2. Nevlastné parametrické integrály

A. Nevlastný parametrický integrál prvého druhu

Definícia 2.1. *Nech f je reálna funkcia definovaná na množine $< a, \infty) \times (c, d)$ a nech pre každé $y \in (c, d)$ existuje integrál $\int_a^\infty f(x, y)dx$. Potom funkciu*

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$$

nazývame nevlastným parametrickým integrálom prvého druhu.

Definícia 2.2. *Integrál $F(y)$ nazývame rovnomerne konvergentným na intervale (c, d), ak*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B(\varepsilon) > a, \text{že } \forall b > B(\varepsilon) \text{ a } \forall y \in (c, d)$$

platí

$$\left| \int_b^\infty f(x, y)dx \right| < \varepsilon.$$

Veta 2.1. *(Cauchyho kritérium.) Nevlastný parametrický integrál $F(y)$ konverguje rovnomerne na (c, d) vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje také $B(\varepsilon) > a$, že pre každé $b' > B(\varepsilon)$ a $b'' > B(\varepsilon)$ platí*

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$

pre všetky $y \in (c, d)$.

Veta 2.2. *(Weierstrassovo kritérium.) Ak existuje taká funkcia $g :< a, \infty) \to R$, že*

$$|f(x, y)| \leq g(x)$$

pre všetky $x \in< a, \infty)$ a $y \in (c, d)$ a nevlastný integrál

$$\int_a^\infty g(x)dx$$

konverguje, tak nevlastný parametrický integrál $F(y)$ konverguje absolútne a rovnomerne na intervale (c, d).

Veta 2.3. *Ak je funkcia f spojitá na množine $< a, \infty) \times (c, d)$ a integrál $F(y)$ konverguje rovnomerne na (c, d), tak funkcia $F(y)$ je spojitá na intervale (c, d).*

Veta 2.4. *Za predpokladov vety 2.3 platí*

$$\lim_{y \to y_0 \in (c,d)} \int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty f(x, y_0)dx.$$

Veta 2.5. *Ak*

1. *funkcie* f a $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sú spojité na množine* $< a, \infty) \times (c, d)$,
2. *integrál* $\int_a^\infty f(x,y)dx$ *konverguje pre všetky* $y \in (c, d)$,
3. *integrál* $\int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$ *konverguje rovnomerne na intervale* (c, d),

tak funkcia F *je diferencovateľná na* (c, d) *a platí*

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$$

pre $y \in (c, d)$.

Veta 2.6. *Ak je funkcia* f *spojitá na množine* $< a, \infty) \times < c, d >$ *a integrál* $F(y)$ *konverguje rovnomerne na* $< c, d >$, *tak*

$$\int_c^d \left[\int_a^\infty f(x,y)dx \right] dy = \int_a^\infty \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx.$$

Tento vzorec platí aj v prípade, že $d = \infty$, *ak funkcia* f *je nezáporná a spojitá na* $< a, \infty) \times < c, \infty)$, *integrály*

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx \text{ a } G(y) = \int_c^\infty f(x,y)dy$$

konvergujú a sú spojitými funkciami na intervaloch $< a, \infty)$, *resp.* $< c, \infty)$, *a aspoň jeden z integrálov*

$$\int_c^\infty \left[\int_a^\infty f(x,y)dx \right] dy \text{ alebo } \int_a^\infty \left[\int_c^\infty f(x,y)dy \right] dx$$

konverguje.

B. Nevlastný parametrický integrál druhého druhu

Definícia 2.3. *Nech* f *je reálna funkcia definovaná na množine* $< a, b) \times (c, d)$ *a nech je neohraničená na každom intervale* $(b - \delta, b) \times (c, d), \delta > 0$. *Ak pre každé* $y \in (c, d)$ *konverguje nevlastný integrál*

$$\int_a^b f(x,y)dx,$$

tak funkciu

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

nazývame nevlastným parametrickým integrálom druhého druhu.

Poznámka 2.1. Podobne ako v odseku A je možné aj v prípade nevlastného parametrického integrálu druhého druhu zaviesť pojem rovnomernej konvergencie a dokázať podobné tvrdenia ako boli tie, ktoré platili pre nevlastný parametrický integrál na neohraničenom intervale.

30. Nájdite všetky hodnoty parametra, pri ktorých konvergujú nasledujúce nevlastné parametrické integrály:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^y}$,

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xy}}{1+x^2}dx$,

c) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{x\cos x}{x^y+a^y}dx,\ a>0$,

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^q}{x^p}dx$,

e) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^y}$,

f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^y+\sin x}dx,\ y>0$.

31. Dokážte, že integrál

$$F(y)=\int_0^\infty ye^{-xy}dx$$

a) konverguje rovnomerne v ľubovoľnom intervale $< a, b >$, kde $a > 0$,
b) konverguje nerovnomerne v intervale $< 0, b >$.

32. Dokážte, že Dirichletov integrál

$$D(y)=\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}dx$$

a) konverguje rovnomerne na ľubovoľnom intervale $< a, b >$ neobsahujúcom bod $y = 0$,
b) konverguje nerovnomerne na každom intervale $< a, b >$ obsahujúcom bod $y = 0$.

33. Dokážte, že integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\cos x dx$$

rovnomerne konverguje na ľubovoľnom uzavretom intervale neobsahujúcom ± 1.

34. Zistite, či rovnomerne konverguje integrál

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^y}$$

v nasledujúcich intervaloch:

a) $1 < y_0 \le y < \infty$,
b) $1 < y < \infty$.

35. Zistite, či konvergujú rovnomerne na daných intervaloch nasledujúce integrály:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin xy dx,\ -\infty<y<\infty$,

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x\sqrt{x}}dx,\ 0<y\le A$,

c) $\displaystyle\int_1^\infty x^y e^{-x}dx,\ a\le y\le b$,

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}dx,\ -\infty<y<\infty$,

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x-y)^2+1},\ 0 \le y < \infty,$

f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx,\ 0 \le y < \infty,$

g) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-yx^2} dx,\ 0 \le y < \infty,$

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-(x-y)^2} dx,\ \alpha)\ a < y < b,\ \beta)\ -\infty < y < \infty,$

i) $\displaystyle\int_0^1 yx^{y-1} dx,\ 0 < \delta \le y < 1,$

j) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-y^2(1+x^2)} \sin y dx,\ -\infty < y < \infty,$

k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^y}{\sqrt{1-x^2}} dx,\ 0 \le y < \infty,$

l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^y} \sin \frac{1}{x} dx,\ 0 < y < 2.$

36. Dokážte, že integrál

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-(x-y)^2} dx$$

je spojitou funkciou parametra y.

37. Zistite, či sú spojité v daných intervaloch nasledujúce funkcie:

a) $\displaystyle F(y) = \int_0^\infty \frac{x}{2+x^y} dx,\ (2, \infty),$

b) $\displaystyle F(y) = \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^y} dx,\ (0, \infty),$

c) $\displaystyle F(y) = \int_0^\infty \frac{\sin\left[(1-y^2)x\right]}{x} dx,\ (-\infty, \infty),$

d) $\displaystyle F(y) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y} dx,\ (0, 2),$

e) $\displaystyle F(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{|\sin x|^y} dx,\ (0, 1),$

f) $\displaystyle F(y) = \int_0^\infty y e^{-xy^2} dx,\ (-\infty, \infty).$

38. Je prípustný prechod k limite za znakom integrálu vo výraze $\displaystyle\lim_{y\to+0} \int_0^\infty y e^{-xy} dx$?

39. Nech f je funkcia integrovateľná v intervale $(0, \infty)$. Dokážte, že platí

$$\lim_{y\to+0} \int_0^\infty e^{-xy} f(x) dx = \int_0^\infty f(x) dx.$$

40. Vypočítajte integrál

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \right] dx$$

použijúc limitný prechod za znakom integrálu.

41. Nájdite

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1},$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x) dx$, kde $f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}, & \text{ak } x > 0, \\ 0, & \text{ak } x = 0, \end{cases}$

c) $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin 2xy}{x} dx,$

d) $\lim\limits_{y\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-y^2(x^2+1)}}{x^2+1}dx.$

42. Použijúc vzorec $\int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n}, n > 0$, vypočítajte integrál $I = \int_0^1 x^{n-1}\ln^m x dx$, kde m je prirodzené číslo.

43. Pomocou rovností $\int_0^\infty e^{-xy}dx = \frac{1}{y}, y > 0$, vypočítajte $\int_0^\infty e^{-xy}x^{n-1}dx$, kde n je celé číslo.

44. Pomocou rovnosti $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+y^2}dx = \frac{\pi}{2y}$ vypočítajte $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+y^2)^n}dx$, kde n je celé číslo.

45. Dokážte, že Dirichletov integrál

$$D(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}dx$$

má pre $y \neq 0$ deriváciu, avšak nedá sa nájsť pomocou Leibnizovho vzorca.

46. Dokážte správnosť Froullaniho vzorca

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a},\ a > 0,\ b > 0,$$

kde f je spojitá funkcia a integrál $\int_A^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ má zmysel pre ľubovoľné $A > 0$.

47. Pomocou Froullaniho vzorca vypočítajte nasledujúce integrály, v ktorých $a > 0, b > 0$:

a) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx,$ b) $\int_0^\infty \frac{\sin ax - \sin bx}{x}dx,$

c) $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx,$ d) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\ ax - \operatorname{arctg}\ bx}{x}dx.$

48. Pomocou derivovania podľa parametra vypočítajte nasledujúce nevlastné integrály:

a) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx,\ a > 0,\ b > 0,$ b) $\int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right)^2 dx,\ a > 0,\ b > 0,$

c) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx dx,\ a > 0,\ b > 0,$ d) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos mx dx,\ a > 0,\ b > 0,$

e) $\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx,\ |a| \leq 1,$ f) $\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ |a| \leq 1,$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\right)\frac{dx}{\sin x},\ |a| < 1,$ h) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\ ax \operatorname{arctg}\ bx}{x^2}dx,$

i) $\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+a^2)}{x^2+b^2}dx,$ j) $\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)\ln(1+b^2x^2)}{x^4}dx.$

49. Dokážte, že funkcia

$$y(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

vyhovuje diferenciálnej rovnici

$$xy'' - 2ny' + xy = 1.$$

50. Vypočítajte Eulerov-Poissonov integrál

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

pomocou vzťahu

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty x e^{-x^2 y^2} dy.$$

51. Pomocou Eulerovho-Poissonovho integrálu vypočítajte:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+2bx+c)} dx,\ a>0,\ ac-b^2>0,$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} \text{ch } bx dx,\ a>0,$

c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx,\ a>0,$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2} dx,\ a>0,\ b>0,$

e) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx dx,\ a>0,$ f) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-ax^2} \sin bx dx,\ a>0.$

52. Vyjdúc z integrálu

$$I(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx, a \geq 0, b \in R,$$

vypočítajte Dirichletov integrál

$$D(b) = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx.$$

53. Pomocou Dirichletovho integrálu a Froullaniho vzorca vypočítajte:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-\cos bx}{x^2} dx,\ a>0,$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx,\ a,b \in R,$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx,\ a \neq \pm b,$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 ax}{x} dx,\ a \in R,$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx,\ a \in R,$ f) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^3 dx,\ a \in R,$

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx,$ h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 ax - \sin^4 bx}{x} dx,\ ab \neq 0,$

i) $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x} dx.$

54. Pomocou rovnosti

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-y(1+x^2)} dy$$

vypočítajte Laplaceov integrál

$$L(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx.$$

55. Vypočítajte integrály:

a) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx,$ b) $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx,$

c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \alpha x}{ax^2+2bx+c} dx,\ a>0,\ ac-b^2>0.$

56. Pomocou rovností $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-xy^2} dy,\ x>0$, vypočítajte tzv. Fresnelove integrály

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx,$$
$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

57. Pomocou Fresnelových integrálov vypočítajte:

a) $\int_{-\infty}^\infty \sin\left(ax^2+2bx+c\right) dx,\ a \neq 0,$

b) $\int_{-\infty}^\infty \sin x^2 . \cos 2ax dx,$ c) $\int_{-\infty}^\infty \cos x^2 . \cos 2ax dx.$

58. Dokážte, že pre Laplaceovu funkciu $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ platia vzťahy:

a) $\int_0^x \Phi(at) dt = \frac{e^{-a^2x^2}-1}{a\sqrt{\pi}} + x\Phi(ax),$ b) $\int_0^\infty [1-\Phi(x)]\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$

59. Dokážte, že pre Besselovu funkciu nultého rádu $I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi$ platí:

a) $\int_0^\infty e^{-ax} I_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a>0,$

b) $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} I_0(x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{ak } a \geq 1, \\ \arcsin a, & \text{ak } |a| \leq 1, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ak } a \leq -1. \end{cases}$

60. Nájdite Laplaceovu transformáciu $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt,\ p > 0$, funkcie f, ak:

a) $f(t) = t^n$, n - prirodzené číslo,

b) $f(t) = \sqrt{t}$,

c) $f(t) = \cos t$,

d) $f(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{t}$,

e) $f(t) = \sin\left(\alpha\sqrt{t}\right)$.