# 5. Zobrazenia metrických (topologických) priestorov

Predpokladáme, že pojem zobrazenia je čitateľovi známy. Nech $f : X \to Y$ a $A \subset X$, tak množinu $\{f(x); x \in A\} \subset Y$ nazývame obrazom množiny $A$ pri zobrazení $f$ a označujeme $f(A)$. Podobne, ak $B \subset Y$, tak množinu $\{x; f(x) \in B\} \subset X$ nazývame vzorom množiny $B$ pri zobrazení $f$ a označujeme $F^{-1}(B)$. Dôležitým pojmom matematickej analýzy je pojem spojitého zobrazenia.

**Definícia 5.1.** *Nech $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{V})$ sú dva topologické priestory. Nech $f : X \to Y$. Hovoríme, že zobrazenie $f$ je spojité, ak pre každú množinu $V \in \mathcal{V}$ je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Nech $(X, d), (Y, d')$ sú metrické priestory. Potom $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie, ak vzor každej množiny, otvorenej v priestore $(Y, d')$, je množina otvorená v priestore $(X, d)$.*

Niekedy je vhodné použiť "postupnostnú" charakterizáciu spojitosti:

**Veta 5.1.** *Nech $(X, d), (Y, d')$ sú metrické priestory. Funkcia $f : X \to Y$ je spojitá v bode $x_0 \in X$ vtedy a len vtedy, ak pre každú postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ prvkov priestoru $X$, konvergujúcu k $x_0$, príslušná postupnosť $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje k $f(x_0)$.*

**Poznámka 5.1**. Pripomíname, že funkcia je spojitá na množine, ak je spojitá v každom bode tejto množiny.

**Definícia 5.2.** *Nech $X, Y$ sú topologické (metrické) priestory. Potom $f : X \to Y$ budeme nazývať homeomorfným zobrazením (krátko homeomorfizmom), ak $f$ je spojité a prosté zobrazenie a k nemu inverzné zobrazenie $f^{-1}$ je tiež spojité.*

**Definícia 5.3.** *Nech $(X, d), (Y, d')$ sú metrické priestory. Nech $f : X \to Y$. Zobrazenie $f$ nazveme izometrickým, ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in X$ platí: $d(x_1, x_2) = d'(f(x_1), f(x_2))$.*

**Definícia 5.4.** *Zobrazenie $f$ metrického priestoru $(X, d)$ do metrického priestoru $(Y, d')$ sa nazýva rovnomerne spojité, ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé dva body $x_1, x_2 \in X$, pre ktoré $d(x_1, x_2) < \delta$ platí $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.*

Význam a dôležitosť spojitých zobrazení vidno i na nasledujúcich tvrdeniach:

**Veta 5.2.**

*a) Spojitý obraz separabilného (metrického) priestoru je separabilný (metrický) priestor.*
*b) Spojitý obraz kompaktného (metrického) priestoru je kompaktný priestor.*
*c) Spojitý obraz súvislého (topologického, metrického) priestoru je súvislý priestor.*

**Veta 5.3.** *Nech $(X, d)$ je kompaktný metrický priestor a $f$ je spojitá reálna funkcia, definovaná na $X$. Potom $f$ je ohraničená na $X$ a dosahuje na $X$ svoje infimum a supremum (t.j. má na $X$ maximum a minimum).*

**Veta 5.4.** *Nech* $(X, d)$ *je kompaktný metrický priestor a* $(Y, d')$ *je metrický priestor. Potom každá spojitá funkcia* $f : X \to Y$ *je rovnomerne spojitá na* $X$.

**Definícia 5.5.** *Nech* $(X, d)$ *je metrický priestor. Zobrazenie* $f : X \to X$ *nazývame kontraktívnym zobrazením, ak existuje také číslo* $\alpha : 0 \leq \alpha < 1$, *že pre každé dva body* $x, x' \in X$ *platí*

$$d(f(x), f(x')) \leq \alpha . d(x, x').$$

**Veta 5.5.** *(Banachova veta.) Nech* $\emptyset \neq X$ *je úplný metrický priestor a nech* $f : X \to X$ *je kontraktívne zobrazenie. Potom existuje práve jeden bod* $x_0 \in X$ *taký, že* $f(x_0) = x_0$.

**Poznámka 5.2**.

a) Bod $x_0$, pre ktorý platí $f(x_0) = x_0$ nazývame pevným bodom kontraktívneho zobrazenia $f$ v úplnom metrickom priestore $(X, d)$.
b) Všimnime si, že každé kontraktívne zobrazenie je rovnomerne spojité.

**Definícia 5.6.** *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor,* $(Y, d')$ *je metrický priestor. Nech* $f : X \to Y$ a $x \in X$. *Definujeme*

$$\omega_f(x) = \inf_{O(x)} \text{diam f(O(x))}.$$

*Funkciu* $\omega_f(x)$ *nazývame osciláciou funkcie* $f$ v *bode* $x$. *(Infimum vpravo berieme cez všetky okolia* $O(x)$ *bodu* $x$ v *priestore* $X$.*)*

**Definícia 5.7.** *Hovoríme, že funkcia* $f : R \to R$ *má Darbouxovu vlastnosť ak pre ľubovoľné* $a, b \in R$ a *ľubovoľné* $x \in R$ *také, že* $f(a) < x < f(b)$, *existuje* $c : a < c < b$ *tak, že* $f(c) = x$. *Nech funkcia* $f(x)$ *je definovaná na intervale* $< a, b >$. *Konečný počet bodov* $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ *nazveme delením intervalu* $< a, b >$. *Označme* $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_i) - f(x_{i-1} \mid$.

**Definícia 5.8.** *Označme*

$$\bigvee_a^b f = \sup \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid,$$

*kde supremum vpravo berieme cez všetky možné delenia intervalu* $< a, b >$. *"Číslo"* $\bigvee_a^b f$ *nazývame variáciou funkcie* $f$ *na intervale* $< a, b >$.

*Ak* $\bigvee_a^b f$ *je konečné číslo, hovoríme, že funkcia* $f$ *má ohraničenú variáciu na intervale* $< a, b >$.

*Ak* $\bigvee_a^b f = +\infty$, *hovoríme, že funkcia* $f$ *má neohraničenú variáciu na intervale* $< a, b >$.

**Veta 5.6.**

a) *Každú funkciu s ohraničenou variáciou možno vyjadriť v tvare rozdielu dvoch rastúcich funkcií.*

b) *Každú spojitú funkciu s ohraničenou variáciou možno vyjadriť v tvare rozdielu dvoch spojitých rastúcich funkcií.*

**159**. Nech $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{V})$ sú dva topologické priestory. Nech $f : X \to Y, x_0 \in X$. Funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$ vtedy a len vtedy, ak ku každej množine $B \in \mathcal{V}$, $f(x_0) \in B$ existuje taká množina $A \in \mathcal{T}$, $x_0 \in A$, že $f(A) \subset B$. Dokážte!

**160**. Nech $f : X \to Y$. Potom $f$ je spojitá v každom izolovanom bode svojho definičného oboru. Dokážte!

**161**. Ukážte, že ak $f$ je spojité a prosté zobrazenie priestoru $X$ na priestor $Y$, tak $f^{-1}$ (inverzné zobrazenie) nemusí byť spojité.

**162**. Nech $f$ je izometrické zobrazenie metrického priestoru $(X, d)$ na metrický priestor $(Y, d')$. Potom $f$ je homeomorfné zobrazenie. Dokážte!

**163**. Každé izometrické zobrazenie je rovnomerne spojité. Obrátene však nemusí platiť. Dokážte!

**164**. Dokážte, že zobrazenie $f$ topologického priestoru $(X, \mathcal{T})$ do topologického priestoru $(Y, \mathcal{V})$ je spojité na $X$ práve vtedy, ak vzor $f^{-1}(F)$ ľubovoľnej uzavretej množiny $F \subset Y$ je uzavretá množina v $X$.

**165**. Nech $A(B)$ je ľubovoľná podmnožina definičného oboru (oboru hodnôt) funkcie $f$. Overte platnosť nasledujúcich rovností:
a) $f^{-1}(f(A)) = A$.
b) $f(f^{-1}(B)) = B$.

**166**. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $f, g : X \to R = (-\infty, +\infty)$. Ak $f, g$ sú spojité v bode $x_0 \in X$, tak aj súčet $(f + g)$, súčin $(f.g)$, násobok $(\alpha.f)(\alpha \in R)$ a absolutná hodnota $\mid f \mid$ sú spojitými funkciami v bode $x_0$. Dokážte! Ako je to s podielom $\frac{f}{g}$?

**167**. Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva diskrétny, ak každý jeho bod je izolovaný (teda $\mathcal{T} = 2^X$). Dokážte: Topologický priestor je diskrétny vtedy a len vtedy, keď každá reálna funkcia $f : X \to R$ je spojitá na $X$.

**168**. Ak $f, g$ sú rovnomerne spojité reálne funkcie, definované na priestore $X$ a $\alpha, \beta \in R$, potom aj $\alpha.f + \beta.g$ je rovnomerne spojitá funkcia. Dokážte! Platí podobné tvrdenie aj o súčine $f.g$?

**169**. Nech $X, Y$ sú metrické priestory, $f : X \to Y$. Nech $x_0 \in X^d$ (hromadný bod množiny $X$). Dokážte, že funkcia $f$ je spojitá v $x_0$ práve vtedy, keď $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Čo vieme povedať o spojitosti funkcie $f$ v bode $x_0$, keby $x_0$ bol izolovaným bodom priestoru $X$?

**170**. Nech $f$ je spojitá reálna funkcia, definovaná na (topologickom, metrickom) priestore $X$. Dokážte, že pre každé $a, b \in R$ platí:
a) Každá z množín $\{x \in X; f(x) \leq a\}, \{x \in X; f(x) \geq a\}, \{x \in X; a \leq f(x) \leq b\}$ je uzavretá v $X$.
b) Každá z množín $\{x \in X; F(x) < a\}, \{x \in X; f(x) > a\}, \{x \in X; a < f(x) < b\}$ je otvorená v $X$.

**171**. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $(Y, d')$ je metrický priestor. Potom funkcia $f : X \to Y$ je spojitá v bode $x \in X$ vtedy a len vtedy, ak $\omega_f(x) = 0$. Dokážte!

**172**. Nech funkcia $f$ je definovaná na priestore $X$. Označíme: $C_f = \{x \in X; f$ - spojitá v $x\}$ a $D_f = \{x \in X; f$ - nespojitá v $x\}$. Ukážte, že pre každú funkciu $f$ platí:
a) $D_f$ je množina typu $F_\sigma$.
b) $C_f$ je množina typu $G_\sigma$.

**173**. Dokážte, že funkcia definovaná na celej reálnej priamke nemôže mať za body spojitosti spočitateľnú hustú podmnožinu $E \subset R$ a body nespojitosti $D_f = R \setminus E$.

**174**. Zostrojte nasledujúce funkcie definované na $R$:
a) $F(x)$ -ktorá je spojitá v bodoch $x = \pm 1$ a všade inde nespojitá.
b) $f(x)$: spojitá pre $x = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ a všade inde nespojitá.

**175**. Určte body spojitosti, resp. nespojitosti, nasledujúcej funkcie definovanej na $< 0, 1 >$:

$f(x) = 0$ v bodoch Cantorovej množiny (pozri príklad 30. z textu).

$f(x) = 1$ v stredoch styčných intervalov (ktoré vynechávame pri konštrukcii Cantorovej množiny) a všade inde lineárna.

**176**. Zostrojte funkciu definovanú na intervale $< 0, 1 >$, ktorá je spojitá v každom iracionálnom bode tohoto intervalu a nespojitá v každom racionálnom bode. (Doporučujeme si uvedomiť, že taká funkcia, ktorá by mala vymenené body spojitosti a nespojitosti, neexistuje. Pozri príklad 173.)

**177**. Na príkladoch ukážte, že spojitý obraz:
a) uzavretej množiny nemusí byť uzavretá množina,
b) otvorenej množiny nemusí byť otvorená množina.

**178**. Ak $f$ - spojitá, tak vzor otvorenej množiny je otvorená (definícia 5.1) a vzor uzavretej množiny je uzavretá (príklad 164.). Platí: Ak $f$ je spojitá funkcia, $f : X \to Y$ a $M \subset Y, M$ - kompaktná, tak $f^{-1}(M)$ je kompaktná podmnožina $X$?

**179**. Nech $f : R \to R$, potom $f$ je spojitá práve vtedy, ak:
a) $f^{-1}((a, b))$ je otvorená v $R$, pre každé $a, b \in R$.
alebo
b) $f^{-1}((-\infty, a >)$ a tiež $f^{-1}(< a, +\infty))$ sú uzavreté pre každé $a \in R$.

**180**. Nech $(X, d)$ je metrický priestor. Dokážte, že funkciu $f(x) = d(x, y_0)$, ($y_0$ - ľubovoľný pevný bod z $X$) je rovnomerne spojitá a teda i spojitá na $X$.

**181**. Nech $f : R \to R$, $f$ - je spojitá. Potom $f$ má Darbouxovu vlastnosť.

**182**. Je vždy funkcia, ktorá má Darbouxovu vlastnosť spojitá?

**183**. Nech $f : X \to Y$, $f$ - spojitá. Nech $E \subset X$, $E$ - hustá v $X$. Potom $f(E)$ je hustá v $f(x)$. Dokážte!

**184**. Nech $f : X \to Y$. Dokážte, že k spojitosti funkcie $f$ stačí, aby vzory všetkých otvorených sfér priestoru $Y$ boli otvorené množiny v priestore $X$. (Porovnaj s definíciou 5.1, resp. príkladom 159.)

**185**. Na príklade ukážte, že v podmienke kontraktívnosti (definícia 5.5) nemožno pripustiť $\alpha = 1$, totiž pre takéto zobrazenie by už nasledujúca veta 5.5 nemusela platiť!

**186**. Nech $f$ je zobrazenie neprázdneho úplného metrického priestoru $X$ do $X$. Označíme: $f \circ f = f^2, f^2 \circ f = f^3, \ldots$ atď. Nech pre nejaké prirodzené číslo $k$ je zobrazenie $f^k : X \to X$ kontraktívne. Potom zobrazenie $f$ má jediný pevný bod. Dokážte!

**187**. Význam predošlého cvičenia, okrem iného, spočíva v tom, že od $f$ sme nežiadali spojitosť. Majme napr. $f :< 0,2 >\to R$ nasledovne: $f(x) = 0$, pre $x \in< 0,1 >$ a $f(x) = 1$, pre $x \in (0,2 >$. Čitateľ ľahko nahliadne, že $f$ nie je na $< 0,2 >$ spojité, no má jediný pevný bod. Dokážte!

**188**. Nech funkcia $f(x)$ má na intervale $< a,b >$ variáciu rovnú $A$. Akú variáciu na $< a,b >$ má funkcia $(k.f(x) + m)$ ?

**189**. Vypočítajte variáciu funkcie $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1 \\ 10, & x = 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ na intervale $< 0,2 >$.

**190**. Nech funkcia $f(x)$ má v každom bode intervalu $< a,b >$ deriváciu, ktorá je ohraničená na $< a,b >$. Potom funkcia $f(x)$ je funkciou s ohraničenou variáciou na intervale $< a,b >$. Dokážte!

**191**. Z matematickej analýzy je známa skutočnosť, že rovnomerne konvergentný funkcionálny rad zachováva spojitosť, deriváciu a integrál. Preto je na mieste otázka:

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je rovnomerne konvergentný funkcionálny rad spojitých funkcií s ohraničenou variáciou. Je i súčet tohoto radu funkcia s ohraničenou variáciou?

**192**. Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú funkcie s ohraničenou variáciou na $< a,b >$. Dokážte, že ich súčet a súčin sú funkcie s ohraničenou variáciou na $< a,b >$ a naviac $\bigvee_a^b (f+g) \leq \bigvee_a^b + \bigvee_a^b$; $\bigvee_a^b f.g \leq \sup_{x\in<a,b>} |f(x)| . \bigvee_a^b g(x) + \sup_{x\in<a,b>} |g(x)| . \bigvee_a^b f(x)$.

**193**. Nech $f(x)$ je definovaná na $< a,b >$ a $a < c < b$. Potom $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b b$.

**194**. Nech $f(x)$ má ohraničenú variáciu na intervale $< a,b >$. Potom aj funkcia $\mid f(x) \mid$ má ohraničenú variáciu na $< a,b >$. Dokážte! Platí i obrátené tvrdenie?