (Q') všetkých racionálnych (iracionálnych) čísel nie je ani uzavretá ani otvorená v R.

38. Nech $A \subset E_n, A = \{x = (x_1, ..., x_n); \mid x_i \mid \leq 1; i = 1, 2, ..., n\}$. Dokážte, že A je uzavretá v (E_n, d_0).

39. Nech d a d' sú dve ekvivalentné metriky na priestore X. Dokážte, že $A \subset X$ je otvorená (resp. uzavretá) v priestore (X, d) práve vtedy, keď je otvorená (resp. uzavretá) v priestore (X, d').

40. Nech M označuje množinu všetkých ohraničených postupností reálnych čísel (pozri príklad 2.). Nech $A \subset M : A = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in M; \mid x_i \mid \leq 1, i = 1, 2, ...\}$. Dokážte, že A je uzavretá v M!

41. Ak (X, d) je metrický priestor, $A \subset X$, potom diam $A =$ diam $\overline{A}$. Dokážte!

42. Nech (X, d) je metrický priestor a $p \in X$. Potom $\{p\}$ je uzavretá a tým $X - \{p\}$ je otvorená. Dokážte!

43. Nech (X, d) je metrický priestor a $A \subset X$. Potom množina A je uzavretá (otvorená) v (X, d) práve vtedy, keď množina $X \setminus A$ je otvorená (uzavretá) v (X, d). Dokážte!

44. Nech (X, d) je metrický priestor, postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosťou jeho bodov. Bod $x \in X$ nazveme hromadnou hodnotou postupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečne veľa $n \in N$ takých, že $d(x_n, x) < \varepsilon$. Označme $L(x_1, x_2, ...)$ množinu všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.
a) Dokážte, že pre každú postupnosť je $L(x_1, x_2, ...)$ uzavretá v X.
b) Zostrojte taký priestor (X, d) a postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ v ňom, aby $L(x_1, x_2, ...) = \emptyset$.

45. Nech (X, d) je metrický priestor, $A \subset X$. Potom množinu $H(A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$ nazývame hranicou množiny A. Dokážte, že:
a) Hranica ľubovoľnej množiny je uzavretá množina.
b) Bod $p \in X$ patrí do $H(A)$ práve vtedy, keď pre každé $\delta > 0$ platí: aj $A \cap O(p, \delta) \neq \emptyset$, aj $(X - A) \cap O(p, \delta) \neq \emptyset$.
c) Množina A je obojaká práve vtedy, keď $H(A) = \emptyset$.

46. V príklade 17. bol zavedený pojem vzdialenosti dvoch množín metrického priestoru (X, d), t.j. ak $A, B \subset X$: dist $(A, B) = d_1(A, B) = \inf \{d(a, b), a \in A, b \in B\}$.
a) Ak $p \in X, B \subset X$, tak dist $(\{p\}, B) = 0$ práve vtedy, keď $p \in \bar{B}$. Dokážte!
b) Zostrojte napr. v (E_2, d_0) také disjunktné uzavreté množiny A, B, aby dist $(A, B) = 0$.

47. Nech (X, d) je metrický priestor $p \in X, 0 < \delta_1 < \delta_2$. Dokážte, že $\overline{O(p, \delta_1)} \subset O(p, \delta_2)$.

48. Nech Q (Q') označuje množinu všetkých racionálnych (iracionálnych) čísel. Potom $intQ = intQ' = \emptyset, \overline{Q} = \overline{Q'} = R, H(Q) = H(Q') = R$. Dokážte!

49.
a) Ak (X, d) je metrický priestor, $A \subset X$, potom vždy $intA \cap H(A) = \emptyset$. Dokážte!
b) Ak (X, d) je triviálny metrický priestor, $A \subset X$, tak $intA = A, H(A) = \emptyset, \overline{A} = A$. Dokážte!

50. Nech (X, d) je metrický priestor. Dokážte, že pre každú množinu $A \subset X$ platí: $H(A) = H(X - A)$.

51. Dokážte, že v priestore (R, d_0) neexistujú okrem $\emptyset$ a R žiadne iné obojaké množiny.

52. Nech $X = \{a, b, c\}$. Zvoľme $S = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$. Je S topológiou na X?

53. Nech X je nekonečná množina. Označme S systém podmnožín A priestoru X, kde A je buď prázdna, alebo $X - A$ je konečná.
a) Ukážte, že S je topológiou na X.
b) Dokážte, že neexistuje taká metrika d na X, aby systém otvorených množín v metrickom priestore (X, d) splýval s topológiou S.

54. Dokážte, že každý bod podmnožiny A metrického priestoru (X, d) je buď izolovaným alebo hromadným bodom množiny A (t.j. platí $A = A^0 \cup (A \cap A^d)$.

55. Zostrojte takú množinu $A \subset E$, aby všetky body množiny A boli izolované, ale aby $A^d \neq \emptyset$.

56. Označme C - množinu všetkých celých čísel, Q - množinu všetkých racionálnych čísel. Potom $C^0 = C$, ale $Q^0 = \emptyset$. Dokážte! (A^0 značí množinu izolovaných bodov.)

57. Riedka podmnožina metrického priestoru je brehová. Obrátené tvrdenie nemusí platiť. Dokážte!

58. Každá riedka množina je množina prvej kategórie. Obrátené tvrdenie nemusí platiť. Dokážte!

59.
a) Dokážte, že podmnožina A triviálneho metrického priestoru X je hustá v X práve vtedy, keď $A = X$.
b) Dokážte, že množina $Q \times Q$ je hustá v E^2.
c) Dokážte, že množina všetkých ohraničených postupností racionálnych čísel je hustá v M (pozri príklad 2.).
d) Dokážte, že množina všetkých konvergentných postupností reálnych čísel je uzavretá a riedka v M.

60. Nech A je uzavretá alebo otvorená podmnožina metrického priestoru X. Dokážte, že potom $H(A)$ je riedka v X.

61. Dokážte, že množina A je perfektná vtedy a len vtedy, ak $A = A^d$.

62. Dokážte, že množina A je brehová (riedka) práve vtedy, keď $intA = \emptyset$ ($int\overline{A} = \emptyset$).

63. Nech $f(x)$ je spojitá reálna funkcia. Dokážte, že množina $E_a = \{x \in R; f(x) \geq a\}$ je uzavretá v R.

64. Nech $a, b \in R, a < b$ sú dané. Označme E množinu všetkých spojitých funkcií, definovaných na $< 0, 1 >$, pre ktoré platí: $a < f(x) < b$, v každom bode $x \in < 0, 1 >$. Dokážte, že množina E je otvorená v priestore $C(0, 1)$ (pozri príklad 10.). A množina $F = \{f(x) \in C(O, 1); a \leq f(x) \leq b; x \in < 0, 1 >\}$ je uzavretá v $C(0, 1)$.

65. Nech $g \in C(0, 1)$. Dokážte, že množina všetkých tých funkcií z $C(0, 1)$, pre ktoré $f(x) > g(x)$, (pre každé $x \in < 0, 1 >$) je otvorená v $C(0, 1)$. A množina všetkých tých $f(x) \in C(0, 1), f(x) \geq g(x)$ (pre $x \in < 0, 1 >$) je uzavretá v $C(0, 1)$.

66. Nech (X, d_1) a (Y, d_2) sú metrické priestory. Nech $A_1 \subset A \subset X, A_1$ hustá v A. Potom $f(A_1)$ je hustá v $f(A)$. Dokážte!

67. Dokážte, že v každom metrickom priestore (X, d) platí

$$X - intE = \overline{X - E}; X - \overline{E} = int(X - E),$$

pre každú množinu $E \subset X$.

68. Dokážte: Ak (X, d) je metrický priestor, $A, B \subset X$, tak $int(A \cap B) = intA \cap intB$. Pre nekonečný počet činiteľov však platí: $\cap_{t \in T} intA_t \supset int(\cap_{t \in T} A_t), T$ - nekonečná. Dokážte!

69. Ak (X, d) je metrický priestor, $A, B \subset X$. Zistite, či platí analogická rovnosť: $int(A \cup B) = intA \cup intB$?

70. Množinu všetkých hromadných bodov množiny A, (označujeme A^d a nazývame deriváciou množiny A). Nájdite množinu $A \subset X$ tak, aby $A^d \neq \emptyset$, ale $(A^d)^d = \emptyset$.

71. V euklidovskej rovine E^2 udajte nasledujúce príklady:
a) $A \subset E^2, H(A) = \emptyset$ (pozri príklad 45.).
b) $A \subset E^2, H(A) \neq \emptyset$ a $A \cap H(A) = \emptyset$.
c) $A \subset E^2, A$ - nekonečná, $A = H(A)$.

72.
a) Dokážte: $H(A \cup B) \subset H(A) \cup H(B)$.
b) Pre nekonečne veľa množín analógia neplatí!

73. Uvažujeme v rovine E^2 systém sústredných uzavretých kruhov o polomeroch $r_1 < r_2 < ... < r_n < ....$ Je zjednotenie týchto kruhov uzavretá množina?

74. Dokážte ekvivalentnosť nasledujúcich definícií:
a) Množina $A \subset X$ je uzavretá v X, ak $\overline{A} \subset A$.
b) Množina $A \subset X$ je uzavretá v X, ak $A^d \subset A$.
c) Množina $A \subset X$ je uzavretá v X, ak $H(A) \subset A$.

75. Dokážate, že uzáver množiny A sa rovná prieniku všetkých uzavretých množín, obsahujúcich množinu A.

76. Dokážte, že $intA$ sa rovná zjednoteniu všetkých otvorených podmnožín, obsiahnutých v A.

77. Platí nasledujúce tvrdenie: Ak A je uzavretá, tak $A = \overline{intA}$? Resp. platí namiesto rovnosti aspoň niektorá inklúzia?

78. Dokážte, že každá množina A, ktorá obsahuje len izolované body, je typu F_σ.

79. Nech (X, d) je metrický priestor, $A \subset X, p \in X$. Overte platnosť nasledujúcich tvrdení:
a) dist $(p, A) =$ dist $(p, \overline{A})$
b) dist $(p, A) =$ dist $(p, intA)$.

80. Nech F_1 a F_2 sú dve disjunktné uzavreté podmnožiny metrického priestoru (X, d). Ukážte, že existujú otvorené množiny G_1 a $G_2, G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

81. Dokážte:
a) Komplement množiny F_σ (G_δ) je množina typu G_δ (F_σ).
b) Každá uzavretá množina je typu G_δ a každá otvorená množina je typu F_σ.

82. Dokážte, že:
a) Množina Q všetkých racionálnych čísel na priamke je množinou typu F_σ, ale nie typu G_δ.
b) Množina I všetkých iracionálnych čísel na priamke je množinou typu G_δ, ale nie typu F_σ.