2. Parciálne derivácie. Diferenciál funkcie

2.1. Parciálne derivácie

Definícia 2.1.1. *Nech reálna funkcia $f : G \to R$ je definovaná na množine $G \subset R^n$ a $a = (a_1, ..., a_n)$ je vnútorným bod tejto množiny. Ak existuje*

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{x_k - a_k}$$

hovoríme, že funkcia f má v bode a parciálnu deriváciu podľa premennej x_k a označujeme ju jedným zo symbolov $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a),\ f'_{x_k}(a),\ f_{x_k}(a),\ f_k(a)$.

Ak označíme $\triangle x_k = x_k - a_k$, potom

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{\triangle x_k \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{k-1}, a_k + \triangle x_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{\triangle x_k},\ k = 1, 2, ..., n.$$

Parciálnou deriváciou funkcie $f(x)$ podľa premennej x_k rozumieme takú funkciu $F(x)$, ktorej definičným oborom bude množina všetkých bodov, v ktorých má funkcia $f(x)$ parciálnu deriváciu podľa x_k a ktorej hodnota sa v každom bode jej definičného oboru rovná parciálnej derivácii funkcie $f(x)$ podľa x_k v tomto bode. Pre parciálnu deriváciu funkcie $f(x)$ podľa premennej x_k nepoužívame $F(x)$, ale zaužívané je označovať ju symbolom $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, alebo $f'_{x_k}(x)$, alebo len $f_{x_k}(x)$.

Geometrický význam parciálnych derivácií funkcie dvoch premenných. Nech je daná funkcia $z = f(x, y), (x, y) \in G \subset R^2$. Jej grafom je plocha v R^3. Uvažujme bod $(x_0, y_0, z_0), z_0 = f(x_0, y_0)$, na tejto ploche. Podľa definície $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, ak táto existuje. Grafom funkcie $g(x) = f(x, y_0)$ je krivka, ktorá prechádza bodom (x_0, y_0, z_0) a je rezom plochy $z = f(x, y)$ rovinou $y = y_0$. Potom $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ je smernica dotyčnice ku krivke $g(x) = f(x, y_0)$ v bode (x_0, y_0, z_0). Podobne $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ je smernica dotyčnice ku krivke $h(x) = f(x_0, y)$, ktorá je rezom danej plochy rovinou $x = x_0$ v bode (x_0, y_0, z_0).

Pri počítaní parciálnych derivácií danej funkcie $f(x)$ n premenných postupujeme tak ako v prípade funkcie jednej premennej. Totiž pri počítaní parciálnej derivácie funkcie $f(x_1, \ldots, x_n)$ podľa premennej napr. x_k považujeme túto funkciu len za funkciu x_k. Ostatné premenné považujeme za konštanty.

48. Nájdite parciálne derivácie podľa x a y:

a) $z = e^x \cos(xy)$

b) $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2 + 1}$

c) $z = \ln \sqrt{2x^2 + y^2}$

d) $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

e) $z = e^{(x+y)^2}$

f) $z = \sin(x+y)\cos(x-y)$

g) $z = \left(x^2 y + y\right)^4$

h) $z = y\mathrm{tg}\,(xy)$

i) $z = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$

j) $z = \ln \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

h) $z = xye^{xy}$

l) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$

m) $z = \ln(x^2+y^2)$

n) $z = \ln \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{y}$

o) $z = x^y$

p) $z = \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

49. Nájdite parciálne derivácie podľa x, y a z:

a) $u = x^3 y z^2$

b) $u = \left(ax^2 + by^2 + cz^2\right)^n$

c) $u = \arcsin \dfrac{xy}{z}$

d) $u = e^{x^2+y^2+z^2}$

e) $u = \cos(xy).\mathrm{arctg}\,(xz)$

f) $u = z \ln \dfrac{y}{x}$

g) $u = e^{xyz} \sin x \cos y$

h) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$

i) $u = x^{y/z}$.

50. Napíšte rovnicu dotyčnice ku krivke, ktorá je rezom eliptického paraboloidu $z = x^2 + 2y^2$:

a) rovinou $y = 2$ v bode $A = (3, 2, 17)$

b) rovinou $x = 3$ v bode $A = (3, 2, 17)$.

51. Napíšte rovnicu dotyčnice ku krivke, ktorá je rezom plochy $z = \left(x^2 - 3y^2\right)^2$:

a) rovinou $x = 2$ v bode $A = (2, 1, 1)$

b) rovinou $y = 1$ v bode $A = (2, 1, 1)$.

2.2. A. Diferencovateľnosť funkcie n premenných

Definícia 2.2.1. *Funkcia $f : G \to R$ definovaná na množine $G \subset R^n$ sa nazýva diferencovateľná v bode $a = (a_1, ..., a_2) \in G$, ktorý je hromadným bodom množiny G, ak existujú také čísla $A_1, ..., A_n$ a funkcia $\omega(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \omega(x) = \omega(a) = 0$ tak, že pre každý bod $x = (x_1, ..., x_n)$ z istého okolia bodu a platí*

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - a_i) + \omega(x)\varrho(x, a), \tag{1}$$

kde $\varrho(x,a) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2\right)^{1/2}$.

Podmienku diferencovateľnosti (1) v bode a možno ešte zapísať v nasledujúcich tvaroch:

$$\text{a) } f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - a_i) + o(\varrho), \tag{1'}$$

kde $o(\varrho)$ je taká funkcia, že $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o(\varrho)}{\varrho(x,a)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^{n} A_i(x_i - a_i)}{\varrho(x,a)} = 0.$

$$\text{b) } f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)(x_i - a_i), \tag{1''}$$

kde funkcie $\omega_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ sú také, že $\lim\limits_{x\to a} \omega_i(x) = \omega_i(a) = 0$.

Ak vektor $\vec{h} = (h_1, ..., h_2)$ má zložky $h_i = x_i - a_i,\ i = 1, 2, ..., n$, tak podmienku diferencovateľnosti (1′) možno zapísať v tvare

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + o(h), \text{pričom}$$

$$\lim_{\|h\|_{R^n}\to 0} \frac{|\ o(h)\ |}{\|h_{R^n}\|} = 0, \text{ kde } \|h\|_{R^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}.$$

Definícia 2.2.2. *Lineárna funkcia, ktorá vektoru* $\vec{h} = (h_1, ..., h_n)$ *priradí hodnotu* $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i h_i$ *sa nazýva totálny diferenciál funkcie* f *v bode* a*. Označujeme ho* $df(a)$ *alebo* $df(a, x)$*.*

Poznámka 2.2.1. Často sa tiež vraciame k pôvodným premenným, teda miesto h_i píšeme $x_i - a_i,\ i = 1, 2, ..., n$.

Veta 2.2.1. *(Nutné podmienky diferencovateľnosti.) Ak je funkcia* $f(x)$ *diferencovateľná v bode* a*, potom*

1. *je funkcia* $f(x)$ *spojitá v bode* a*;*
2. *funkcia* $f(x)$ *má parciálne derivácie* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ *a platí* $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),\ i = 1, 2, ..., n$.

Veta 2.2.2. *(Postačujúca podmienka diferencovateľnosti.) Ak má funkcia* $f(x)$ n *premenných v nejakom okolí bodu* a *parciálne derivácie podľa všetkých premenných, ktoré sú spojité v bode* a*, potom je funkcia* $f(x)$ *diferencovateľná v bode* a*.*

Poznámka 2.2.2. Ak funkcia $f(x)$ je diferencovateľná v bode a, potom jej totálny diferenciál v bode a

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i, \tag{2}$$

kde dx_i je diferenciál funkcie $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ v bode a. Výrazy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ sa nazývajú parciálne diferenciály.

Poznámka 2.2.3. Zápis $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx_i$ je tiež bežný na označenie diferenciálu v ľubovoľnom bode x.

B. Diferencovateľnosť vektorovej funkcie n premenných

Nech funkcia $f : G \to R^m$ je definovaná v oblasti $G \subset R^n$. Ak si zvolíme bázy v R^n a R^m, tak vektorovú funkciu $y = f(x)$ môžeme vyjadriť pomocou m skalárnych funkcií n premenných:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad . \\ y_m &= f_m(x) = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Definícia 2.2.3. *Funkcia $f : G \to R^m$ definovaná v oblasti $G \subset R^n$, sa nazýva diferencovateľná v bode $a \in G$, ak*

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + o(h),$$

kde $f'(a) : R^n \to R^m$ je lineárne zobrazenie a

$$\lim_{\|h\|_{R^n} \to 0} \frac{\|o(h)\|_{R^m}}{\|h\|_{R^n}} = 0,$$

pričom $\|o(h)\|_{R^m} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} (o_i(h))^2},\ \|h\|_{R^n} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i^2}.$

Výraz $f'(a)h$ sa nazýva diferenciál vektorovej funkcie f v bode a a označujeme ho $df(a)$; $f'(a)$ sa nazýva derivácia funkcie f v bode a.

Lineárne zobrazenie $f'(a)$ v kanonickej báze má maticu

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix},$$

ktorá sa nazýva Jacobiho matica.

Ak $n = m$, determinant tejto matice sa nazýva jakobián zobrazenia $f : R^m \to R^m$ a označujeme ho symbolom $D_f(x_1, \dots, x_m)$ alebo $\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}$.

2.3. Parciálne derivácie vyšších rádov. Diferenciály vyšších rádov

Definícia 2.3.1. *Ak parciálna derivácia* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *funkcie* $f(x)$ n *premenných je definovaná v okolí bodu* $a = (a_1, \dots, a_n)$ *a má parciálnu deriváciu podľa premennej* x_j *v bode* a*, hovoríme, že funkcia* $f(x)$ *má 2. parciálnu deriváciu podľa premenných* x_i *a* x_j *v bode* a*. Označujeme ju jedným zo symbolov* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), f''_{x_i x_j}(a), f_{x_i x_j}(a)$*. Teda*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right]_a = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Pritom, ak $i \neq j$*, táto parciálna derivácia sa nazýva zmiešaná. V prípade, že* $i = j$*, 2. parciálnu deriváciu označujeme jedným zo symbolov* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a),\ f''_{x_i^2}(a),\ f_{x_i^2}(a)$*.*

Všeobecne: parciálne derivácie parciálnych derivácií rádu $k-1$ nazývame deriváciami k - teho rádu. Označujeme ich $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}},\ i_k = 1, 2, \dots, n$.

Definícia 2.3.2. *Hovoríme, že funkcia* $f(x)$ *je* k*-krát diferencovateľná v bode* a*, ak v bode* a *sú diferencovateľné všetky parciálne derivácie funkcie* $f(x)$ *rádu* $(k-1)$*-ého a ak všetky parciálne derivácie tejto funkcie, ktoré sú rádu nižšieho ako* $k-1$*, sú diferencovateľné v istom okolí bodu* a*.*

Ak funkcia $f(x)$ je k-krát diferencovateľná v bode a, potom výraz

$$d^k(a,x) = \left[dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k f(a) \tag{3}$$

nazývame k-tym diferenciálom alebo diferenciálom rádu k funkcie $f(x)$ v bode a.

Pritom tento symbolický vzorec rozumieme tak, že použijeme vzorec pre k -tu mocninu výrazu v zátvorke a potom namiesto mocnín znakov $\frac{\partial}{\partial x_i}$ berieme parciálne derivácie funkcie $f(x)$ v bode a takého rádu, aká je mocnina, a mocniny dx_i zostávajú mocninami.

Nech $G \subset R^n$ je oblasť. Budeme hovoriť, že funkcia f patrí do triedy $C^{(k)}(G; R)$, alebo $C^{(k)}(G)$, ak sú všetky jej parciálne derivácie až do rádu k včítane definované a spojité v oblasti G.

Veta 2.3.1. *Ak* $f \in C^{(k)}(G; R)$*, potom parciálna derivácia* $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x)$ *rádu* k *v bode* $x \in G$ *nezávisí od poradia* $i_1, \dots, i_k$ *derivovania, t.j. zostáva tá istá pre ľubovoľnú permutáciu indexov* $i_1, \dots, i_k$ $(i_k = 1, \dots, n)$*.*

2.4. Parciálne derivácie zložených funkcií

Veta 2.4.1. *Nech funkcie* $t_i = \varphi(x_1, \dots, x_n),\ i = 1, \dots, m$ *sú diferencovateľné v bode* $a = (a_1, \dots, a_n)$*. Nech* $\varphi_i(a) = b_i,\ i = 1, \dots, m$*. Nech funkcia* $f(t_1, \dots, t_m)$ *je diferencovateľná* *v bode* $b = (b_1, \ldots, b_m)$*. Potom je v bode* a *deferencovateľná aj funkcia* $u(x_1, \ldots, x_m) = f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n))$ *a pre jej diferenciál a derivácie v bode* a *platí:*

$$du(a, x) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial t_i}(b)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(a),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi_1(a), \ldots, \varphi_m(a)) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial t_i}(b)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(a),\ k = 1, \ldots, n.$$

Z posledného vzorca za predpokladu diferencovateľnosti funkcie $f(t),\ t = (t_1, \ldots, t_m)$ a funkcií $\varphi_i(x),\ i = 1, \ldots, m,\ x = (x_1, \ldots, x_n)$, dostaneme vzorec pre parciálne derivácie zloženej funkcie $u(x) = f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial t_i}(t_1, \ldots, t_m)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x),\ k = 1, \ldots, n,$$

kam treba do derivácií $\frac{\partial f}{\partial t_i}(t_1, \ldots, t_m),\ i = 1, \ldots, m$, dosadiť $\varphi_i(x)$ za t_i.

Definícia 2.4.1. *Funkcia* $f(x)$ *definovaná v oblasti* $G \subset R^n$ *sa nazýva homogénna funkcia stupňa* p *v oblasti* G*, ak pre každý bod* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$ *a pre každé číslo* t*, pre ktoré bod* $(tx_1, \ldots, tx_n) \in G$*, platí rovnosť* $f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^p f(x_1, \ldots, x_n)$*.*

Eulerova veta. *Ak je* $f(x)$ *v nejakej oblasti* $G \subset R^n$ *diferencovateľná a homogénna funkcia stupňa* p*, potom v každom bode* $x \in G$ *platí*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)x_i = pf(x).$$

Poznámka 2.4.1. Výhoda zápisu totálneho diferenciálu vo tvare (2) spočíva v tom, že vzhľadom na vetu 2.4.1. o derivovaní zloženej funkcie sa tento tvar zachováva aj vtedy, keď $x_1, \ldots, x_n$ sú funkcie iných nezávislých premenných $y_1, \ldots, y_m$. V tomto prípade symbol dx_i už neznamená prírastok $\triangle x_i = x_i - a_i$, ale diferenciál funkcie x_i. Túto vlastnosť 1. diferenciálu obyčajne nazývajú vlastnosťou invariantnosti jeho tvaru.

Veta 2.4.2. *Nech* u *a* v *sú diferencovateľné funkcie viacerých premenných. Potom platí*

$$\begin{aligned} &d(cu) = cdu,\ c = \text{konštanta} \\ &d(u \pm v) = du \pm dv \\ &d(u.v) = udv + vdu \\ &d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0, \end{aligned}$$

pričom tieto vzorce platia aj v prípade, keď u *a* v *sú diferencovateľné funkcie nejakých premenných.*

2.5. Derivácia v smere. Gradient funkcie

Nech $G \subset R^3$ je oblasť a $f : G \to R$. Nech $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$ a nech $\vec{l}$ je jednotkový vektor so začiatkom v bode M_0. Súradnice vektora $\vec{l}$ sú $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ ($\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sú uhly, ktoré zviera vektor $\vec{l}$ so súradnicovými osami). Nech $t > 0$ je skalár a $t\vec{l} \in G$. Prírastok funkcie f v bode M_0 v smere vektora $\vec{l}$ je $(M_0 + t\vec{l}) - f(M_0)$.

Definícia 2.5.1. *Ak existuje* $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(M_0 + t\vec{l}) - f(M_0)}{t}$, *hovoríme, že funkcia f má deriváciu v bode M_0 v smere $\vec{l}$ a označujeme ju $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$ (alebo $D_{\vec{l}} f(M_0)$).*

Veta 2.5.1. *Ak je funkcia $f(x, y, z)$ diferencovateľná v bode $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, potom*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma.$$

Definícia 2.5.2. *Vektor* $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0}$ *sa nazýva gradient funkcie f v bode M_0. Označujeme ho* grad $f(M_0)$ *(alebo* f̧(M_0)*).*

Zo vzťahu uvedenom vo vete 2.5.1. vyplýva, že

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = (\text{grad } f(M_0), \vec{l}). \tag{4}$$

Gradient funkcie f v bode M_0 charakterizuje smer a veľkosť maximálneho rastu tejto funkcie v bode M_0. Teda:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)\right]_{\max} = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]^2}.$$

Poznámka 2.5.1. Vektor grad $f(M_0)$ je ortogonálny na vrstevnicu grafu funkcie $f(x, y, z)$, ktorá prechádza bodom M_0.

Poznámka 2.5.2. Ak funkcia $f(x), x = (x_1, \ldots, x_n), n$ premenných je diferencovateľná v bode $M_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ a jednotkový vektor $\vec{l} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$, potom

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)\cos\alpha_i.$$

52. Predpokladajúc, že x, y sú v absolútnej hodnote malé, odvoďte približné vzorce pre výrazy:

a) $(1+x)^m(1+y)^m$; b) $\operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1+xy}$.

53. Nájdite hodnoty 1. diferenciálu funkcie u v bode M_0 v danom vektore $\vec{h}$, ak

a) $u = \arcsin xy,\ M_0 = (\frac{1}{2}, 1),\ \vec{h} = (0,5; 0,1)$; b) $u = x^3y - xy^2,\ M_0 = (1,2),\ \vec{h} = (-0,5; 0,8)$;

c) $u = x^{2y},\ M_0 = (4,1),\ \vec{h} = (0,1; 0,2)$; d) $u = \sqrt[3]{4x^2+y^2},\ M_0 = (1,2),\ \vec{h} = (-0,2; 0,3)$;

e) $u = x\sqrt{1+y^3},\ M_0 = (2,2),\ \vec{h} = (0,1; 0)$.

54. Zameňte prírastok funkcie jej diferenciálom a približne vypočítajte:

a) $1,002.2,003^3.3,004^3$ b) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$

c) $\sin 29°\mathrm{tg}\ 46°$ d) $0,97^{1,05}$.

55. Nájdite $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$, ak $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Je táto funkcia diferencovateľná v bode $(0,0)$?

56. Zistite, či je diferencovateľná v bode $(0,0)$ funkcia $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

57. Ukážte, že funkcia

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2},\ \text{ak } x^2+y^2 \neq 0 \text{ a } f(0,0) = 0,$$

má v okolí bodu $(0,0)$ parciálne derivácie $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$, ktoré nie sú spojité v bode $(0,0)$ a sú neohraničené v ľubovoľnom okolí tohto bodu; avšak táto funkcia je diferencovateľná v bode $(0,0)$.

58. Dokážte, že funkcia $f(x,y)$, ktorá má ohraničené parciálne derivácie $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$ na nejakej konvexnej oblasti E, je rovnomerne spojitá.

59. Dokážte, že ak funkcia $f(x,y)$ definovaná na oblasti $G \subset R^2$ je spojitá vzhľadom na premennú x pre každú hotnotu y a má ohraničenú deriváciu $f'_y(x,y)$, potom táto funkcia je spojitá vzhľadom na obidve premenné v oblasti G.

60. Určte deriváciu zobrazenia φ (t.j. Jacobiho maticu), ak

a) $\varphi : (u,v) \to (x,y,z);\ x = uv,\ y = u^2+v^2,\ z = u^2 - v^2$;

b) $\varphi : (u,v) \to (x,y);\ x = u\cos v,\ y = u\sin v$;

c) $\varphi : (u,v) \to x;\ x = \dfrac{u}{v}$;

d) $\varphi : u \to (x,y);\ x = u\mathrm{tg}\ u,\ y = u\sin u$;

f) $\varphi : (u, v, w) \to (x, y);\ x = u^2 + v^2 + w^2,\ y = u + v + w.$

61. Nájdite jakobián zobrazenia $f : R^n \to R^n$:

a) $f : x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;\ f : (r, \varphi) \to (x, y);$

b) $f : u = \dfrac{z}{x^2 + y^2},\ v = xy,\ w = \dfrac{y}{x};\ f : (x, y, z) \to (u, v, w);$

c) $f : x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi;\ f : (r, \varphi, \psi) \to (x, y, z);$

d) $f : u = xy,\ v = \dfrac{y}{x};\ f : (x, y) \to (u, v);$

e) $f : x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = u^2;\ f : (r, \varphi, u) \to (x, y, z).$

62. Nájdite parciálne derivácie 1. a 2. rádu nasledujúcich funkcií:

a) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$

b) $u = \dfrac{\cos x^2}{y};$

c) $u = \dfrac{\operatorname{tg} x^2}{y};$

d) $u = x^y;$

e) $u = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy};$

f) $u = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$

g) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$

h) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z;$

i) $u = x^{y/z}.$

63. Overte rovnosť

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

ak

a) $u = x^2 - xy - 3y^2;$

b) $u = x^{y^2};$

c) $u = \arccos \sqrt{\dfrac{x}{y}}.$

Nájdite parciálne derivácie uvedeného rádu:

64. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, ak $u = x\ln(xy)$.

65. $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, ak $u = \dfrac{x + y}{x - y}$.

66. $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, ak $u = (x - x_0)^p (y - y_0)^q$.

67. $\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, ak $u = xyze^{x+y+z}$.

68. $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)$, ak $f(x,y) = e^x \sin y$.

69. Nech $Au = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Nájdite Au a $A^2u = A(Au)$, ak

a) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; b) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

70. Nech

$$\triangle_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$\triangle_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Nájdite $\triangle_1 u$ a $\triangle_2 u$, ak:

a) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; b) $u = x^3+y^3+z^3-3xyz$.

71. Nech $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, ak $x^2+y^2 \neq 0$ a $f(0,0) = 0$. Ukážte, že funkcia $f(x,y)$ je spojitá v bode $(0,0)$ a $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

72. Nájdite diferenciály 1. a 2. rádu funkcií:

a) $u = x^m y^n$; b) $u = \sqrt{x^2+y^2}$;

c) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; d) $u = xy+yz+zx$;

e) $u = \dfrac{z}{x^2+y^2}$.

73. Nájdite $df(1,1,1)$ a $d^2f(1,1,1)$, ak $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/z}$.

74. Ukážte, že pre funkciu $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ platí: $d^2u \geq 0$.

75. Ukážte, že funkcia $u = \ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ (a, b sú konštanty) vyhovuje Laplaceovej rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

76. Nech $u = f(r)$ je dvakrát diferencovateľná funkcia a $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Nájdite funkciu $F(r)$, pre ktorú platí:

$$\triangle u = F(r),$$

kde $\triangle u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ je Laplaceov operátor.

77. Zjednodušte výraz

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y},$$

ak $z = \sin y + f(\sin x - \sin y)$, kde f je diferencovateľná funkcia $\left(\sec u = \dfrac{1}{\cos u}\right)$.

78. Ukážte, že funkcia

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right),$$

kde f je diferencovateľná funkcia, spĺňa rovnicu

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

79. Ukážte, že funkcia

$$z = yf(x^2 - y^2),$$

kde f je ľubovoľná diferencovateľná funkcia, spĺňa rovnicu

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

80. Predpokladajúc, že funkcie φ, ψ atď. sú diferencovateľné toľkokrát, koľko potrebujeme, overte nasledujúce rovnosti:

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ak $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$;

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, ak $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$;

c) $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u,$ ak $u = x^n \varphi\left(\dfrac{y}{z}\right) + x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

d) $\dfrac{\partial u}{\partial x} . \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} . \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ak $u = \varphi[x + \psi(y)]$.

81. Nájdite diferenciály 1. a 2. rádu nasledujúcich zložených funkcií u, ak f je dvakrát diferencovateľná funkcia:

a) $u = f(\xi, \eta)$, kde $\xi = xy,\ \eta = \dfrac{x}{y}$;

b) $u = f(x, y, z)$, kde $x = t, y = t^2, z = t^3$;

c) $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, kde $\xi = x^2 + y^2,\ \eta = x^2 - y^2,\ \zeta = 2xy$;

d) $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$;

e) $u = f(2x, 3y, 4z)$;

f) $u = f(xy, x - y, x + y)$.

82. Nájdite $d^n u$, ak f je n - krát diferencovateľná:

a) $u = f(ax + by + cz)$; b) $u = f(ax, by, cz)$;

c) $u = f(t, v, w)$, kde $\xi = a_1x + b_1y + c_1z,\ \eta = a_2x + b_2y + c_2z,\ \zeta = a_3x + b_3y + c_3z$.

83. Nech $u = f(x, y, z)$ je homogénna funkcia stupňa n. Overte Eulerovu vetu pre tieto homogénne funkcie:

a) $u = (x - 2y + 3z)^2$; b) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; c) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{y/z}$.

84. Dokážte, že ak diferencovateľná funkcia $u = f(x, y, z)$ spĺňa rovnicu

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

potom u je homogénna funkcia stupňa n.

85. Dokážte, že ak $f(x, y, z)$ je diferencovateľná homogénna funkcia stupňa n, tak jej derivácie $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$ a $f'_z(x, y, z)$ sú homogénne funkcie stupňa $n - 1$.

86. Nájdite deriváciu funkcie

$$z = x^2 - y^2$$

v bode $M = (1, 1)$ v smere $\vec{l}$, ktorý zviera uhol $\alpha = 60°$ s kladným smerom osi x - ovej.

87. Nájdite deriváciu funkcie

$$z = x^2 - xy + y^2$$

v bode $M = (1, 1)$ v smere $\vec{l}$, ktorý zviera uhol α s kladným smerom osi x - ovej. V akom smere má táto derivácia: a) najväčšiu hodnotu; b) najmenšiu hodnotu; c) rovnú 0.

88. Nájdite deriváciu funkcie

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

v bode $M = (x_0, y_0)$ v smere kolmom na vrstevnicu prechádzajúcu týmto bodom.

89. Nájdite deriváciu funkcie

$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

v bode $M = \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ v smere vnútornej normály v tomto bode ku krivke

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

90. Nájdite deriváciu funkcie

$$u = xyz$$

v bode $M = (1,1,1)$ v smere $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Čomu sa rovná veľkosť gradienta funkcie v danom bode?

91. Vypočítajte veľkosť a smer gradienta funkcie

$$u = \frac{1}{r},$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, v bode $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

92. Určte uhol medzi gradientami funkcie

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

v bodoch $A = (\varepsilon, 0, 0)$ a $B = (0, \varepsilon, 0)$.

93. O koľko sa líši v bode $M = (1,2,2)$ veľkosť gradienta funkcie

$$u = x + y + z$$

od veľkosti gradienta funkcie

$$v = x + y + z + 0,001 \sin\left(10^6 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)?$$

94. Ukážte, že v bode $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ uhol medzi gradientami funkcií

$$\begin{aligned} u &= ax^2 + by^2 + cz^2, \\ v &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz \end{aligned}$$

$(a, b, c, m, n, p$ sú konštanty a $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ konverguje k 0, ak bod M_0 sa vzdiaľuje do nekonečna.

95. Nech funkcia $u = f(x, y, z)$ je dvakrát diferencovateľná. Nájdite $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \vec{l}^2} = \dfrac{\partial}{\partial \vec{l}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right)$, ak $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ sú smerové kosínusy smeru $\vec{l}$ derivovania.

96. Nech funkcia $u = u(x, y)$ spĺňa rovnicu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ a okrem toho, nasledujúce podmienky: $u(x, 2x) = x,\ u'_x(x, 2x) = x^2$. Nájdite $u''_{xx}(x, 2x),\ u''_{xy}(x, 2x),\ u''_{yy}(x, 2x)$.

97. Riešte rovnicu: $\dfrac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0$ s neznámou funkciou $z = z(x, y)$.

Poznámka. Pod riešením danej rovnice budeme rozumieť funkciu $z(x, y)$ z triedy $C^{(n)}(G; R)$ (t.j. $z(x, y)$ je spojitá spolu so svojimi parciálnymi deriváciami až do rádu n včítane v oblasti $G \subset R^2$), ktorá vyhovuje danej rovnici (a prípadne aj daným podmienkam).

98. Nájdite riešenie $z = z(x, y)$ rovnice $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, ktoré spĺňa podmienku $z(x, x^2) = 1$.

99. Nájdite riešenie $z = z(x, y)$ rovnice $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, ktoré vyhovuje podmienkam:
$z(x, 0) = 1,\ z'_y(x, 0) = x$.

100. Nájdite riešenie $z = z(x, y)$ rovnice $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, vyhovujúce podmienkam:
$z(x, 0) = x,\ z(0, y) = y^2$.