4. Pravidlo reťazenia.

Často sa stretávame so skupinami premenných, ktoré zložitým spôsobom závisia od iných skupín premenných. Pravidlo reťazenia pre funkcie viacerých premenných je univerzálna metóda, ktorá nám umožňuje prechádzať od jednej skupiny premenných k druhej. Základom tejto metódy je derivovanie zložených a implicitne daných funkcií. Pritom predpokladáme, že funkcie, ktoré vyjadrujú vzťahy medzi dvomi skupinami premenných, vyhovujú podmienkam dostatočnej hladkosti (t.j. majú spojité parciálne resp. obyčajné derivácie všetkých potrebných rádov) a všetky transformácie sa robia v takých oblastiach zmeny týchto premenných, že existujú inverzné funkcie k daným.

4.1. Transformácia výrazov, ktoré obsahujú obyčajné derivácie

V diferenciálnom výraze

$$A = \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right)$$

treba prejsť k novým premenným $t, u(t)$, (kde t je nezávislá premenná a u je funkcia t), pričom

$$x = f(t,u), y = g(t,u). \tag{1}$$

Derivovaním rovníc (1) podľa t, berúc do úvahy, že y je funkcia x a x je funkcia t, dostaneme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial u}.\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{du}{dt}}.$$

Analogicky postupne sa vyjadrujú derivácie vyšších rádov $\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dots$. Výsledok je

$$A = \Phi\left(t, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \dots\right).$$

4.2. Transformácie výrazov, ktoré obsahujú parciálne derivácie

Ak v diferenciálnom výraze

$$B = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots\right)$$

položíme

$$x = f(u,v),\ y = g(u,v), \tag{2}$$

kde u a v sú nové nezáviské premenné, potom postupne parciálne derivácie $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dots$ hľadáme z nasledujúcich rovníc

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial g}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial g}{\partial v},$$

ktoré dostaneme derivovaním funkcie $z = z(x,y) = z\left(f(u,v), g(u,v)\right)$ ako zloženej funkcie nových premenných u a v atď.

4.3. Transformácia nezáviských premenných a funkcie vo výraze, ktorý obsahuje parciálne derivácie

V obecnejšom prípade, ak sú dané rovnice

$$x = f(u,v,w),\ y = g(u,v,w),\ z = h(u,v,w), \tag{3}$$

kde u, v sú nové nezáviské premenné a $w = w(u,v)$ je nová funkcia, pre parciálne derivácie $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dots$ dostaneme nasledujúce rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial u}\right) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial v}$$

atď.

Tieto rovnice získame derivovaním tretej rovnice v (3) podľa u (resp. podľa v), pričom berieme do úvahy, že funkcia $z(x,y)$ je zložená funkcia nových premenných u a v, t.j. jedna jej vnútorná zložka je $x = f(u,v,w)$, druhá je $y = g(u,v,w)$, a že funkcie f, g a h sú tiež zložené funkcie u a v, lebo w je funkcia premenných u a v.

V niektorých prípadoch je užitočné používať totálny diferenciál.

Pomocou zavedenia nových premenných transformujte nasledujúce obyčajné diferenciálne rovnice:

121. $x^2y'' + xy' + y = 0$, ak $x = e^t$.

122. $y''' = \frac{6y}{x^3}$, ak $t = \ln \mid x \mid$.

123. $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$, ak $x = \cos t$.

124. $y'' + y'\operatorname{tgh} x + \dfrac{m^2}{\cosh^2 x} y = 0$, ak $x = \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}$.

Poznámka. Tu $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ je hyperbolický kosínus a $\operatorname{tgh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ je hyperbolický tangens.

125. $y'' + p(x)y' + g(x)y = 0$, ak $y = ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}$.

126. $x^4 y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, ak $x = e^t$ a $y = ue^{2t}$, kde $u = u(t)$.

127. $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, ak $x = u + t, y = u - t$, kde $u = u(t)$.

128. Transformujte Stokesovu rovnicu $y'' = \dfrac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}$, kladúc $u = \dfrac{y}{x-b}$, $t = \ln \left| \dfrac{x-a}{x-b} \right|$.

129. Dokážte, že Schwartzova derivácia $S[x(t)] = \dfrac{x'''(t)}{x'(t)} - \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$ nemení svoju hodnotu pri lineárnej lomenej transformácií $y = \dfrac{ax(t) + b}{cx(t) + d}$, $(ad - bc \neq 0)$.

Transformujte pomocou polárnych súradníc r a φ, pričom $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, nasledujúce rovnice (uvažujte, že r je funkcia φ):

130. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

131. $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$.

132. $(x^2 + y^2)^2 y'' = (x + yy')^3$.

133. Výraz $\dfrac{x + yy'}{xy' - y}$ vyjadrite v polárnych súradniciach.

Zavedením nových nezávislých premenných ξ a η rozriešte nasledujúce rovnice:

134. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, ak $\xi = x + y,\ \eta = x - y$.

135. $y\dfrac{\partial z}{\partial y} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, ak $\xi = x$ a $\eta = x^2 + y^2$.

136. $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ $(a \neq 0)$, ak $\xi = x$ a $\eta = y - bz$.

137. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, ak $\xi = x$ a $\eta = \dfrac{y}{x}$.

138. Transformujte výraz $w = x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}$ zavedením nových funkcii $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Berúc u a v za nové nezávislé premenné, transformujte nasledujúce rovnice:

139. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2}\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$, ak $u = \ln x,\ v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

140. $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, ak $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ a $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

141. $x\dfrac{\partial z}{\partial xl} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{2}$, ak $u = 2x - z^2,\ v = \dfrac{y}{z}$.

142. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, ak $u = x + 2y + 2,\ v = x - y - 1$.

143. $ax^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + cy^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (a, b, c sú konštanty), ak $u = \ln x,\ v = \ln y$.

144. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, ak $u = \dfrac{x}{x^2+y^2},\ v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

145. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a^2 z = 0$, ak $x = e^u\cos v,\ y = e^u\sin v$.

146. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, ak $u = x + y,\ v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

147. $xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, ak $u = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ a $v = xy$.

148. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x\sin y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \sin^2 y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, ak $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{2}$ a $v = x$.

149. Transformujte rovnice:
a) $\triangle u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;
b) $\triangle(\triangle u) = 0$, kladúc $u = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

150. V rovnici $z\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ zaveďte novú funkciu w, kladúc $w = z^2$.

151. Transformujte výraz $w = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, kladúc $x = uv,\ y = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$.

152. Transformujte rovnicu $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, kladúc x za funkciu a $u = y - z$, $v = y + z$.

153. Transformujte výraz $A = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, považujúc x za funkciu a $u = xz,\ v = yz$ za nezáviské premenné.

154. V rovnici $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$ položte $\xi=x,\ \eta=y-x,\ \zeta=z-x.$

Prejdite k novým premenným u,v,w, kde $w=w(u,v)$, v nasledujúcich rovniciach:

155. $u\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-z)z$, ak $u=x^2+y^2,\ v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\ w=\ln z-(x+y).$

156. $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$, ak $u=x,\ v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x},\ w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}.$

157. $\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\dfrac{\partial z}{\partial x}.\dfrac{\partial z}{\partial y}$, ak $x=ue^w,\ y=ve^w,\ z=we^w.$

158. V rovnici $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=u+\dfrac{xy}{z}$ položte $\xi=\dfrac{x}{z},\ \eta=\dfrac{y}{z},\ \zeta=z,\ w=\dfrac{u}{z}$, kde $w=w(\xi,\eta,\zeta).$

159. $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x}$, ak $u=\dfrac{x}{y},\ v=x,\ w=xz-y.$

160. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, ak $u=x+y,\ v=x-y,\ w=xy-z.$

161. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$, ak $u=\dfrac{x+y}{2},\ v=\dfrac{x-y}{2},\ w=ze^y.$

162. $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, ak $x=\sin u,\ y=\sin v,\ z=e^w.$

163. V rovnici $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ položte $x=e^\xi,\ y=e^\eta,\ z=e^\zeta,\ u=e^w$, kde $w=w(\xi,\eta,\zeta).$

Transformujte do polárnych súradníc r a φ, kde $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$, nasledujúce výrazy:

164. $w=x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}.$

165. $w=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

166. $w=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

167. $w=x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

168. $w=y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right).$

169. Vo výraze $I=\dfrac{\partial u}{\partial x}.\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}.\dfrac{\partial v}{\partial x}$ položte $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$

170. Transformujte výrazy:

$$\triangle_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \quad \text{a} \quad \triangle_2\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

pomocou sférických súradníc, pokladajúc $x = r \sin\theta \cos\varphi,\ y = r \sin\theta \sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$

171. Riešte rovnicu $\dfrac{\partial^2 u}{dt^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ zavedením nových nezávislých premenných $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.