6. Extrémy funkcie n premenných

6.1. Lokálne extrémy

Definícia 6.1.1. *Nech funkcia $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je definovaná v nejakom okolí bodu $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})$. Budeme hovoriť, že funkcia f má v bode $a^{(0)}$ lokálne maximum (minimum), ak existuje také okolie $O(a^{(0)})$ bodu $a^{(0)}$, v ktorom pre každé x platí $f(x) \leq f(a^{(0)})$ $(f(x) \geq f(a^{(0)}))$. Ak funkcia f má v bode $a^{(0)}$ lokálne maximum, alebo lokálne minimum, hovoríme, že má v bode $a^{(0)}$ lokálny extrém. Ak v definícii 6.1.1. platia ostré nerovnosti t.j. pre každé $x \neq a^{(0)}$ je $f(x) < f(a^{(0)})$ resp. $f(x) > f(a^{(0)})$, hovoríme o ostrých lokálnych extrémoch.*

Veta 6.1.1. *(Nutná podmienka existencie lokálneho extrému). Ak funkcia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má v bode $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})$ lokálny extrém a je v tomto bode diferencovateľná, potom $df(a^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a^{(0)})dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a^{(0)})dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a^{(0)})dx_n = 0.$*

Definícia 6.1.2. *Body, v ktorých sa prvý diferenciál rovná nule nazývame stacionárnymi bodmi tejto funkcie.*

Poznámka 6.1.1. Stacionárne body funkcie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nájdeme tak, že riešime systém rovníc s n neznámymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Poznámky o kvadratických formách

Funkcia tvaru $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, kde a_{ij} sú čísla, pričom $a_{ij} = a_{ji}$ sa nazýva kvadratická forma premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Čísla a_{ij} sú koeficienty kvadratickej formy.

Symetrická matica zostavená z týchto koeficientov

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sa nazýva matica kvadratickej formy.

$$\text{Determinanty } \delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ i = 1, 1, \ldots, n$$

sú hlavné minory matice A.

Kvadratická forma $Q(x)$ sa nazýva kladne definitná (záporne definitná), ak pre ľubovoľné $x \neq 0$ je $Q(x) > 0$ $(Q(x) < 0)$. Je zrejmé, že $Q(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Kvadratická forma $Q(x)$ sa nazýva semidefinitná, ak $Q(x) \geq 0$ $(Q(x) \leq 0)$.

Kvadratická forma je indefinitná, ak existujú $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ také, že $Q(x^{(1)}) > 0, Q(x^{(2)}) < 0$.

Sylvestrova veta.

1. *Kvadratická forma $Q(x)$ je kladne definitná práve vtedy, ak $\delta_i > 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.*
2. *Kvadratická forma $Q(x)$ je záporne definitná práve vtedy, ak $\delta_1 < 0,\ \delta_2 > 0,$*

$\delta_3 < 0,\ \ldots,\ (-1)^n \delta_n > 0.$

Druhý diferenciál funkcie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v bode $a^{(0)}$ možno zapísať v tvare

$$d^2 f(a^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a^{(0)}) dx_i dx_j.$$

Tento výraz je kvadratická forma premenných $dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_n$ a parciálne derivácie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a^{(0)})$ sú koeficienty tejto kvadratickej formy.

Veta 6.1.2. *(Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému.) Nech bod $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) \in M$ je stacionárny bod funkcie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a funkcie f je v bode $a^{(0)}$ dvakrát diferencovateľná. Potom platí:*

Ak $d^2 f(x, a^{(0)})$ je kladne definitná (záporne definitná) kvadratická forma pre každé $x \in M$, potom má funkcia f v bode $a^{(0)}$ ostré lokálne minimum (ostré lokálne maximum).

Ak $d^2 f(x, a^{(0)})$ je indefinitná kvadratická forma, potom funkcia f nemá v bode $a^{(0)}$ extrém.

Nech bod (x_0, y_0) je stacionárny bod funkcie $z = f(x, y)$ nech f je diferencovateľná v nejakom okolí bodu (x_0, y_0) a dvakrát diferencovateľná v bode (x_0, y_0). Označme $a_{11} = \frac{\partial^2 f}{l \partial x^2}(x_0, y_0),\ a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),\ a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$

Z vety 6.1.2. a zo Sylvestrovej vety pre kvadratické formy vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Veta 6.1.3.

1. *Ak $D = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$, potom v bode (x_0, y_0) má funkcia $z = f(x, y)$ lokálny extrém a to: a) lokálne minimum, ak $a_{11} > 0$; b) lokálne maximum, ak $a_{11} < 0$.*
2. *Ak $D < 0$, potom v bode (x_0, y_0) nemá funkcia $z = f(x, y)$ lokálny extrém.*

196. Napíšte maticu kvadratickej formy

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1 x_2 + 6x_1 x_3 - x_2^2 - 2x_1 x_3 + 3x_2^2$$

a vypočítajte jej hlavné minory.

197. Zistite, či kvadratická forma

$$Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_x^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2$$

je kladne definitná, alebo záporne definitná.

V nasledujúcich príkladoch nájdite lokálne extrémy daných funkcií:

198. $z = x^2 - 2xy + 4y^3$.

199. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

200. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

201. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

202. $z = x^2y^3(6 - x - y)$.

203. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y},\ x > 0,\ y > 0$.

204. $z = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}},\ a > 0,\ b > 0$.

205. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

206. $z = x + y + 4\sin x \sin y$.

207. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

208. $z = xy\ln(x^2 + y^2)$.

209. $x^2y + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1$.

210. $z = xy^2(4 - x - y)$.

211. $u = 6x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 2yz + 2xz + 2x - 2y + 4z + 4$.

212. $u = x^2 + y^2 + z^3 + xy - x + y - 3z + 4$.

213. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

214. $u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$.

215. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

216. $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.

217. $u = (x + y + 2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

218. $u = 2\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$.

219. $u = xyz(1 - x - y - z)$.

Nájdite lokálne extrémy funkcie $y = f(x)$ danej implicitne:

220. $y^2 - ay - \sin x = 0,\ 0 \leq x \leq 2\pi$.

221. $x^2 + xy + y^2 = 27$.

222.$(y - x)^3 + x + 6 = 0$.

Nájdite lokálne extrémy funkcie $z = f(x, y)$ danej implicitne:

223. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0$.

224. $x^4 + y^4 + z^4 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$.

225. $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$.

6.2. Viazané lokálne extrémy

Nech f je funkcia definovaná na množine M rovnicou

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Označme N množinu všetkých bodov $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ktorých súradnice spĺňajú rovnice

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

kde $g_1, g_2, \ldots, g_m$ sú funkcie n premenných.

Definícia 6.2.1. *Lokálne extrémy funkcie f na množine N sa nazývajú viazané lokálne extrémy funkcie f. Rovnice (2), ktoré určujú množinu N nazývame väzbami.*

Predpokladajme, že funkcia f a funkcie $g_1, g_2, \ldots, g_m$ majú spojité parciálne derivácie druhého rádu v uvažovaných bodoch. Môže sa stať, že z rovníc (2), ktoré určujú množinu N sa dajú niektoré premenné vyjadriť v závislosti od ostatných. Nech napríklad k premenných (nezáleží na poradí) sa dá vyjadriť z rovníc (2) pomocou ostatných

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)\\ x_2 &= \varphi_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_k &= \varphi_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{3}$$

Ak do vzťahu (1) dosadíme za $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vzťahy (3) dostaneme rovnicu

$$\begin{aligned} z &= f\big[\varphi_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \varphi_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \ldots\\ &\quad \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\big]\\ &= F(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

ktorá je vyjadrením parciálnej funkcie z funkcie f na množinu N. Táto funkcia F je funkcia $n-k$ premenných. Jej lokálne extrémy sú zároveň viazané lokálne extrémy funkcie f pri väzbách (2). Lokálne extrémy nájdeme metódou uvedenou v odseku 6.1.

Ak z rovníc (2) sa nedajú jednoznačne vyjadriť niektoré premenné pomocou ostatných, použijeme Lagrangeovu metódu na hľadanie viazaných lokálnych extrémov funkcie (1) pri väzbách (2). Lagrangeova metóda spočíva v tom, že nájdeme lokálne extrémy funkcie

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) =& f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) +\\ & \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sú čísla určené tak, aby riešením systému rovníc

$$\begin{aligned} \Phi'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\\ \Phi'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \Phi'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

bola taká n - tica čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ktorá je aj riešením systému (2). Bod $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})$ je potom stacionárnym bodom funkcie Φ (pri vhodných číslach λ_i). Na určenie čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ a súradníc $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stacionárneho bodu máme teda systém $n+m$ rovníc, ktorý sa skladá z rovníc systému (4) a systému (2).

Veta 6.2.1. *Ak Lagrangeova funkcia Φ má lokálny extrém (maximum, minimum) v bode $a^{(0)}$ a $a^{(0)} \in N$, potom funkcia f má v $a^{(0)}$ viazaný lokálny extrém (maximum,minimum) pri väzbách (2).*

Nájdite viazané lokálne extrémy funkcií:

226. $z(x,y) = x^2 + y^2,\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1.$

227. $z(x,y) = x + y,\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}.$

228. $z(x,y) = xy,\ x^2 + y^2 = 1.$

229. $z(x,y) = x + y,\ \operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg} y = 0,\ |x| < \dfrac{\pi}{2},\ |y| < \dfrac{\pi}{2}.$

230. $u(x,y,z) = x - 2y + z,\ x^2 + y^2 - z^2 = 1.$

231. $u(x,y,z) = x^3 + y^2 - z^3 + 5,\ x + y - z = 0.$

232. $u(x,y,z) = x - 2y + 2z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

233. $u(x,y,z) = xy^2z^3,\ x + 2y + 3z = 6,\ (x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$

234. $u(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2},\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ (a > b > c > 0).$

235. $u(x,y,z) = xyz,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3.$

236. $u(x,y,z) = x + y + z^2,\ z - x = 1,\ y - xz = 1.$

237. $u(x,y,z) = xyz,\ x + y + z = 5,\ xy + yz + zx = 8.$

238. Ako treba zvoliť polomer podstavy r a výšku h kruhového valca, ktorého objem je $V = 54\pi$, aby mal najmenší povrch?

239. Nájdite rozmery pravouhlého rovnobežnostena najväčšieho objemu, ktorý je vpísaný do elipsoidu
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

240. Nájdite najmenšiu vzdialenosť bodu (x_0, y_0, z_0) od roviny $\tau : ax + by + cz + d = 0$.

241. Nájdite extrém kvadratickej formy $u = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ (kde $a_{ij} = a_{ji}$ sú reálne čísla) pri väzbe $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

242. Dokážte nerovnosť:

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, \text{ ak } n \geq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

243. Nájdite viazané extrémy funkcie $z = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$, ak rovnica väzby je $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n.a,\ a > 0,\ m > 1.$

244. Dokážte Hölderovu nerovnosť

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{1/q},\ a_i \geq 0,\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

6.3. Globálne extrémy

Z vlastnosti spojitej funkcie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na uzavretej ohraničenej oblasti $M \subset R^n$ vyplýva, že funkcia má maximum a minimum na tejto oblasti. Pri hľadaní extrémov funkcie f na tejto oblasti postupujeme takto:

1. nájdeme lokálne extrémy funkcie f vo vnútri oblasti M
2. nájdeme viazané lokálne extrémy na hranici oblasti M
3. najväčšia hodnota extrémov vypočítaných v bodoch 1. a 2. je maximum f na M, najmenšia hodnota extrémov vypočítaných v bodoch 1. a 2. je minimum f na M.

Extrémy funkcie na uzavretej ohraničenej oblasti nazývame globálne (absolútne) extrémy funkcie f na oblasti M.

Nájdite globálne extrémy funkcii na uzavretej ohraničenej oblasti M:

245. $z(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y,\ M = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}.$

246. $z(x, y) = x^2 + 2y^2 + 4xy - 6x - 1,\ M = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq -x + 3\}.$

247. $z(x, y) = x^2 - xy + y^2,\ M = \{(x, y) \in R^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$

248. $z(x, y) = x^2 - y^2,\ M = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$

249. $z(x, y) = e^{-x^2-y^2}(3x^2 + 2y^2),\ M = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$

250. $z(x, y) = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8},\ M = \{(x, y) \in R^2 : \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$

251. $u(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,\ M = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}.$

252. $u(x, y, z) = x + y + z,\ M = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$

253. $u(x, y, z) = xy + yz + zx,\ M\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}.$