Výsledky, návody a poznámky

$\boxed{\mathbf{1}}$ a) $\sqrt{2}, \sqrt{5}$; b) Nie je definovaná, $\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ a) $M = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \neq r^2\}$;
b) $M = \{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$;
c) $M = \{(x,y) \in R^2 : y^2 > 4x - 8\}$;
d) $M = \{(x,y) \in R^2 : (x \geq 0 \wedge 2k\pi \leq y \leq (2k+1)\pi,\ k \in Z) \vee (x \leq 0 \wedge (2k+1)\pi \leq y \leq (2k+2)\pi,\ k \in Z)\}$;
e) $M = \{(x,y) \in R^2 : (\mid x \mid \leq 1 \wedge \mid y \mid \leq 1) \vee (\mid x \mid \geq 1 \wedge \mid y \mid \geq 1)\}$;
f) $M = \{(x,y) \in R^2 : x > 0 \wedge 2k\pi \leq y \leq (2k+1)\pi,\ k \in Z\}$;
g) $M = \{(x,y) \in R^2 : (x > 0 \wedge 1 - x \leq y \leq 1 + x) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge y \geq z)\}$;
h) $M = \{(x,y) \in R^2 : (x > 0 \wedge y > 0 \wedge y \leq x) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge y \geq x)\}$;
i) $M = \{(x,y) \in R^2 : (1 < x^2 + y^2 < 9) \wedge [(x > 0 \wedge -x \leq y \leq x) \vee (x < 0 \wedge x \leq y \leq -x)]\}$;
j) $M = \{(x,y,z) \in R^3 : \mid y \mid + \mid z \mid \neq 0\}$;
k) $M = \{(x,y,z) \in R^3 : (x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0)\}$;
l) $M = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ a) Paraboly o rovniciach $y = k,\ z = x^2 - k^2;\ x = k,\ z = k^2 - y^2$, kde $k \in R$.
b) Paraboly $x = k,\ z = k.y^2$; priamky $y = k,\ z = k.x$, kde $k \in R$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ a) Pre $0 \leq k < 1$ je vrstevnicou kružnica o rovnici $x^2 + y^2 = 1 - k^2,\ z = k$; pre $k = 1$ je vrstevnicou bod $[0,0,1]$; pre $k > 1$ graf funkcie a rovina $z = k$ nemajú spoločné body.
b) Pre $k > 0$ je vrstevnica elipsa o rovnici $3x^2 + 2y^2 = k,\ z = k$; pre $k = 0$ je vrstevnicou bod $[0,0,0]$; pre $k < 0$ graf funkcie a rovina $z = k$ nemajú spoločné body
c) Pre $k \neq 0$ je vstevnicou hyperbola o rovnici $xy = k,\ z = k$; pre $k = 0$ je vrstevnicou os x a os y.

$\boxed{\mathbf{5}}$ a)Rovina, b) rovina, c) eliptický paraboloid, d) hyperbolický paraboloid, e) rotačný paraboloid, f) časť guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$, g) časť kuželovej plochy $z = x^2 + y^2,\ z \geq 0$, h) parabolická valcová plocha.

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in M : 0 <\| x - a \|_{R^n} < \delta,\ \| f(x) - b \|_{R^m} < \varepsilon$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Longleftrightarrow \forall K > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{O}_\delta(a) \cap M,\ x \neq a : \|f(x)\|_{R^m} > K$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ 5.

$\boxed{\mathbf{9}}$ $\frac{1}{4}$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ 2.

$\boxed{\mathbf{11}}$ a.

12 ∞, použite vzorec $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\sin n}{n} = 1$.

13 4.

14 0, najprv urobte odhad uvedenej funkcie zhora i zdola pomocou vhodných funkcií, ktorých limity viete vypočítať $(0 < \frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y},\ \forall (x,y) \neq (0,0))$.

15 0, urobte odhad $0 < (x^2+y^2)e^{-(x+y)} < \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}$ pre $x > 0,\ y > 0$.

16 0, urobte odhad $0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \leq (\frac{1}{2})^{x^2}$.

17 1, $x^2y^2 \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2,\ 1 \geq \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2} \geq \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}$ pre $0 < x^2+y^2 \leq 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2} = \lim\limits_{t\to 0^+} t^{t^2} = 1$, kde $t = x^2+y^2$.

18 0, najprv upravte funkciu takto: $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = x\left(1 - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) + y\left(1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$ a potom použite vetu o limite súčinu dvoch funkcií, z ktorých jedna konverguje k nule a druhá funkcia je ohraničená.

19 a) e^2, upravte funkciu na tvar $\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{2y}{x+y}}$ a položte $t = xy,\ t \to 0$ pre $x \to 0,\ y \to 2$. b) 0, využite nerovnosť $x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{2}$ a položte $t = x^2+y^2$.

20 a) Neexistuje, využite vetu 1.4.1. a zvoľte postupnosť $\{(x, l.x_k)\}_{k=1}^{\infty}$, kde $x_k \to 0,\ x_k \neq 0,\ l \in R$.
b) 0, využite nerovnosť $|\sin xy| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

22 Použite definíciu 1.4.1. a položte $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, potom urobte odhad funkcie $|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}|$ zhora, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ak $x : \varrho(x,0) < \sqrt{x^2+y^2}$, tak $|x| < \delta,\ |y| < \delta$ a $|f(x,y) - 0| = |(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon$.

23 a) $1, -1$. b) $1, 1$. c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. d) $0, 1$.

24 Zvoľte si dve postupnosti $\{(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})\}_{k=1}^{\infty}$ a využite vetu 1.4.1.

25 Obidve dvojnásobné limity sa rovnajú 0, k dôkazu toho, že limita neexistuje využite vetu 1.4.1. a zvoľte postupnosť $\{(x_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty},\ x_k \to \infty$.

26 Neexistujú, upravte funkciu na tvar $f(x,y) = x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ a uvážte existenciu limity obidvoch sčítancov pri pevnom $y \neq 0,\ y \neq \frac{1}{k\pi},\ k \in Z$ a $x \to 0$. Analogicky uvažujte existenciu limity obidvoch sčítancov pre $y \to 0$ pri pevnom $x \neq 0,\ x \neq \frac{1}{k\pi},\ k \in Z$.

27 $\{(x,y) \in R^2 : y = x\}$.

28 $(0,0)$.

29 $\{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 \geq 4\}$.

30 $\{(x,y) \in R^2 : y = 0\}$.

$\boxed{\textbf{31}}$ $\{(x,y) \in R^2 : xy = 0\}$.

$\boxed{\textbf{32}}$ $\{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

$\boxed{\textbf{33}}$ $(1,2,-1)$.

$\boxed{\textbf{34}}$ Uvažujte prírastok funkcie v bode $(0,0)$ prislúchajúci prírastku $\triangle x$ premennej x, t.j. $\triangle_x f = f(\triangle x, 0) - f(0,0) = 0$, $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle_x f = 0$, t.j. $f(x,y)$ je spojitá v bode $(0,0)$ vzhľadom k premennej x. Analogicky možno dokázať spojitosť $f(x,y)$ v bode $(0,0)$ vzhľadom k obidvom premenným (pozri výsledok príkladu 20. a)).

$\boxed{\textbf{35}}$ Funkciu upravte takto:
$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} . \frac{\sin y}{y}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$, pretože $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 1 = f(0,0)$ je f spojitá v bode $(0,0)$ a spojitá podľa jednotlivých premenných zvlášť. Uvažujte funkciu $f(x,0)$. Podľa definície $f(x,0) = 1$ pre všetky x. Táto funkcia je spojitá v bode $x = 1$ a $f(x,y)$ je spojitá v bode $(1,0)$ vzhľadom na premennú x. Uvažujte ďalej funkciu $f(1,y)$. Pretože $\lim\limits_{y \to 0} \neq f(1,0)$, tak $f(1,y)$ nie je spojitá v bode $y = 0$. Funkcia $f(x,y)$ nie je spojitá v bode $(1,0)$ vzhľadom na premennú y. Funkcia $f(x,y)$ nie je spojitá v $(1,0)$.

$\boxed{\textbf{36}}$ $f(x,y,z) = \begin{cases} 3x + 4y - 2z + 5, & x \neq 0,\ y \neq 1,\ z \neq 2 \\ 5, & x = 0,\ y = 1,\ z = 2 \end{cases}$.

$\boxed{\textbf{37}}$ Uvažujte ľubovoľný bod (x_0, y_0), pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ zvolíte $\delta_1 > 0$ tak, aby pre $\mid y - y_0 \mid \leq \delta_1$ platilo $\mid f(x_0,y_0) - f(x_0,y) \mid < \frac{\varepsilon}{2}$. Zo spojitosti funkcie $f(x,y)$ vzhľadom k x vyplýva, že dá sa zvoliť $\delta_2 > 0$ tak, aby pre $\mid x - x_0 \mid \leq \delta_2$ platilo $\mid f(x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_o \pm \delta_1) \mid < \frac{\varepsilon}{2}$. Predpokladajte, že $f(x,y)$ monotónne rastie vzhľadom k y. Potom pre $\mid x - x_0 \mid \leq \delta_2$, $\mid y - y_0 \mid \leq \delta_1$ dostanete $f(x, y_0 - \delta_1) \leq f(x,y) \leq f(x, y_0 + \delta_1)$, pričom $\mid f(x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0,y_0) \mid \leq \mid f(x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0 \pm \delta_1) \mid + \mid f(x_0, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0) \mid < \varepsilon$, odkiaľ dostanete, že $\mid f(x,y) - f(x_0,y_0) \mid < \varepsilon$, teda $f(x,y)$ je spojitá v bode (x_0,y_0).

$\boxed{\textbf{38}}$ Upravte $\mid f(x,y) - f(x_0,y_0) \mid$ takto:
$\mid f(x,y) - f(x_0,y_0) \mid \leq \mid f(x_0,y) - f(x,y_0) \mid + \mid f(x,y_0) - f(x_0,y_0) \mid$. Využite Lipschitzovu podmienku vzhľadom na y pre funkciu f a spojitosť $f(x,y)$ vzhľadom na x (t.j. $f(x,y_0)$ je spojitá v bode x_0).

$\boxed{\textbf{39}}$ $\sup\limits_M f = \max\limits_M f = 81$, napríklad v bode $(0,3)$; $\inf\limits_M f = 0$, $\min\limits_M f$ neexistuje.

$\boxed{\textbf{40}}$ $\sup\limits_M f = \max\limits_M f = \dfrac{1}{e}$, napríklad v bode $(1,1)$; $\inf\limits_M f = \min\limits_M f = 0$, napríklad v bode $(0,0)$.

$\boxed{\textbf{41}}$ Využite definíciu rovnomernej spojitosti funkcie a pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ zvoľte $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

$\boxed{\textbf{42}}$ Funkcia $f(x,y)$ je spojitá na množine M, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 0$, položte $f(0,0) = 0$, potom $f(x,y)$ bude rovnomerne spojitá na $\overline{M}$.

$\boxed{\mathbf{43}}$ Funkcia $f(x,y)$ nie je rovnomerne spojitá na svojom obore definície t.j. na $M = \{(x,y) \in R^2 :\mid x \mid\leq\mid y \mid,\ y \neq 0\}$. Zvoľte dve postupnosti bodov $\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} = \{(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} = \{(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})\}_{k=1}^{\infty}$ a zistite, že $\varrho(a^{(k)}, b^{(k)}) = \frac{2}{k} \to 0$ pre $k \to \infty$ a $\mid f(a^{(k)}) - f(b^{(k)}) \mid = \pi$.

$\boxed{\mathbf{44}}$ Funkcia $f(x,y)$ nie je rovnomerne spojitá na M; uvažujte dve postupnosti bodov:

$$\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(\sqrt{1-\frac{1}{2k}}\cos\alpha, \sqrt{1-\frac{1}{2k}}\sin\alpha\right)\right\}_{k=1}^{\infty},$$
$$\{b^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(\sqrt{1-\frac{2}{1+4k}}\cos\alpha, \sqrt{1-\frac{2}{1+4k}}\sin\alpha\right)\right\}_{k=1}^{\infty}, \ 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$$

ktoré patria do oboru definície funkcie $f(x,y)$. Zistite, že $\varrho(a^{(k)}, b^{(k)}) \to 0$ pre $k \to \infty$ a $\mid f(a^{(k)}) - f(b^{(k)}) \mid = 1$ pre všetky k.

$\boxed{\mathbf{45}}$ Funkcia $f(x,y)$ je rovnomerne spojitá na M.

$\boxed{\mathbf{46}}$ Funkcia $f(x,y)$ je rovnomerne spojitá na M.

$\boxed{\mathbf{47}}$ Funkcia $f(x,y)$ je rovnomerne spojitá na M. Upravte rozdiel $\mid f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2) \mid$ takto:

$$\mid \sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2} \mid = \frac{\mid (x_1-x_2)(x_1+x_2) + (y_1-y_2)(y_1+y_2) \mid}{\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$
$$\leq \mid x_1 - x_2 \mid \frac{\mid x_1 \mid + \mid x_2 \mid}{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2}} + \mid y_1 - y_2 \mid \frac{\mid y_1 \mid + \mid y_2 \mid}{\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_2^2}} = \mid x_1 - x_2 \mid + \mid y_1 - y_2 \mid$$

a zvoľte $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

$\boxed{\mathbf{48}}$

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x\left[\cos(xy) - y\sin(xy)\right]$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -xe^x\sin(xy)$;

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2-2xy-x^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2-2xy-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$; c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{2x^2+y^2}$;

d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; e) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x+y)e^{(x+y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x+y)e^{(x+y)^2}$;

f) $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos 2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos 2y$; g) $\frac{\partial z}{x} = 8xy^4(x^2+1)^3$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3(x^2+1)^4$;

h) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{\cos^2(xy)}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\,(xy) + \frac{xy}{\cos^2(xy)}$; i) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$;

j) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{y(x^2+y^2)}$; k) $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}(1+xy)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}(1+xy)$;

l) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2y}{(x-y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{(x-y)^2}$; m) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$;

n) $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{y}\frac{1}{\sin\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{y}} = \frac{1}{y}\operatorname{cosec}\frac{x}{y}.\sec\frac{x}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\sec\frac{x}{y}\operatorname{cosec}\frac{x}{y}$;

o) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y\ln x$;

p) $\frac{\partial z}{\partial x} = \left[2x\ln\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{x(y^2-x^2)}{x^2+y^2}\right]\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{y(x^2+y^2)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

$\boxed{\mathbf{49}}$ a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2yz^2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^3z^2$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^3yz^2$;

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2anx\left(ax^2 + by^2 + xz^2\right)^{n-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2bny\left(ax^2 + by^2 + cz^2\right)^{n-1}$;
$\frac{\partial u}{\partial z} = 2xnz\left(ax^2 + by^2 + cz^2\right)^{n-1}$;
c) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|z|y}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{|z|x}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{|z|\sqrt{z^2-x^2y^2}}$;
d) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$;
e) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z\cos xy}{1+x^2z^2} - y\sin(xy)\mathrm{arctg}\,(xz)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin(xy)\mathrm{arctg}\,(xz)$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x\cos(xy)}{1+x^2z^2}$;
f) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{z}{x}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \ln\frac{y}{x}$;
g) $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xyz}\cos y(yz\sin x + \cos x)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{xyz}\sin x(xz\cos y - \sin y)$; $\frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz}\sin x\cos y$;
h) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}$;
i) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{xz}x^{y/z}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y/z}\frac{\ln x}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}x^{y/z}\ln x$.

50 a) $z = 6x - 1$; b) $z = 8y + 1$.

51 a) $z = 13 - 12y$; b) $z = 8x - 15$.

52 Návod: Vypočítajte diferenciál funkcií v bode $O = (0,0)$.
a) $1 + mx + ny$; b) $x + y$.

53 a) $\frac{2}{\sqrt{3}}.0,55$; b) $-7,8$; c) $0,8(1 + 2\ln 4)$; d) $-\frac{1}{30}$; e) 2; f) $-\frac{\sqrt{2}}{20}$.

54 a) $108,972$; b) $2,95$; c) $0,502$; d) $0,97$.

55 Nie je. Návod: 1. Zistite, či sú splnené nutné podmienky diferencovateľnosti funkcie v bode $(0,0)$ (veta 2.2.1.); 2. ak áno, potom využite podmienku diferencovateľnosti (1), z ktorej nájdete funkciu $\omega(x,y)$; 3. zistite, či funkcia $\omega(x,y)$ vyhovuje podmienkam definície 2.2.1. Derivácie $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ počítajte podľa definície 2.1.1.

56 Nie je.

57 Návod: a) overiť platnosť nutných podmienok diferencovateľnosti (veta 2.2.1.); b) pri dôkaze nespojitosti $f'_x.f'_y$ stačí ukázať na základe Heineho definície limity, že f'_x, f'_y nemajú limitu v bode $(0,0)$; c) neohraničenosť f'_x, f'_y v okolí bodu $(0,0)$ možno ukázať tak, že ak si zvolíme postupnosť $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset R^2$, ktorá konverguje k $(0,0)$ príslušné postupnosti $\{f'_x(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{f'_y(x_n,y_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ majú nevlastnú limitu; d) pre dôkaz diferencovateľnosti funkcie v $(0,0)$ stačí využiť podmienku (1).

58 Návod: Nech (x_1,y_1), (x_2,y_2) sú ľubovoľné body z E. Uvažujte pomocnú funkciu $\varphi(t) = f\left(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 + t(y_1 - y_2)\right)$ na intervale $< 0,1 >$. pretože E je konvexná oblasť, bod $\left(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 + t(y_1 - y_2)\right), t \in < 0,1 >$, patrí do E. Podľa Lagrangeovej vety a ohraničenosti derivácií f'_x, f'_y odhadnite $\mid \varphi(1) - \varphi(0) \mid = \mid f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2) \mid$ a použite definíciu spojitosti funkcie f v oblasti E.

59 Návod: Nech $(x_0,y_0) \in G$ je ľubovoľný bod. K dôkazu spojitosti funkcie f v bode (x_0,y_0) vzhľadom na obidve premenné využite definíciu spojitosti, pričom v nerovnosti

$$\mid f(x,y) - f(x_0,y_0) \mid \leq \mid f(x,y) - f(x,y_0) \mid + \mid f(x,y_0) - f(x_0,y_0) \mid$$

pre prvý sčítanec použite Lagrangeovu vetu. Potom zohľadnite tieto skutočnosti: a) existuje číslo $M > 0$ také, že $\mid f'_y(x,y) \mid \leq M$ pre všetky $(x,y) \in G$; b) spojitosť funkcie f podľa premennej x pre $y = y_0$, čo znamená, že ak $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ je nejaké ľubovoľné číslo, tak k nemu existuje $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, y_0)$ také, že

$$\mid f(x,y_0) - f(x_0,y_0) \mid < \frac{\varepsilon}{2}, \text{keď } \mid x - x_0 \mid < \delta_1.$$

60 a) $\begin{pmatrix} v & u \\ 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$; c) $\left(\frac{1}{v}, -\frac{u}{v^2}\right)$; d) $\begin{pmatrix} \operatorname{tg} u + \frac{u}{\cos^2 u} \\ \sin u + u\cos u \end{pmatrix}$;
e) $\begin{pmatrix} \ln\frac{v}{w} & \frac{u}{v} & -\frac{u}{w} \\ -\frac{v}{u} & \ln\frac{w}{u} & \frac{v}{w} \\ \frac{w}{u} & -\frac{w}{v} & \ln\frac{u}{v} \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2u & 2v & 2w \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

61 a) r; b) $\frac{2y}{x(x^2+y^2)}$; c) $r^2\cos\psi$; d) $\frac{2y}{x}$; e) $2ur$.

62 a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$;
b) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x\sin x^2}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{2x\sin x^2}{y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2\cos x^2}{y^3}$;
c) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y} - \frac{4x^2}{y^3}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}\sec^3\frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$; $(\sec\frac{x^2}{y} = \frac{1}{\cos\frac{x^2}{y}})$;
d) $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y\ln x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y\ln^2 x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = x^{y-1}(1 + y\ln x)$; $x > 0$;
e) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$;
f) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x\operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$; $y \neq 0$;
g) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$;
h) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z(1+z\ln\frac{x}{y})$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = -\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z(1+z\ln\frac{x}{y})$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y}$; $\frac{x}{y} > 0$;
i) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yu}{xz}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = u\frac{\ln x}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{yu}{z^2}\ln x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y(y-z)u}{x^2z^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u\ln^2 x}{z^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{yu\ln x}{z^4}(2z + y\ln x)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{(z+y\ln x)u}{xz^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = -\frac{yu(z+y\ln x)}{xz^3}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = -\frac{u\ln x(z+y\ln x)}{z^3}$; $xz \neq 0$.

64 0.

65 $\frac{(-1)^m 2(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$.

66 $p!q!$.

67 $(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$.

68 $\sin\frac{n\pi}{2}$.

69 a) $Au=-u,\ A^2u=u$; b) $Au=1,\ A^2u=0$.

70 a) $\triangle_1 u=\frac{1}{r^4}$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \triangle_2 u=0$
b) $\triangle_1 u=9\left[(x^2-yz)^2+(y^2-xz)^2+(z^2-xy)^2\right],\ \triangle_2 u=6(x+y+z)$.

71 Návod: Pri dôkaze spojitosti využijeme definíciu spojitosti funkcie f v bode $(0,0)$; parciálne derivácie $f'_x(0,0),\ f'_y(0,0),\ f''_{xy}(0,0),\ f''_{yx}(0,0)$ vypočítajte podľa definície.

72 Návod: Použite vzorec (3) pre $k=2,\ n=2$ (resp. $n=3$) a potom vezmite do úvahy poznámku 2.2.3. pre prípad deferenciálu k - tého rádu.
a) $du=mx^{m-1}y^ndx+nx^my^{n-1}dy,\ d^2u=m(m-1)x^{m-2}y^n(dx)^2+2mnx^{m-1}y^{n-1}dxdy+n(n-1)x^my^{n-2}(dy)^2=x^{m-2}y^{n-2}\left(m(m-1)y^2(dx)^2+2mnxydxdy+n(n-1)x^2(dy)^2\right)$;
b) $du=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ d^2u=\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$;
c) $du=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$,
$d^2u=\frac{(y^2-x^2)\left[(dx)^2+(dy)^2\right]-4xydxdy}{(x^2+y^2)^2}$;
d) $du=(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz, d^2u=2dxdy+2dxdz+2dydz$;
e) $du=\frac{-2xzdx-2yzdy+(x^2+y^2)dz}{(x^2+y^2)^2}$,
$d^2u=\frac{2z\left[(3x^2-y^2)(dx)^2+8xydxdy+(3y^2-x^2)(dy)^2\right]}{(x^2+y^2)^3}-\frac{4(x^2+y^2)(xdx+ydy)dz}{(x^2+y^2)^3}$.

73 $df(1,1,1)=(x-1)-(y-1)=dx-dy$,
$d^2f(1,1,1)=2\left[(y-1)+(z-1)\right]\left[-(x-1)+(y-1)\right]=2(dy+dz)(dy-dx)$.

76 $F(r)=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$. Návod: Z vety o derivovaní zloženej funkcie je napr. $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+f'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$. Podobne nájdite výrazy pre parciálne derivácie zloženej funkcie podľa ostatných premenných.

80 Návod: Z vety 2.4.1. o derivácii zloženej funkcie máme: $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial x}+\psi'(w)\frac{\partial w}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial t}+\psi'(w)\frac{\partial w}{\partial t}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\varphi'(v)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\psi''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\psi'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\varphi''(v)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\varphi'(v)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\psi''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+\psi'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, kde v,w sú vnútorné zložky zložených funkcií, napr. v úlohe a) je $v=x-at,\ w=x+at$.

81 Návod: Podľa poznámky 2.4.1. a vety 2.4.2. v prípade c) máme:
$du=\frac{\partial f}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial f}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial f}{\partial\zeta}d\zeta$, kde $d\xi,\ d\eta,\ d\zeta$ sú totálne diferenciály funkcii ξ,η,ζ dvoch premenných x,y; $d^2u=d(du)=d\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial f}{\partial l\eta}d\eta+\frac{\partial f}{\partial\zeta}d\zeta\right)=d\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)d\xi+\frac{\partial f}{\partial\xi}d^2\xi+d\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)d\eta+\frac{\partial f}{\partial\eta}d^2\eta+d\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta}\right)d\zeta+\frac{\partial f}{\partial\zeta}d^2\zeta$, pričom diferenciály $d\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\right),\ d\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right),\ d\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta}\right)$ funkcií $\frac{\partial f}{\partial\xi},\ \frac{\partial f}{\partial\eta},\ \frac{\partial f}{\partial\zeta}$ počítame podľa uvedeného vzorca pre du a $d^2\xi,\ d^2\eta,\ d^2\zeta$ počítame podľa vzorca (3), v ktorom $x_1=x,\ x_2=y$.

a) $du = f'_\xi(ydx+xdy) + f'_\eta \frac{ydx-xdy}{y^2}$,
$d^2u = f''_{\xi^2}(ydx+xdy)^2 + 2f''_{\xi\eta}\frac{y^2(dx)^2-x^2(dy)^2}{y^2} + f''_{\eta^2}\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4} + 2f'_\xi dxdy - 2f'_\eta \frac{(ydx-xdy)dy}{y^3}$;
b) $du = (f'_x + 2tf'_y + 3t^2 f'_z)dt$,
$d^2u = \left(f''_{x^2} + 4tf''_{xy} + 4t^2 f''_{y^2} + 6t^2 f''_{xz} + 12t^3 f''_{yz} + 9t^4 f''_{z^2} + 2f'_y + 6tf'_z\right)(dt)^2$;
c) $du = 2f'_\xi(xdx+ydy) + 2f'_\eta(xdx-ydy) + 2f'_\zeta(ydx+xdy)$,
$d^2u = 4f''_\xi(xdx+ydy)^2 + 4f''_{\eta^2}(xdx-ydy)^2 + 4f''_{\zeta^2}(ydx+xdy)^2 + 8f''_{\xi\eta}\left(x^2(dx)^2 - y^2(dy)^2\right) + 8f''_{\xi\zeta}(xdx+ydy)(ydx+xdy) + 8f''_{\eta\zeta}(xdx-ydy)(ydx+xdy) + 2f'_\xi\left((dx)^2+(dy)^2\right) + 2f'_\eta\left((dx)^2 - (dy)^2\right) + 4f'_\zeta dxdy$;
d) $du = f'_1(dx+dy+dz) + 2f'_2(xdx+ydy+zdz)$,
$d^2u = f''_{11}(dx+dy+dz)^2 + 4f''_{12}(dx+dy+dz)(xdx+ydy+zdz) + 4f''_{22}(xdx+ydy+zdz)^2 + 2f'_2\left((dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\right)$. Tu 1 a 2 znamená zodpovedajúce 1. a 2. zložka zloženej funkcie.
e) $du = 2f'_1 dx + 3f'_2 dy + 4f'_3 dz$,
$d^2u = 4f''_{11}(dx)^2 + 9f''_{22}(dy)^2 + 16f''_{33}(dz)^2 + 12f''_{12}dxdy + 16f''_{13}dxdy + 24f''_{23}dydz$;
f) $du = (f'_1 y + f'_2 + f'_3)\,dx + (f'_1 x - f'_2 + f'_3)\,dy$,
$d^2u = \left(f''_{11}y^2 + 2f''_{12}y + 2f''_{13}y + f''_{22} + 2f''_{23} + f''_{33}\right)(dx)^2 + \left(f''_{11}xy - f''_{12}y + f''_{13}y + f''_{12}x + f''_{13}x - f''_{22} + f'_1 + f''_{33}\right)dxdy + \left(f''_{11}x^2 + 2f''_{13}x - 2f''_{12}x + f''_{22} - 2f''_{23} + f''_{33}\right)(dy)^2$.

82 Návod: Ak postupujete podľa návodu k úlohe 81 a vezmete do úvahy, že $d^2\xi = 0$, $d^2\eta = 0$, $d^2\zeta = 0$ pre lineárne funkcie ξ, η, ζ, dostanete $d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta}d\zeta\right)^2 f$. Metódou matemetickej indukcie sa ľahko presvedčíte o tom, že

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta}d\zeta\right)^n f,$$

t.j. že tvar diferenciálu ľubovoľného rádu sa zachováva pri zámene argumentov lineárnymi funkciami.
a) $d^n u = f^{(n)}\,(ax+by+cz)\,(adx+bdy+cdz)^n$
b) $d^n u = \left(adx\frac{\partial}{\partial\xi} + bdy\frac{\partial}{\partial\eta} + cdz\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f(\xi,\eta,\zeta)$, kde $\xi = ax, \eta = by, \zeta = cz$
c) $d^n u = \left[dx\left(a_1\frac{\partial}{\partial\xi} + a_2\frac{\partial}{\partial\eta} + a_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) + dy\left(b_1\frac{\partial}{\partial\xi} + b_2\frac{\partial}{\partial\eta} + b_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) + \right.$
$\left. + dz\left(c_1\frac{\partial}{\partial\xi} + c_2\frac{\partial}{\partial\eta} + c_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^n f(\xi,\eta,\zeta)$.

84 Návod: Uvažujte pomocnú funkciu $F(t) = \frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n}$, kde (x_0,y_0,z_0) je ľubovoľný bod z definičného oboru funkcie f. Ukážte, že pri splnení podmienky úlohy je $F'(t) = 0$, z čoho vyplýva $F(t) =$ konšt. $= C$. Konštantu C vypočítate, ak položíte $t = 1$. Ak dosadíte túto hodnotu C namiesto $F(t)$ do uvažovanej rovnosti, po vynásobení t^n dostanete to, čo bolo treba dokázať.

86 $1 - \sqrt{3}$.

87 Návod: Vyjdite zo vzťahu $-\mid \operatorname{grad} z(M) \mid \le \frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(M) \le \mid \operatorname{grad} z(M) \mid$, ktorý je dôsledkom vzorca (4) a vlastnosti gradienta funkcie z v bode M.
$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(1,1) = \cos\alpha + \sin\alpha$; a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; b) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; c) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ a $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

$\boxed{\mathbf{88}}$ Návod: Využite poznámku 2.4.1. $\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$.

$\boxed{\mathbf{89}}$ $\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

$\boxed{\mathbf{90}}$ $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(1,1,1) = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma, \ \mid \text{grad } u \mid = \sqrt{3}$.

$\boxed{\mathbf{91}}$ $\mid \text{grad } u \mid = \frac{1}{r_0^2}, \ \cos\alpha = -\frac{x_0}{r_0}, \ \cos\beta = -\frac{y_0}{r-0}, \ \cos\gamma = -\frac{z_0}{r_0}$, kde $r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

$\boxed{\mathbf{92}}$ $\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\mathbf{93}}$ ≈ 3142.

$\boxed{\mathbf{95}}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial \vec{l}^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos\alpha\cos\beta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\cos\alpha\cos\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\cos\beta\cos\gamma$.

$\boxed{\mathbf{96}}$ Návod: Položte $y = 2x$. Potom 1. podmienku derivujte dvakrát podľa x a 2. podmienku raz podľa x ako zloženú funkciu. Tým dostanete systém lineárnych algebraických rovníc vzhľadom na hľadané druhé parciálne derivácie.
$u''_{xx}(x,2x) = u''_{yy}(x,2x) = -\frac{4}{3}; u''_{xy}(x,2x) = \frac{5}{3}x$.

$\boxed{\mathbf{97}}$ Návod: Integrujte rovnicu postupne n - krát podľa y, pričom namiesto konštanty integrovania budeme mať vždy funkciu premennej x.
$z = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + \ldots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)$.

$\boxed{\mathbf{98}}$ $z = x^2y + y^2 - 2x^4 + 1$.

$\boxed{\mathbf{99}}$ $z = 1 + xy + y^2$.

$\boxed{\mathbf{100}}$ $z = x + y^2 + 0,5xy(x+y)$.

$\boxed{\mathbf{101}}$ Overte platnosť predpokladov vety 3.1.

$\boxed{\mathbf{102}}$ Overte platnosť predpokladov vety 3.2.

$\boxed{\mathbf{103}}$ Overte platnosť predpokladov vety 3.3.

$\boxed{\mathbf{104}}$ Overte platnosť predpokladov vety 3.3.

$\boxed{\mathbf{105}}$ 1. Nekonečne veľa. Napríklad, ak $x_k = -1 + \frac{2k}{n}, \ k = 0,1,\ldots,n, \ n = 2,3,\ldots$. tak pre každé $n = 2,3,\ldots$ definujte funkciu

$$y(x) = \begin{cases} -|x|, & \text{ak } x < -1 \\ |x|, & \text{ak } x_k < x \le x_{k+1} \\ -|x|. & \text{ak } x > x_{k+1}, \end{cases}$$

kde $k = 0,1,2,\ldots,n$. Táto funkcia je definovaná pre všetky x a spĺňa rovnicu (1).
2. štyri funkcie: $y = x, \ y = -x, \ y = |x|, \ y = -|x|$;
3. dve funkcie: $y = -x, \ y = x$;
4. a) dve funkcie; b) štyri funkcie;
5. jedna funkcia, pretože funkcie $y = x$ a $y = |x|$, ktoré prechádzajú bodom $(1,1)$ sú identické v intervale $(1-\delta, 1+\delta), \ 0 < \delta < 1$.

106 a) $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = -\frac{x_0}{z_0}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -\frac{y_0}{z_0}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{x_0 y_0}{z_0^3}$;

b) $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \frac{x_0^2+z_0^2+z_0}{x_0-x_0^2-z_0^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \frac{x_0^2+z_0^2}{x_0-x_0^2-z_0^2}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = \frac{x_0^2-z_0^2+2x_0z_0-z_0+(z_0^2-x_0^2-x_0z_0-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)}{(x_0-x_0^2-z_0^2)^2}$, kde $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$ je horeuvedený výraz.

c) $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \frac{z_0}{x_0} \cdot \frac{x_0^{-1}}{1-z_0}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \frac{z_0}{y_0} \cdot \frac{y_0^{-1}}{1-z_0}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = \frac{z_0\left[(x_0-1)^2+(1-z_0)^2\right]}{x_0^2(1-z_0)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{z_0}{x_0y_0} \cdot \frac{(x_0-1)(y_0-1)}{(1-z_0)^3}$;

d) $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = -\frac{1+y_0z_0\sin(x_0y_0z_0)}{1+x_0y_0\sin(x_0y_0z_0)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -\frac{1+x_0z_0\sin(x_0y_0z_0)}{1+x_0y_0\sin(x_0y_0z_0)}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{-\cos(x_0y_0z_0)\left[x_0z_0+x_0y_0\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\right]-\left[z_0+x_0\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)+y_0\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\right].\sin(x_0y_0z_0)}{1+x_0y_0\sin(x_0y_0z_0)}$, kde $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$ sú predtým nájdené výrazy.

Návod: Druhé parciálne derivácie hľadajte derivovaním prvých parciálnych derivácii funkcie z podľa vhodnej premennej.

107 Vychádzajte z toho, že diferenciál $dy = f'(x)dx$ pre funkciu $y = f(x)$ určenú implicitne rovnicou $1 + xy = k(x - y)$ (pojem funkcie určenej implicitne je uvedený po vete 3.1.). Nájdite deriváciu $f'(x)$ podľa vety 3.1., vyjadríte konštantu k z danej rovnice, potom dosaďte to do výrazu pre dy.

108 Postup dôkazu je podobný ako v úlohe 107. Len tu treba rozriešiť rovnicu (1) vzhľadom na x (resp. na y) a to dosadiť do výrazu pre dy za predpokladu, že $xy > 0$.

109 a) -2; b) -1.

110 $dz(3,-2) = \frac{1}{9}(2dx - dy)$, $d^2z(3,-2) = -\frac{2}{243}\left[2(dx)^2 - 5dxdy + 2(dy)^2\right]$, kde $dx = x - 3, dy = y + 2$.

111 Použiť techniku derivovania funkcií $u(x,y)$ a $v(x,y)$ daných implicitne systémom rovníc z vety 3.3.
$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv-yu}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{yu-xv}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $x^2 + y^2 > 0$.

112 Funkia $z(x,y)$ je definovaná v oblasti $y > \frac{x^2}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v)$, $u \neq v$.
Návod: Oblasť existencie funkcie $z(x,y)$ nájdete z podmienky (na základe vety 3.3.), ktorá stanovuje, kedy systém prvých dvoch rovníc určuje jediné funkcie u a v premenných x a y. Vyjadrite tú podmienku pomocou výrazov pre x a y. Derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ hľadajte tak, že zderivujete tretiu rovnicu podľa x (resp. podľa y), berúc do úvahy, že u a v sú funkcie x a y, určené prvými dvomi rovnicami. Do získaného výsledku dosaďte (nájdené podľa vety 3.3) $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ (resp. $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$).

113 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}$.

114 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sin 2v}{u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin 2v}{u^2}$, $u \neq 0$.

115 Návod: Derivujte rovnosť $z = x^2 + y^2$ podľa x, berúc do úvahy, že $y = y(x)$ je funkcia určená implicitne rovnicou $x^2 - xy + y^2 = 1$; deriváciu $\frac{dy}{dx}$ hľadajte na základe vety 3.3. a dosaďte ju do výrazu pre $\frac{dz}{dx}$. Ten istý postup zopakujte pre funkciu $\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}$; $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4x-2y}{x-2y} + \frac{6x}{(x-2y)^3}$.

116 Návod: Použite metódu matematickej indukcie. Pri dôkaze pre $n = 1$ postupujte nasledovne: a) derivujte podľa y funkciu $u = f(z)$ ako zloženú funkciu; b) nájdite na základe vety 3.2. parciálne derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, vyjadrite $\frac{\partial z}{\partial y}$ pomocou $\frac{\partial z}{\partial x}$ a dosaďte to do získaného výrazu v a). Predpokladajte, že Lagrangeov vzorec platí pre $n = k$: $\frac{\partial^k u}{\partial y^k} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left\{ [\varphi(z)]^k \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$ a dokážte jeho platnosť pre $n = k+1$ a to tým spôsobom, že derivujete poslednú rovnosť podľa y a upravíte $\frac{\partial^{k+1} u}{\partial y^{k+1}}$, použijúc výraz pre $\frac{\partial z}{\partial y}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial y}$), ktoré ste našli v prípade $n = 1$.

117 Návod: Parciálne derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ hľadáte podľa vety 3.2., pričom $F(x, y, z) = \Phi(x - az, y - bz)$ je zložená funkcia. Preto parciálne derivácie F'_x, F'_y, F'_z treba hľadať ako derivácie zloženej funkcie (odsek 2.4. z 2.).

118 Návod: Derivujte 1. rovnicu podľa x (resp. podľa y), berúc do úvahy, že z a α sú funkcie x a y. Tak dostanete algebraickú rovnicu vzhľadom na $\frac{\partial z}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial z}{\partial y}$), ktorú po úprave a využiti 2. rovnice ľahko rozriešite.

119 Návod: Derivujte 1. rovnicu podľa x (resp. podľa y), berúc do úvahy, že z je funkcia x a y a f je zložená funkcia premenných x a y. Tak dostanete algebraickú rovnicu vzhľadom na $\frac{\partial z}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial z}{\partial y}$), v ktorej koeficient pri $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$) sa rovná 0 na základe 2. rovnice.

120 Návod: Berúc do úvahy 1. rovnicu systému, nájdete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, pritom sa využije 2. rovnica systému.

121 Návod: Uvažujte zloženú funkciu premennej t: $u(t) = y(x)$, kde $x = e^t$. Postupným derivovaním funkcie $u(t)$ vyjadrite derivácie $y'(x)$, $y''(x)$ pomocou derivácii $u'(t)$, $u''(t)$ funkcie $u(t)$. Nájdené výrazy pre $y'(x)$, $y''(x)$ a $x = e^t$ dosadíte do danej rovnice. Tak dostanete transformovanú rovnicu: $\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0$.

122 $\frac{d^3u}{dt^3} - 3\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} - 6u(t) = 0$. Návod: Pretože $t = \ln|x|$, $|x| = e^t$. Ďalej postupujeme, ako v úlohe 121.

123 $\frac{d^2u}{dt^2} + n^2u = 0$.

124 $\frac{d^2u}{dt^2} + m^2u = 0$. Návod: Úlohy riešime podobným spôsobom, ako úlohu 121.

125 Návod: Dvojnásobným derivovaním výrazu pre y, v ktorom u je funkcia premennej x, dostanete výrazy pre y' a y'', ktoré dosadíte do danej rovnice. Tak dostanete rovnicu: $u'' \left[g(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x)\right] u = 0$.

126 $u''(t) + u'(t)\,(3 + u(t)) + 2u(t) = 0$. Návod: Pre vyjadrenie $\frac{dy}{dx}$ v nových premenných využijeme vzorec, uvedený v odseku 1, pričom $x = f(t)$, $y = g(t)$, kde $g(t)$ je súčin funkcií premennej t. Tak dostaneme $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$. Ďalej derivujeme získanú rovnosť pre $\frac{dy}{dx}$ podľa t, pričom ľavú stranu derivujeme ako zloženú funkciu premennej t (vnútorná zložka je $x = e^t$). Výrazy pre x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ v nových premenných dosadíme do danej rovnice.

$\boxed{\mathbf{127}}$ $u''(t) + 8u\left(u'(t)\right)^3 = 0$. Návod: Postupujeme tak isto ako v úlohe 126.

$\boxed{\mathbf{128}}$ $u''(t) - u'(t) = \frac{A}{(a-b)^2}u(t)$. Návod: Z druhej rovnosti vyjadrite x ako funkciu t a potom podľa toho y ako funkciu t. Ďalej postupujte tak, ako v úlohe 126.

$\boxed{\mathbf{130}}$ Návod: Pre vyjadrenie $\frac{dy}{dx}$ pomocou nových premenných r a φ použite vzorec z odseku 4.1. a vezmite do úvahy, že f a g sú súčiny funkcií premennej $\varphi : f(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, g(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$. Preto sa derivácia $\frac{dy}{dx}$ vyjadrí v nových premenných vzorcom, uvedeným v návode k úlohe 126. Po dosadení nájdeného výrazu pre $\frac{dy}{dx}$ a výrazov pre x a y do danej rovnice dostanete algebraickú rovnicu vzhľadom na deriváciu $\frac{dr}{d\varphi}$. Výsledok: $\frac{dr}{d\varphi} = r$.

$\boxed{\mathbf{131}}$ $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2$.

$\boxed{\mathbf{132}}$ $r\left[r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right] = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^3$. Návod: Postup riešenia je podobný, ako v úlohe 126, s tým rozdielom, že nová nezávislá premenná je tu φ.

$\boxed{\mathbf{133}}$ $\frac{dr}{d\varphi}.\frac{1}{r}$.

$\boxed{\mathbf{134}}$ Návod: Funkcia z je zložená funkcia premenných x a y, t.j. $z = z(\xi, \eta)$, kde $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Podľa pravidla derivovania zloženej funkcie vyjadrite parciálne derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial z}{\partial y}$) pomocou parciálnych derivácií $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ a $\frac{\partial z}{\partial \eta}$. Dosadením do danej rovnice dostanete parciálnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu $\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$. Jej integrovaním podľa η dostanete $z = \varphi(\xi) = \varphi(x + y)$, kde φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia.

$\boxed{\mathbf{135}}$ Pozri návod na riešenie úlohy 134. $z(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$, kde φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia.

$\boxed{\mathbf{136}}$ Návod: Tu pri derivovaní zloženej funkcie $z = z(\xi, \eta)$, kde $\xi = x$, $\eta = y - bz$, podľa x (resp. podľa y) treba brať do úvahy, že v druhej zložke $\eta = y - bz$ je z funkciou x a y. Riešenie rovnice je: $z(x, y) = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz)$, kde φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia.

$\boxed{\mathbf{137}}$ Návod: Podobným spôsobom, ako v úlohe 134 vyjadríme derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ pomocou derivácií $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ a $\frac{\partial z}{\partial \eta}$. Dosadením do danej rovnice dostaneme: $\xi\frac{\partial z}{\partial \xi} = z$ alebo $\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{z} = \frac{1}{\xi}$, odkiaľ integrovaním podľa ξ máme $\ln|z(\xi, \eta)| = \ln|\xi| + \ln|\varphi(\eta)|$. Teda: $z = \xi\varphi(\eta) = x\varphi(\frac{y}{x})$, kde φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia.

$\boxed{\mathbf{138}}$ Návod: Podľa pravidla derivovania zloženej funkcie $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ (tu sú x a y funkcie t) a využitím rovnosti $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ nájdete výraz pre $r^2\frac{d\varphi}{dt}$. Derivovaním tohto výrazu ako zloženej funkcie t dostanete vyjadrenie w v premenných r a φ: $w = \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$.

$\boxed{\mathbf{139.}}$ Návod: Položte $z = z(u, v)$, kde u a v sú uvedené v úlohe funkcie premenných x a y. Podľa pravidla derivovania zloženej funkcie nájdete výrazy pre $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$. Berúc do úvahy, že $x = e^u$, $y = \sinh v$ (hyperbolický sínus -v), vyjadrite $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ v nových premenných. $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = e^u \sinh v$.

140 $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

141 Návod: Postupujte podľa návodu na riešenie úlohy 139 s tým rozdielom, že výraz pre u a v obsahuje funkciu z premenných x a y. Nájdete vyjadrenie $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ pomocou parciálnych derivácií $\frac{\partial z}{\partial u}$ a $\frac{\partial z}{\partial v}$. Pri dosadení do danej rovnice využite ešte to, že $2x = u + z^2$, $\frac{y}{z} = v$, $\frac{x}{z} = \frac{u+z^2}{2z}$. $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{z}{v} \cdot \frac{u+z^2}{z^2-u}$ $(z^2 \neq u)$.

142 $3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$. Návod: Uvažujte zloženú funkciu premenných x a y: $z = z(u, v)$, kde $u = x + 2y + 2$, $v = x - y - 1$. Dvojnásobným derivovaním tejto funkcie podľa pravidla derivovania zloženej funkcie vyjadrite všetky v rovnici uvedené parciálne derivácie z podľa premenných x a y cez parciálne derivácie funkcie z podľa premenných u a v.

143 $a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0$.

144 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$.

145 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + a^2 e^{2u} z = 0$. Návod: Pri riešení úlohy postupujete, ako je uvedené v odseku 4.2.

146 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{2}{u(4-uv)} \frac{\partial z}{\partial v}$.

147 $(u^2 - v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = v\frac{\partial z}{\partial u}$.

148 $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{2u}{u^2+v^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$.

149 a) $\triangle u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}$; b) $\triangle(\triangle u) = \frac{d^4 u}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 u}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{du}{dr}$.

150 $w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial w}{x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$.

151 $w = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2+v^2}$, $u^2 + v^2 \neq 0$. Návod: Postup riešenia je uvedený v odseku 4.2.

152 $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{\partial v}$, $v \neq 0$. Návod: Položte v rovniciach (3) z odseku 4.3. $w = x$, $u = y - z$, $v = y + z$. Potom totálny diferenciál funkcie x $dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$, pričom

$$du = -\frac{\partial z}{\partial x}dx + \left(1 - \frac{\partial z}{\partial y}\right)dy,$$
$$dv = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)dy.$$

Po dosadení týchto výrazov do vzťahu pre dx a po porovnaní koeficientov pri dx a dy dostanete algebraické rovnice s neznámymi $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$. Ich rozriešením dostanete vyjadrenie parciálnych derivácií $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ pomocou parciálnych derivácií $\frac{\partial x}{\partial u}$ a $\frac{\partial x}{\partial v}$.

153 $A = \frac{x^2u^2 - 2xu^3 + u^4\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right)}{x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u} + v\frac{\partial x}{\partial v}\right)}$, $x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u} + v\frac{\partial x}{\partial v}\right) \neq 0$. Návod: Pozri návod na riešenie úlohy 152.

$\boxed{\mathbf{154}}$ $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$. Návod: Uvažujte v zloženej funkcii premenných $x, y, z : u = u(\xi, \eta, \zeta)$, kde $\xi = x,\ \eta = y - x,\ \zeta = z - x$ a použite pravidlo derivovania zloženej funkcie podľa x, podľa y, resp. podľa z.

$\boxed{\mathbf{155}}$ $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$. Návod: Z 3. rovnosti máme $z = e^{w+x+y}$, kde $w = w(u, v)$ je zložená funkcia premenných x a y s vnútornými zložkami u a v. Derivovaním podľa x (resp. podľa y) danej rovnosti (s využitím pravidla derivovania zloženej funkcie pre w) a dosadením do získaných vzťahov pre $\frac{\partial z}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial lz}{\partial y}$) nájdených parciálnych derivácií $\frac{\partial u}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial v}{\partial x}$) a $\frac{\partial u}{\partial y}$ (resp. $\frac{\partial v}{\partial y}$) podľa prvých dvoch rovností dostanete vyjadrenie parciálnych derivácií $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ v nových premenných.

$\boxed{\mathbf{156}}$ $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$.

$\boxed{\mathbf{157}}$ $\left(u\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(v\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = w^2 \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}$. Návod: Derivovaním rovnosti $z = we^w$ podľa x (resp. podľa y), kde $w = w(u, v)$ a u, v sú funkcie x a y určené implicitne systémom rovníc $x = ue^w,\ y = ve^w$, podľa pravidla derivovania zloženej funkcie dostanete

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^w(w+1)\left(\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^w(w+1)\left(\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Derivácie $\frac{\partial u}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial y}$) a $\frac{\partial v}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial v}{\partial y}$) nájdete podľa vety 3.3. o existencii a derivovaní funkcie u a v daných systémom uvedených rovníc.

$\boxed{\mathbf{158}}$ $\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\xi\eta}{\zeta}$. Návod: Zderivujete rovnosť $u = wz$ podľa x (resp. podľa y, resp. podľa z), berúc do úvahy, že w je zložená funkcia premenných x, y a z s vnútornými zložkami $\xi = \frac{x}{z},\ \eta = \frac{y}{z}$ a $\zeta = z$.

$\boxed{\mathbf{159}}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$. Návod: Z tretej rovnice máme $z = \frac{w+y}{x}$, pričom $w = w(u, v)$, kde $u = \frac{x}{y},\ v = x$ je zložená funkcia premenných x a y. Dvojnásobným derivovaním tejto rovnosti podľa y (s použitím pravidla derivovania zloženej funkcie pre w), vyjadrite parciálne derivácie $\frac{\partial z}{\partial y}$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ pomocou nových premenných u, v a w.

$\boxed{\mathbf{160}}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\mathbf{161}}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2w$.

$\boxed{\mathbf{162}}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = 0$. Návod: Postup riešenia je naznačený v odseku 4.3.

$\boxed{\mathbf{163}}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} + (e^w - 1)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2\right]$.

$\boxed{\mathbf{164}}$ $w = \frac{\partial u}{\partial \varphi}$. Návod: Postupom uvedeným v odseku 4.2. dostanete (nezávislé premenné sú r a φ):

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r},$$
$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

pričom $\frac{\partial x}{\partial r}$ (resp. $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$), $\frac{\partial y}{\partial r}$ (resp. $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$) dostanete derivovaním podľa r (resp. podľa φ) daných vzťahov pre x a y. Rozriešením získaného systému rovníc vzhľadom na $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}$ dostaneme, že

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r}\left(r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r} - \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r}\left(r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r} + \cos\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

Ďalej dosaďte tieto výrazy a $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ do výrazu w.

165. $w = r\frac{\partial u}{\partial r}$.

166 $w = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$. Návod: Derivovaním 1. rovnosti podľa r a 2. rovnosti podľa φ, ktoré sú uvedené na začiatku návodu k úlohe 164, podľa pravidla derivovania zloženej funkcie nájdeme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.\frac{\partial x}{\partial r}.\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial^2 y}{\partial r^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.\frac{\partial x}{\partial \varphi}.\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}.$$

Do týchto rovností dosadíme nájdené výrazy pre $\frac{\partial u}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial y}$) v nových premenných v úlohe 164 a výrazy pre $\frac{\partial x}{\partial r}$ (resp. $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$), $\frac{\partial y}{\partial r}$ (resp. $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$), $\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$ (resp. $\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}$), $\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$ (resp. $\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}$) nájdené na základe rovnosti $x = \cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Spočítaním prvého získaného vzťahu vynásobeného r^2 s druhým vzťahom dostanete algebraickú rovnicu s neznámou w.

167 Návod: Ak budete postupovať podľa návodu k úlohe 166, dostanete $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi$. Vynásobením tohto výrazu r^2 a berúc do úvahy, že $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ nájdete, že $w = r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$.

168 Návod: Postupom uvedeným v návode k úlohe 166 vypočítate $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = r^2\sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2r^2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - r\frac{\partial u}{\partial r}$. Berúc do úvahy tento vzťah, výsledok z úlohy 165 a vzťahy $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dostanete $w = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$.

169 $I = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}.\frac{\partial v}{\partial r}\right)$. Návod: Postup riešenia je taký istý, ako v úlohe 164.

170 Návod: Zámenu premenných urobte ako kompozíciu dvoch čiastočných zámen: $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = Z$ a $R = r\sin\theta$, $\varphi = \varphi$, $z = r\cos\theta$. Pritom môžete využiť výsledky, ktoré ste dostali pri riešení úlohy 164 (tu len bude iné označenie premenných).

$$\triangle_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2,$$
$$\triangle_2 u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right].$$

171 Návod: a) Pod riešením budeme rozumieť spojitú funkciu $u(x,t)$, ktorá má spojité parciálne derivácie až do 2. rádu včítane v nejakej oblasti $G \subset R^2$, t.j. $u \in C^2(G,R)$, a ktorá vyhovuje danej rovnici.
b) Dvojnásobným derivovaním zloženej funkcie $u = u(\xi,\eta)$, kde $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, podľa premennej x (resp. podľa t) dostaneme vyjadrenie parciálnej derivácie $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$) pomocou derivácií $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$. Dosadením týchto výrazov do danej rovnice nájdete, že $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Ak zintegrujete túto rovnicu najprv podľa ξ a potom výsledok podľa η, vypočítate $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

172 $f(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.

173 $f(x,y,z) = 3\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - \right.$ $\left. -(y-1)(z-1)\right] + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1)$.

174 Návod: V Taylorovom vzorci (1) položte $x_1 = 1 + h$, $x_2 = -1 + k$ a $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = -1$. $f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1) = h - 3k - h^2 - 2hk + k^2 + h^2k + hk^2$.

175 $1 + (x-1) + 2(x-1)(y-1)$.

176 $1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{8}(x^2+y^2)^2$.

177 a) $\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{x^2 - y^2}{2}$; b) arctg $\frac{1+x+y}{1-x+y} \approx \frac{\pi}{4} + x - xy$.

178 $f(x,y) = 1 + mx + nx + \frac{1}{2}\left(m(m+1)x^2 + 2mnxy + n(n-1)y^2\right) + \ldots$.

179 Návod: Pretože $1 + x + y$ je lineárna funkcia, tvar diferenciálu ľubovoľného rádu sa zachováva (pozri úlohu 82). Preto

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{m=0}^{n} \frac{n! x^m y^{n-m}}{m!(n-m)!} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n (n-1)!}{m!(n-m)!} x^m y^{n-m},$$
$$|x+y| < 1.$$

180 $e^x \sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^m y^{2n+1}}{m!(2n+1)!}$ $(|x| < \infty,\ |y| < \infty)$. Návod: Maclaurinov rad pre funkciu

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(0,0),$$

možno zapísať vo tvare:

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(0,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{n! x^m y^{n-m}}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m y^{n-m}}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}.$$

Kladúc $n-m=k$, dostaneme

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m y^k}{m!k!}\frac{\partial^{m+k}f(0,0)}{\partial x^m\partial y^k}. \qquad (*)$$

Pre danú funkciu $f(x,y)=e^x\sin y$, $\frac{\partial^{m+k}f}{\partial x^m\partial y^k}(x,y)=e^x\sin(y+k\frac{\pi}{2})$. Vypočítajte $\frac{\partial^{m+k}f}{\partial x^m\partial y^k}$ v bode $(0,0)$ a dosaďte do vzorca (*).

181 $e^x\cos y=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^m y^{2n}}{m!(2n)!}$, $(|x|<\infty,\ |y|<\infty)$.

182 Návod: Využiť známy rozvoj $\sin u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}u^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $|u|<\infty$. Potom $\sin(x^2+y^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x^2+y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $x^2+y^2<\infty$.

184 Singulárny bod je $(0,0)$, pričom môžu nastať tieto tri prípady: a) ak $a<0$, bod $(0,0)$ je izolovaný singulárny bod; b) ak $a>0$, je to uzlový bod; c) ak $a=0$, je to bod vratu ($y=\pm x^{3/2}$).

185 a) bod $(0,0)$ je uzlový singulárny bod; b) bod $(0,0)$ je izolovaný singulárny bod; c) bod $(0,0)$ je uzlový singulárny bod.

186 a) bod $(0,0)$ je bodom samodotyku; b) bod $(0,0)$ je bod vratu 2. druhu.

187 $x+5y-z-5=0$, $\frac{x-5}{1}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-5}{-1}$.

188 $x+4y-4z-\frac{11}{2}=0$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{4}=\frac{z+\frac{3}{8}}{-4}$.

189 $x+y+z-3=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$.

190 $2x+y+z=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{1}$.

191 $12x-9y+2z-9=0$, $\frac{x-3}{12}=\frac{y-5}{-9}=\frac{z-9}{2}$.

192 $x-y+\sqrt{2}z-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=0$, $\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}$.

193 $(e+1)x-(e+\pi)y+(e+1)z=0$, $\frac{x-e}{e+1}=\frac{y-(e+1)}{-(e+\pi)}=\frac{z-\pi}{e+1}$.

194 $x-y+2z-\sqrt{\frac{11}{2}}=0$, $x-y+2z+\sqrt{\frac{11}{2}}=0$. Návod: Označte $F(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-1$. Body dotyku nájdete z podmienky rovnobežnosti dotykovej roviny a danej roviny: $\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{1}=\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{-1}=\frac{F'_z(x_0,y_0,z_0)}{2}=k$, kde (x_0,y_0,z_0) je hľadaný bod dotyku.

195 Návod: Položte $F(x,y,z)=(x+z)^2+(y-z)^2-18$. Potom smernice normály v danom bode (x,y,z) plochy budú: $m=F'_x$, $n=F'_y$, $p=F'_z$. Ak vezmeme do úvahy rovnicu roviny v tvare $Ax+By+Cz=0$, tak rovnica roviny xOy je $z=0$, t.j. $A=B=D=0, C=1$. Z podmienky rovnobežnosti priamky a roviny $Am+Bn+Cp=0$ dostanete rovnice, ktoré určujú hľadané geometrické miesto bodov.
Geometrické miesto bodov je určené rovnicami $x+z=y-z=\pm3$.

196 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\delta_1 = 2,\ \delta_2 = -6,\ \delta_3 = -21.$

197 Kvadratická forma $Q(x_1, x_2, x_3)$ je kladne definitná.

198 $z_{\text{l.min}} = z\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{108}.$

199 $z_{\text{l.min}} = z\,(1,1) = -1.$

200 $z_{\text{l.min}} = z\,(-1,-1) = z\,(1,1) = -2.$

201 $z_{\text{l.max}} = z\,(0,0) = 0,\ z_{\text{l.min}} = z\left(\frac{1}{2}, 1\right) = z\left(\frac{1}{2}, -1\right) = z\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = z\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{9}{8}.$

202 $z_{\text{l.max}} = z\,(2,3) = 108$, v bodoch $(0,y)$, kde $-\infty < y < +\infty$ alebo $6 < y < +\infty$ má f maximum; v bodoch $(0,y)$, kde $0 < y < 6$ má f minimum; v bodoch $(0,0),\ (0,6),\ (x,0)$, kde $-\infty < x < +\infty$ nemá f extrémy.

203 $z_{\text{l.min}} = z\,(5,2) = 30.$

204 $z_{\text{l.max}} = z\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = z\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right) = \frac{ab}{3\sqrt{3}},\ z_{\text{l.min}} = z\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right) = z\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}.$

205 Stacionárne body neexistujú; v $(0,0)$ neexistujú parciálne derivácie, $z\,(x,y) - z\,(0,0) = -\sqrt{x^2+y^2} < 0,\ z_{\max} = z\,(0,0) = 1.$

206 $z_{\text{l.min}} = 2r\pi - 2 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6},\ r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ z_{\text{l.max}} = (2r-1)\pi + 2 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6},\ r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ stacionárne body dostanete riešením rovníc $z'_x = 0,\ z'_y = 0$, ktoré upravte takto:
$1 - 2\sin(x-y) + 2\sin(x+y) = 0$
$1 + 2\sin(x-y) + 2\sin(x+y) = 0$ odkiaľ
$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + (k+m)\frac{\pi}{2}$
$y = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + (k-m)\frac{\pi}{2},\ k, m = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots,$ uvažujte a) $k = 2r,\ m = 2l - 1$ a b) $k = 2r - 1,\ m = 2l,\ r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

207 $z_{\text{l.min}} = z\,(0,0) = 0,\ z_{\text{l.max}} = e^{-1}$, kde body (x,y) ležia na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ (zaveďte substitúciu $t = x^2 + y^2$ a nájdite lokálne extrémy funkcie $z = te^{-t}$).

208 $z_{\text{l.min}} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -\frac{1}{2e}; z_{\text{l.max}} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \frac{1}{2e}.$

209 f nemá lokálne extrémy.

210 $z_{\text{l.min}} = z(x,0) = 0$, kde $0 < x < 4$; $z_{\text{l.max}} = z(x,0) = 0$, kde $(x < 0) \vee (x > 4),\ z_{\text{l.max}} = z(1,2) = 4.$

211 $u_{\text{l.min}} = u\,(0, 0-1) = 2.$

212 $u_{\text{l.min}} = u\,(1,-1,1) = 1.$

213 $u_{\text{l.min}} = u(-1,-2,3) = -14.$

214 $u_{\text{l.min}} = u\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{27}.$

215 $u_{\text{l.min}} = u(24,-144,-1) = -6913.$

216 $u_{\min} = u\left(\frac{1}{2},1,1\right) = 4.$

217 $u_{\text{l.min}} = u\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}};\ u_{\text{l.max}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

218 $u_{\text{l.max}} = u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.$

219 $u_{\text{l.max}} = u\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}.$

220 $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4};\ g_{\min} = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}.$

221 $f_{\text{l.min}} = f(-3) = 6;\ g_{\text{l.max}} = g(3) = -6.$

222 $f_{\text{l.max}} = f\left(-6-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = -6+\frac{2}{3\sqrt{3}};\ f_{\text{l.min}} = f\left(-6+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = -6-\frac{2}{3\sqrt{3}}.$

223 $f_{\text{l.max}} = f\left(0,\frac{16}{7}\right) = -\frac{8}{7};\ g_{\text{l.min}} = f(0,-2) = 1.$

224 $f_{\text{l.min}} = f(0,0) = -\sqrt{2};\ f_{\text{l.max}} = f(1,1) = f(-1,-1) = \sqrt{1+\sqrt{3}};\ g_{\text{l.min}} = g(1,1) = g(-1,-1) = -\sqrt{1+\sqrt{3}};\ g_{\text{l.max}} = g(0,0) = \sqrt{2}.$

225 $f_{\text{l.max}} = f\left(-6,6\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3};\ g_{\text{l.min}} = f\left(-6,-6\sqrt{3}\right) = -12\sqrt{3}.$

226 $z_{\min} = z\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$

227 $z_{\min} = z\left(\sqrt{2}a,\sqrt{2}a\right) = 2\sqrt{2}a;\ z_{\max} = a\left(-\sqrt{2}a,-\sqrt{2}a\right) = -2\sqrt{2}a.$

228 $z_{\min} = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2};\ z_{\max} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

229 $z_{\min} = z\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3};\ z_{\max} = z\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$

230 $u_{\min} = u\left(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}.$

231 Nemá extrémy.

232 $u_{\min} = u\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right) = -3;\ u_{\max} = u\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = 3.$

233 $u_{\max} = u(1,1,1) = 1.$

234 $u_{\min} = u(-1,0,0) = u(1,0,0) = a^{-2};\ u_{\max} = u(0,0,-1) = u(0,0,1) = c^{-2}.$

235 $u_{\min} = u(-1,-1,-1) = u(-1,1,1) = u(1,-1,1) = u(1,1,-1) = -01;\ u_{\max} = u(1,1,1) = u(1,-1,-1) = u(-1,1,-1) = u(-1,-1,1) = 1.$

236 $u_{\min} = u(-1,1,0) = 0.$

237 $u_{\min} = u(2,2,1) = u(2,1,2) = u(1,2,2) = 4;\ u_{\max} = u\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right) = u\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right) = u\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) = 4\frac{4}{27}.$

$\boxed{\mathbf{238}}$ $r = 3,\ h = 6.$

$\boxed{\mathbf{239}}$ $x = \frac{2a}{\sqrt{3}},\ y = \frac{2b}{\sqrt{3}},\ z = \frac{2c}{\sqrt{3}}.$

$\boxed{\mathbf{240}}$ $\varrho_{\min} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$

$\boxed{\mathbf{241}}$ Zostrojte funkciu $\Phi = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \lambda\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)$ a zostavte systém rovníc

$$\begin{array}{l}
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1} = (a_{11}-\lambda)\,x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)\,x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_n} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\,x_n = 0
\end{array} \tag{1}$$

Systém (1) má netriviálne riešenie $\Longleftrightarrow$ ak λ je koreňom rovnice

$$\det\ (A - \lambda I) = 0, \tag{2}$$

kde A je matica systému (1) a I je jednotková matica.
Prepíšte systém (1) do tvaru

$$Ax = \lambda x. \tag{3}$$

Dokážte, že čísla λ sú reálne. Nech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sú korene rovnice (1). Potom pre každé $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$ zo systému (1) pri podmienke $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ nájdite stacionárne body $\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ak vynásobíte rovnice zo systému (1) s $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a sčítate ich dostanete

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.$$

Ak beriete do úvahy rovnicu väzby dostanete rovnosť $u\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda$, ktorá v stacionárnych bodoch má tvar $u\left(x_i^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right) = \lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Odtiaľ vyplýva, že $u_{\max} = \max\limits_{1\le i\le u} \lambda_i,\ u_{\min} = \min\limits_{1\le i\le u} \lambda_i.$

$\boxed{\mathbf{242}}$ Označte $u = \frac{x^n+y^n}{2}$, $x + y = s$ a utvorte funkciu Φ: $\Phi = \frac{1}{2}\,(x^n + y^n) + \lambda\,(s - x - y)$. Z rovníc $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$, $x + y = s$ dostanete: $\lambda = \frac{n}{2}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-1}$, $x = y = \frac{s}{2}$. Pretože $d^2\Phi\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) > 0$, tak $u_{\min} = u\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^n \le u(x, y)$, ak $x + y = s$, alebo $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \le \frac{x^{x^2}+y^{x^2}}{2}$.

$\boxed{\mathbf{243}}$ Utvorte funkciu Φ

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i^m + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - na\right).$$

Zo systému rovníc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} &= m x_i^{m-1} + \lambda = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i &= na, \end{aligned} \tag{1}$$

nájdete $\lambda = -ma^{m-1}$ a stacionárny bod $a^0 = (a, a, \ldots, a)$. Zistite, že $d^2\Phi(a^0) > 0$, teda $z_{\min} = na^n$.

$\boxed{\textbf{244}}$ Nájdite viazaný lokálny extrém funkcie

$$u = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{1/q} \quad \text{pri väzbe } A = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ A = \text{konštanta.}$$

Zostrojte funkciu

$$\Phi = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} . \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{1/q} + \lambda \left(A - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

a vypočítajte

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j},\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Predpokladajte, že $x_i > 0,\ a_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, vydeľte j-tú rovnosť s m-tou rovnosťou zo systému (1) a dostanete $\left(\frac{x_j}{x_m}\right)^{q-1} = \frac{a_j}{a_m}$ odkiaľ pri pevnom m dostanete:

$$x_j = x_m \left(\frac{a_j}{a_m}\right)^{1/(q-1)},\ j = 1, 2, \ldots, n,\ j \neq m \tag{2}$$

a po dosadení (2) do rovnice väzby dostanete:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ inot=m}}^{n} a_i x_m \left(\frac{a_i}{a_m}\right)^{1/(q-1)} + a_m x_m = A. \tag{3}$$

Ďalej využite vzťah $\frac{q}{q-1} = p \Longrightarrow \frac{1}{q-1} = \frac{p}{q}$ a upravte (3) na tvar $\frac{x_m}{a_m^{1/(q-1)}} . \sum_{i=1}^{n} a_i^{q/(q-1)} = A$, z ktorého dostaneme stacionárny bod $x^{(0)}$ so súradnicami $x_m = \frac{A.a_m^{p/q}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p},\ m = 1, 2, \ldots, n$.

Vyjadrite druhý diferenciál funkcie Φ a uvážte, že z rovnice väzby vyplýva $\sum_{i=1}^{n} a_i dx_i = 0$.

V stacionárnom bode dostanete

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{q-1} dx_i\right)^2 = \left(\frac{A}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}\right)^{2(g-1)} \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i = 0.$$

Nakoniec dostanete, že $d^2\Phi\left(x^{(0)}\right) > 0$, teda v stacionárnom bode $x^{(0)}$ má funkcia u minimum $u_{\min} = A$ t.j. $u \geq A$, čo je Hölderova nerovnosť.

245 $\max\limits_M z = z(3,-4) = 125;\ \min\limits_M z = z(-3,4) = -75.$

246 $\max\limits_M z = z(0,0) = -1;\ \min\limits_M z = z(0,3) = -19.$

247 $\max\limits_M z = z(0,1) = z(1,0) = z(0,-1) = 1;\ \min\limits_M z = z(0,0) = 0.$

248 $\max\limits_M z = z(2,0) = z(-2,0) = 4;\ \min\limits_M z = z(0,-2) = z(0,2) = -4.$

249 $\max\limits_M z = z(1,0) = z(-1,0) = \dfrac{3}{2};\ \min\limits_M z = z(0,0) = 0.$

250 $\max\limits_M z = z\left(1,\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{2}{9};\ \min\limits_M z = 0$ na celej hranici množiny M.

251 $\max\limits_M u = u(0,0,10) = 300;\ \min\limits_M u = u(0,0,0) = 0.$

252 $\max\limits_M u = u\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right) = 1+\sqrt{2};\ \min\limits_M u = u\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\right) = -\dfrac{1}{2}.$

253 $\max\limits_M u = u\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right) = a^2;\ \min\limits_M u = -\dfrac{a^2}{2}$ na celej krivke
$x^2+y^2+z^2 = a^2$
$x+y+z = 0.$