III. Diferenciálny počet funkcii viacerých premenných

1. Limita a spojitost'

1.1. Definícia reálnej funkcie

Definícia 1.1.1. *Nech $M \subset R^n, M = \emptyset$. Reálnu funkciu definovanú na množine M nazývame reálnou funkciou n premenných. Budeme ju označovat' $f : M \to R^1$, alebo $f(x)$, alebo $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Množinu M budeme nazývat' definičným oborom funkcie f. Pod symbolom $f(x)$ budeme tiež rozumiet' hodnotu funkcie f v bode x. Ak funkcia je určená vzorcom a nie je udaný jej obor definície, rozumieme jej oborom definície množinu všetkých tých bodov x, pre ktoré je hodnota $f(x)$ reálne číslo.

Poznámka 1.1.1. Pojmy ako sú ohraničenost' funkcie, maximum, minimum, supremum, infimum funkcii, parciálna funkcia, sú tie isté ako v prípade funkcie jednej premennej. Tak isto i operácie s funkciami viac premenných sa definujú tak, ako to bolo v prípade funkcií jednej premennej.

Poznámka 1.1.2. Funkciu dvoch premenných budeme často označovat' $z = f(x, y)$ a funkciu troch premenných budeme označovat' $u = f(x, y, z)$.

1.2. Graf reálnej funkcie n premenných

Definícia 1.2.1. *Grafom funkcie $f(x)$, definovanej na množine $M \subset R^n, M \neq \emptyset$, rozumieme množinu G všetkých takých bodov $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1}$, pre ktoré platí: $(x_1, x_2, ..., x_n) \in M, x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Pri zostrojovaní grafu funkcie dvoch premenných je výhodné zostrojit' priesečnice grafu funkcie rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami, alebo rovinami prechádzajúcimi niektorou zo súradnicových osí. Nazývame ich rezmi. Rezy rovnobežné s rovinou R_{xy} nazývame vrstevnicami.*

1.3. Definícia vektorovej funkcie n premenných

Definícia 1.3.1. *Nech $M \subset R^n, M \neq \emptyset$. Vektorovou funkciou n premenných budeme rozumieť takú funkciu, ktorá každému bodu $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in M$ priradí nejaký vektor $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in R^m$. Vektorovú funkciu n premenných budeme označovať*
$f : M \to R^m$, alebo $y = f(x)$, alebo

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned}$$

1. Daná je funkcia $z = f(x, y)$. Vypočítajte $f(1, \frac{1}{2}), f(-1, 2)$, ak:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2y + y + 1}$

b) $f(x, y) = \arcsin(x + y)$.

2. Nájdite definičné obory daných funkcií $z = f(x, y)$ resp. $u = f(x, y, z)$ a znázornite ich v R^2 resp. R^3, ak:

a) $f(x, y) = \frac{1}{r^2 - x^2 - y^2},\ r > 0$

b) $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},\ a > b > 0$

c) $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$

d) $f(x, y) = \sqrt{x . \sin y}$

e) $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}$

f) $f(x, y) = \ln x - \ln \sin y$

g) $f(x, y) = \arcsin \frac{y-1}{x}$

h) $f(x, y) = \ln xy + \pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$

i) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2) + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \arcsin \frac{y}{x}$

j) $f(x, y, z) = \frac{x}{|y|+|z|}$

k) $f(x, y, z) = \ln xyz$

l) $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$.

3. Aké druhy kriviek sú rezy grafov daných funkcií $z = f(x, y)$ rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami R_{xz}, R_{yz}?

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = xy^2$.

4. Nájdite vrstevnice na grafoch funkcií $z = f(x, y)$:

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

b) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$

c) $f(x, y) = xy$.

5. Načrtnite grafy funkcií:

a) $z = x - y$

b) $z = -x - y + 1$

c) $z = 4x^2 + 9y^2$

d) $z = x^2 - y^2$

e) $z = 4 - x^2 - y^2$

f) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

g) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

h) $z = 1 - y^2$.

1.4. Limita funkcie n premenných

Definícia 1.4.1. *Funkcia f má v hromadnom bode a svojho definičného oboru M limitu číslo b, ak $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ \delta > 0$ tak, že $\forall x \in M$, pre ktoré $0 < \varrho(x, a) < \delta$ je $| f(x) - b |< \varepsilon$. Limitu funkcii f v bode a budeme označovať takto:*

$$\lim_{x \to a} f(x), \ \textit{alebo} \ \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

kde $a_1, a_2, ..., a_n$ sú súradnice bodu a.

Definícia limity vektorovej funkcie f v bode a

Definícia 1.4.2. *Funkcia f má v hromadnom bode a svojho definičného oboru M limitu $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$, ak $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in M$, pre ktoré $0 < \varrho(x, a) < \delta$ je $f(x) \in O_\varepsilon(B)$.*

Limitu vektorovej funkcie f v bode a budeme označovať takto:

$$\lim_{x \to a} f(x), \qquad \text{alebo} \qquad \begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f_m(x_1, x_2, ..., x_n). \end{array}$$

Veta 1.4.1. *Nech a je hromadný bod oboru definície M funkcie f. Funkcia f má v bode a limitu číslo b práve vtedy, ak pre každú postupnosť bodov $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ z množiny M $x^{(k)} \neq a, k = 1, 2, ...$, ktorá konverguje k bodu a je $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = b$.*

Poznámka 1.4.1. *Pre funkciu n premenných platia analogické vety ako pre limitu funkcie jednej premennej.*

Definícia 1.4.3. *Funkcia f sa nazýva nekonečne malá v bode a, ak $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.*

Definícia 1.4.4. *Ak f a g sú funkcie nekonečne malé v bode a a $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, potom hovoríme, že f je v bode a nekonečne malá vyššieho rádu ako g a píšeme $f = o(g)$ pre $x \to a$.*

Poznámka 1.4.2. Pod symbolom $x \to \infty$, kde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ budeme rozumieť $x_i \to \infty, i = 1, 2, ..., n$.

Definícia 1.4.5. *Nech funkcia f je definovaná na množine M, ktorá obsahuje body ľubovoľne vzdialené od bodu $0 = (0, 0, ..., 0)$. Číslo b sa nazýva limitou funkcie f pre $x \to \infty$ práve vtedy, ak $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ K > 0$ tak, že $\forall x \in M$, pre ktoré $\varrho(x, 0) > K$ platí $\mid f(x) - b \mid < \varepsilon$.*

Dvojnásobné limity funkcie dvoch premenných

Definícia 1.4.6. *Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná na množine $M \subset R^2$ a nech $[x_0, y_0]$ je hromadným bodom množiny M. Nech pre každé $x \neq x_0$ také, že $[x, y] \in M$ existuje $\lim_{y\to y_0} f(x, y) = g(x)$ a nech táto funkcia má v bode x_0 limitu, potom $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \left[\lim_{y\to y_0} f(x, y)\right]$ sa nazýva dvojnásobná limita funkcie f v bode $[x_0, y_0]$ podľa y a x. Analogicky sa definuje dvojnásobná limita funkcie $f(x, y)$ v bode $[x_0, y_0]$ podľa x a y.*

Označme: $l = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y), l_{12} = \lim_{x\to x_0} \left[\lim_{y\to y_0} f(x, y)\right], l_{21} = \lim_{y\to y_0} \left[\lim_{x\to x_0} f(x, y)\right].$

Veta 1.4.2. *Nech existuje limita funkcie $f(x, y)$ v bode $[x_0, y_0]$ a nech existuje ľubovoľná z dvojnásobných limít, potom sa tieto limity rovnajú.*

Dôsledok 1.4.1. *Ak existuje l, l_{12}, l_{21}, potom $l = l_{12} = l_{21}$.*

Dôsledok 1.4.2. *Ak $l_{12} \neq l_{21}$, potom limita funkcie $f(x, y)$ v danom bode $[x_0, y_0]$ neexistuje.*

Poznámka 1.4.3. Pojem dvojnásobnej limity možno definovať aj v prípade, že x_0 alebo y_0, alebo x_0 i y_0 sú rovné ∞ alebo $-\infty$.

Poznámka 1.4.4. Z existencie dvojnásobných limít funkcie f v danom bode a z ich rovnosti nevyplýva existencia limity v tomto bode. Pozri príklady 21. a), 23. b).

Poznámka 1.4.5. Z existencie limity funkcie f v danom bode nevyplýva existencia dvojnásobných limít funkcie f v tomto bode. Pozri príklady 22.,26.

6. Definujte limitu funkcie $f : M \subset R^n \to R^m$ pomocou normy v R^n resp. R^m.

7. Definujte nevlastnú limitu funkcie $f : M \subset R^n \to R^m$.

V nasledujúcich príkladoch vypočítajte limity:

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2+y+2)$.

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}$.

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 0}} \dfrac{\mathrm{tg}\ xy}{y}$.

14. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

15. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

16. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$.

18. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

19. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$.

20. Zistite, či existuje:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

21. Dokážte, že nasledujúce limity neexistujú:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin\mid x-y\mid}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+y)}{y}$.

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

22. Dokážte, že funkcia $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ je nekonečne malá v bode $(0,0)$.

23. Vypočítajte dvojnásobné limity ($\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ a $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$):

a) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ v $x_0=0, y_0=0$.

b) $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ v $x_0=0, y_0=0$.

c) $f(x,y)=\dfrac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$ v $x_0=0, y_0=0$.

d) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$ v $x_0=\infty, y_0=\infty$.

24. Ukážte, že pre funkciu $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ platí:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0,$$

ale $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ neexistuje.

25. Ukážte, že $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4} = \lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$, ale $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$ neexistuje.
26. Zistite, či existujú dvojnásobné limity funkcii $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ v bode $(0,0)$.

1.5. Spojitosť funkcie n premenných

Definícia 1.5.1. *Nech $f: M\to R^1, M\subset R^n$. Hovoríme, že funkcie f je spojitá v bode $a\in M$, ak pre ľubovoľné okolie $O(f(a))$ bodu $f(a)$ existuje také okolie $O(a)$ bodu a, že $f[O(a)\cap M]\subset O(f(a))$.*

Poznámka 1.5.1. Ak v definícii 1.5.1. budeme predpokladať, že a je hromadným bodom množiny M, tak dostaneme nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.5.1. *Nech $f: M\to R^1, M\subset R^n$, nech a je hromadným bodom množiny M, $a\in M$ potom f je spojitá funkcia v bode a vtedy a len vtedy, ak $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje a platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.*

Definícia 1.5.2. *Body, v ktorých nie je funkcia f spojitá sa nazývajú body nespojitosti tejto funkcie.*

Definícia 1.5.3. *Prírastkom funkcie f v bode a nazývame funkciu $\triangle f = f(x)-f(a)$, $x\in M$. Nech $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ a $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, ak označíme $\triangle x_i = x_i - a_i$, $i=1,2,...,n$, tak $\triangle f$ môžeme napísať v tvare*

$$\triangle f = f(a_1+\triangle x_1, a_2+\triangle x_2, ..., a_n+\triangle x_n) - f(a_1,a_2,...,a_n).$$

Veta 1.5.2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a}\triangle f = 0.$

Spojitosť funkcie vzhľadom na jednotlivé premenné

Nech všetky premenné funkcie $f(x_1,x_2,...,x_3)$ okrem jednej sú pevné, napr. $x_i=a_i, i=\{1,2,...,k-1,k+1,...,n\}$ a x_k je premenná. Premennej x_k prislúcha prírastok $\triangle x_k$. Prírastok funkcie f v bode a prislúchajúci prírastku $\triangle x_k$ označíme takto:

$$\triangle_{x_k} f = f(a_1,a_2,...,a_{k-1},a_k+\triangle x_k, a_{k+1},...,a_n) - f(a_1,a_2,...,a_n).$$

Definícia 1.5.4. *Funkcia $f(x_1,x_2,...,x_n)$ sa nazýva spojitá v hromadnom bode $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ svojho definičného oboru f vzhľadom k premennej x_k, ak $\lim\limits_{\triangle x_k\to 0}\triangle_{x_k} f = 0$.*

Veta 1.5.3. *Ak je funkcia $f(x_1,x_2,...,x_n)$ definovaná v nejakom okolí bodu*

$a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ a je spojitá v bode a, potom je spojitá vzhľadom ku každej premennej zvlášť.

Poznámka 1.5.2. Vety o spojitosti súčtu, rozdielu, súčinu a podielu dvoch funkcii platia analogicky ako pre funkciu jednej premennej.

Definícia 1.5.5. *Nech funkcia $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ je definovaná na množine $M \subset R^n$. Nech $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k), i = 1, 2, ..., n$ je n funkcií k premenných, ktoré sú definované na množine $M_t \subset R^k$. Nech pre tieto funkcie platí, že pre bod $[\varphi_1(T), \varphi_2(T), ..., \varphi_n(T)] \in M$, ak $T = [t_1, t_2, ..., t_k] \in M_t$. Potom môžeme na množine M definovať funkciu F k premenných tak, že pre každý bod $T = [t_1, t_2, ..., t_k] \in M_t$ je*

$F(T) = f(\varphi_1(T), \varphi_2(T), ..., \varphi_n(T))$. Táto funkcia sa nazýva zložená funkcia.

Veta 1.5.4. *Nech funkcie $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k)$ pre $i = 1, 2, ..., n$ sú spojité v bode*

$a = (a_1, a_2, ..., a_k)$ a funkcia $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ je spojitá v bode $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, kde

$b_i = \varphi_i(a_1, a_2, ..., a_k), i = 1, 2, ..., n$. Potom zložená funkcia

$f[\varphi_1(t_1, t_2, ..., t_k), ..., \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_k)]$ je spojitá v bode a.

Definícia 1.5.6. *Funkcia $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sa nazýva spojitá na množine M, ak je spojitá v každom bode množiny M.*

Definícia 1.5.7. *Funkcia $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sa nazýva rovnomerne spojitá na množine M práve vtedy, ak $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in M$, ktoré vyhovujú nerovnosti $\varrho(x^{(1)}, x^{(2)}) < \delta$ platí $\mid f(x^{(1)}) - f(x^{(2)}) \mid < \varepsilon$.*

Veta 1.5.5. *Funkcia spojitá na uzavretej ohraničenej množine $M \subset R^n$ má tieto vlastnosti:*

1. *f je ohraničená na množine M.*
2. *f má na množine M maximum a minimum.*
3. *f je na množine M rovnomerne spojitá.*

Nájdite body nespojitosti funkcií:

27. $f(x, y) = \frac{x-y}{x^3-y^3}$.

28. $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

29. $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

30. $f(x, y) = \sin \frac{x}{y}$.

31. $f(x, y) = \frac{\sin x . \sin y}{xy}$.

32. $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

33. $f(x, y, z) = \frac{2y}{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}$.

34. Dokážte, že funkcia $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ je spojitá v bode $(0, 0)$ vzhľadom na každú premennú zvlášť, ale nie je spojitá vzhľadom k obidvom premenným.

35. Zistite, či je funkcia $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$ v bode $(0,0)$ a v bode $(1,0)$ spojitá vzhľadom na každú premennú zvlášť a spojitá v týchto bodoch vzhľadom k obidvom premenným.

36. Pre akú hodnotu c je funkcia

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 3x+4y-2z+5, & x \neq 0, y \neq 1, z \neq 2 \\ c, & x = 0, y = 1, z = 2 \end{cases}$$

v bode $(0,1,2)$ spojitá ?

37. Dokážte, že ak je na množine M funkcia $f(x,y)$ spojitá vzhľadom na každú premennú zvlášť a monotónna vzhľadom na jednu z premenných, potom je funkcia $f(x,y)$ spojitá na množine M.

38. Dokážte, že ak na množine M je funkcia $f(x,y)$ spojitá vzhľadom na premennú x a spĺňa Lipschitzovu podmienku vzhľadom na y t.j. $\mid f(x,y_1) - f(x,y_2) \mid \leq L. \mid y_1 - y_2 \mid$, pričom $(x,y_1),(x,y_2) \in M$ a L je konštanta, potom je funkcia $f(x,y)$ spojitá na množine M.

Dokážte, že nasledujúce funkcie sú ohraničené na daných množinách a nájdite ich maximum a minimum, ak existujú:

39. $f(x,y) = \frac{x^6+y^6}{x^2+y^2}, M = \{(x,y) \in R^2 :) < x^2+y^2 \leq 9\}$.

40. $f(x,y) = xye^{-xy}, M = \{(x,y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq)\}$.

41. Dokážte, že funkcia $f(x,y) = x+2y+3$ je rovnomerne spojitá v celej rovine R^2.

42. Ako treba zmeniť definíciu funkcie $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, aby bola rovnomerne spojitá na množine $M = \{(x,y) \in R^2 : 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$?

43. Zistite, či funkcia $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y}$ je rovnomerne spojitá na svojom obore definície.

Zistite, či nasledujúce funkcie sú rovnomerne spojité na uvedených množinách:

44. $f(x,y) = \sin \frac{\pi}{1-x^2-y^2}, M = \{(x,y) \in R^2, x^2+y^2 < 1\}$.

45. $f(x,y) = x^2+y^2, M = \{(x,y) \in R^2, x^2+y^2 \leq 1\}$.

46. $f(x,y) = x^3-y^3, M = \{(x,y) \in R^2, 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

47. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, M = R^2$.