LINEÁRNE TOPOLOGICKÉ PRIESTORY

1. TOPOLOGICKÉ PRIESTORY

Topologickým priestorom nazývame množinu X s daným systémom Γ jej podmnožín splňujúcim nasledujúce podmienky:

1. $\emptyset \in \Gamma, X \in \Gamma$,
2. $G_1 \in \Gamma, G_2 \in \Gamma \;\Rightarrow\; G_1 \cap G_2 \in \Gamma$,
3. $G_\alpha \in \Gamma, \alpha \in A \;\Rightarrow\; \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \Gamma$.

Posledné dve podmienky znamenajú, že Γ je uzavretá vzhľadom ku konečným prienikom a (ľubovoľným) zjednoteniam.

Prvky systému Γ sa nazývajú **otvorené množiny**, ich doplnky v X (t.j. množiny tvaru $X \backslash G, G \in \Gamma$) sa nazývajú **uzavreté množiny**. **Okolím** množiny $M \subset X$ rozumieme každú takú množinu $U_M \subset X$, pre ktorú existuje otvorená množina G s vlastnosťou $M \subset G \subset U_M$.

$\boxed{1}$ Overte, že nasledujúce dvojice (X, Γ) tvoria topologické priestory:

- X je ľubovoľná množina, Γ je systém všetkých podmnožín X (tzv. *diskrétny priestor*).
- X je ľubovoľná množina, $\Gamma = \{\emptyset, X\}$ (tzv. *indiskrétny priestor*).
- X je ľubovoľná množina, Γ pozostáva z $\emptyset$ a zo všetkých množín tvaru $X \backslash K$, kde K je konečná (alebo spočítateľná).

$\boxed{2}$ Nech je X množina a nech je pre každé $x \in X$ daný systém $\mathcal{U}(x)$ podmnožín X s nasledujúcimi vlastnosťami

(a) $X \in \mathcal{U}(x)$
(b) $U \in \mathcal{U}(x) \;\Rightarrow\; x \in U$
(c) $U \in \mathcal{U}(x), U \subset V \;\Rightarrow\; V \in U(x)$
(d) $U, V \in \mathcal{U}(x) \;\Rightarrow\; U \cap V \in \mathcal{U}(x)$
(e) $(\forall U \in \mathcal{U}(x))(\exists V \in \mathcal{U}(x))(\forall y \in V)\; U \in \mathcal{U}(y)$

Definujme systém $\Gamma_{\mathcal{U}}$ podmnožín X nasledovne: $G \in \Gamma_{\mathcal{U}} \iff (\forall x \in G)\; G \in \mathcal{U}(x)$. Ukážte, že systém $\Gamma_{\mathcal{U}}$ vyhovuje podmienkam 1 .– 3. v definícii topologického priestoru a že v tomto topologickom priestore je $\mathcal{U}(x)$ systém všetkých okolí bodu x. Ukážte tiež, že ak je (X, Γ) topologický priestor a $\mathcal{U}(x)$ je systém všetkých okolí bodu $x \in X$, potom $\mathcal{U}(x)$ vyhovuje podmienkam (a) – (e) a ak pomocou týchto systémov $\mathcal{U}(x)$, $x \in X$, definujeme topológiu $\Gamma_{\mathcal{U}}$, potom platí $\Gamma_{\mathcal{U}} = \Gamma$. Topológiu na množine X teda možno ekvivalentne zadať systémami okolí jednotlivých bodov.

Ak je $\mathcal{U}(x)$ systém okolí bodu x, potom **báza okolí** bodu x je ľubovoľný systém $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ splňujúci podmienku $(\forall U \in \mathcal{U}(x))(\exists V \in \mathcal{B}(x))\ V \subset U$. K určeniu topológie na X zrejme stačí poznať bázy okolí jednotlivých bodov. Nájdite podmienky typu (a)–(e), ktoré musí splňovať báza okolí bodu x.

Metrický priestor je dvojica (X, ϱ), kde X je množina a ϱ je **metrika** na X, t.j. $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ splňuje pre každé $x, y, z \in X$ nasledujúce podmienky

(α) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$

(β) $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y$

(γ) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$

$\boxed{3}$ Nech je (X, ϱ) metrický priestor. Definujme systém $\Gamma \subset \exp(X)$ nasledovne: $G \in \Gamma \iff (\forall x \in G)(\exists \varepsilon > 0)\ B_\varepsilon(x) \subset G$, kde $B_\varepsilon(x) = \{y \in X\,;\, \varrho(x, y) < \varepsilon\}$. Ukážte, že (X, Γ) je topologický priestor a že $\mathcal{B}(x) = \{B_{1/n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ je báza okolí bodu x.

Topologický priestor sa nazýva **metrizovateľný**, ak sa jeho topológia dá vytvoriť práve uvedeným spôsobom.

Nech je ďalej (X, Γ) topologický priestor. **Uzáver** $\overline{M}$ množiny M je najmenšia uzavretá množina obsahujúca M. **Vnútro** $\operatorname{int}(M)$ množiny M je najväčšia otvorená podmnožina M. **Hranica** množiny M je definovaná nasledovne: $\partial M = \overline{M} \setminus \operatorname{int}(M)$.

Množina $M \subset X$ je **hustá** v X, ak je jej uzáver celé X. Priestor X sa nazýva **separabilný**, ak existuje spočítateľná množina $M \subset X$, ktorá je v ňom hustá.

Hovoríme, že postupnosť prvkov $x_n \in X$ **konverguje** k prvku $x \in X$ (píšeme $x_n \to x$), ak pre ľubovoľné okolie U bodu x existuje n_o také, že $x_n \in U$ pre $n \geq n_o$.

$\boxed{4}$ Nech je (X, ϱ) metrický priestor, $M \subset X$. Dokážte, že platí

(a) $\overline{M} = \{x \in X\,;\, (\exists x_n \in M)\ x_n \to x\}$

(b) $\operatorname{int}(M) = \{x \in X\,;\, (\exists \varepsilon > 0)\ B_\varepsilon(x) \subset M\}$

(c) $\partial M = \{x \in X\,;\, (\exists x_n \in M)(\exists y_n \in X \setminus M)\ x_n \to x,\ y_n \to x\}$

(d) $x_n \to x,\ x_n \to y \ \Rightarrow\ x = y$

(e) Postupnosť $\{x_n\}$ konverguje k x, práve keď $\varrho(x_n, x) \to 0$.

$\boxed{5}$ Nech $X = [0, 1]$ s topológiou definovanou nasledovne:

α) $F \subset X$ je uzavretá, práve keď je konečná alebo $F = X$. Ukážte, že potom je každá nekonečná množina $A \subset X$ hustá v X (t.j. $\overline{A} = X$). Ďalej ukážte, že pre každé $x \in X$ a každú postupnosť $\{x_n\} \subset X$ rôznych prvkov platí $x_n \to x$. Vzhľadom k predošlému cvičeniu (d) teda X nie je metrizovateľný.

β) $F \subset X$ je uzavretá, práve keď je (nanajvýš) spočítateľná alebo $F = X$. Potom je každá nespočítateľná množina $A \subset X$ hustá v X, ale pre žiadne $x \in X \backslash A$ neexistuje postupnosť $\{x_n\} \subset A$ tak, aby $x_n \to x$. Dokážte. Vzhľadom k predošlému cvičeniu (a) teda X nie je metrizovateľný.

γ) topológia je daná metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$.

$\boxed{6}$ Z predošlého príkladu vidno, že obecne neplatí rovnosť $\overline{M} = \{x \in X\,;\, (\exists x_n \in M)\ x_n \to x\}$. Môžeme však zaviesť pojem **usmerneného súboru** ako množiny $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ prvkov z X, kde indexová množina A je usporiadaná (t.j. máme na nej definovanú reflexívnu, antisymetrickú a tranzitívnu reláciu $\leq$) a každé jej dva prvky majú horný odhad (t.j. $(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in A)(\exists \alpha \in A)\ \alpha_1 \leq \alpha,\ \alpha_2 \leq \alpha$). Povieme, že usmernený súbor $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ **konverguje** k prvku $x \in X$ (píšeme $x_\alpha \to x$), ak pre každé okolie U bodu x existuje $\alpha_o \in A$ tak, že $x_\alpha \in U$ pre každé $\alpha \geq \alpha_o$. Ak zvolíme $A = \mathbb{N}$ s prirodzeným usporiadaním, potom dostávame ako špeciálny prípad postupnosť a jej konvergenciu. V obecnom topologickom priestore opäť platí

$$\overline{M} = \{x \in X\,;\, \text{existuje usmernený súbor } \{x_\alpha\} \subset M \text{ tak, že } x_\alpha \to x\}.$$

Dokážte. (Návod: Nech $x \in \overline{M}$. Položte $A = \mathcal{B}(x)$, kde $\mathcal{B}(x)$ je nejaká báza okolí bodu x, a pre $U_1, U_2 \in A$ definujte usporiadanie $U_1 \leq U_2 \iff_{\text{def}} U_1 \supset U_2$. Pre $U \in A$ ďalej zvoľte $x_U \in U \cap M$, potom $x_U \to x$. Opačná implikácia je jednoduchá.)

Nech X, Y sú dva topologické priestory. Zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva **spojité**, ak vzor ľubovoľnej otvorenej množiny v Y pri zobrazení f je otvorená množina v X.

Ak máme na množine X dané dva systémy otvorených množín Γ_1, Γ_2, pričom $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, potom sa topológia daná systémom Γ_1 nazýva **slabšia** (hrubšia) než topológia daná systémom Γ_2; topológia daná systémom Γ_2 sa nazýva **silnejšia** (jemnejšia) než topológia daná systémom Γ_1. Zrejme platí, že $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ práve vtedy, keď je identické zobrazenie $i : (X, \Gamma_2) \to (X, \Gamma_1)$ spojité.

$\boxed{7}$ Ak sú X, Y metrické priestory, potom je $f : X \to Y$ spojité práve vtedy, keď pre ľubovoľné $x_n, x \in X$ platí: ak $x_n \to x$ v X, potom $f(x_n) \to f(x)$ v Y. Dokážte.

$\boxed{8}$ Ukážte, že metrika $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie.

$\boxed{9}$ Uvažujme opäť topologické priestory z príkladu 5. Potom je topológia (β) aj topológia (γ) silnejšia ako topológia (α). Topológie (β) a (γ) sú navzájom neporovnateľné (t.j. žiadna z nich nie je slabšia než tá druhá). Dokážte.

Topologický priestor X sa nazýva **Hausdorffov** (tiež T_2 priestor), ak pre ľubovoľné dva body $x, y \in X$ existujú ich navzájom disjunktné okolia.

$\boxed{10}$ Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- Metrický priestor je Hausdorffov topologický priestor.
- Ak je X Hausdorffov topologický priestor a $x_n \in X$, $x_n \to x$, $x_n \to y$, potom $x = y$.
- Priestory (α) a (β) v príklade 5 nie sú Hausdorffove.

Povieme, že systém $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ otvorených množín je (otvoreným) **pokrytím** množiny M, ak $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Množina M sa nazýva **kompaktná**, ak sa z každého jej (otvoreného) pokrytia dá vybrať konečné pokrytie (t.j. pre ľubovoľné jej pokrytie $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ existuje konečne veľa indexov $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tak, že $M \subset G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_k}$). Množina M sa nazýva **relatívne kompaktná**, ak je jej uzáver kompaktná množina. Budeme písať $M_1 \subset\subset M_2$, ak je M_1 relatívne kompaktná a $\overline{M_1} \subset \operatorname{int}(M_2)$. *Podmnožina M metrického priestoru X je kompaktná práve vtedy, keď sa z každej postupnosti bodov $\{x_n\}$ v M dá vybrať podpostupnosť $\{x_{n_k}\}$, ktorá konverguje k nejakému bodu $x_o \in M$.*

$\boxed{11}$ Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktná práve vtedy, keď je uzavretá a ohraničená.

$\boxed{12}$ Nech je X kompaktný priestor a nech je $f : X \to Y$ spojité zobrazenie. Ukážte, že potom je $f(X)$ kompaktná množina v Y (špeciálne: ak $Y = \mathbb{R}$, potom f nadobúda na X svoje minimum aj maximum). Ak sú naviac (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) metrické priestory, potom je f rovnomerne spojité, t.j. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ \varrho_X(x_1, x_2) < \delta \ \Rightarrow\ \varrho_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \varepsilon$.

$\boxed{13}$ Nech je X ľubovoľný topologický priestor a nech $x_n, x \in X$, $x_n \to x$. Potom je množina $\{x_n\,; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompaktná. Dokážte.

Topologický priestor sa nazýva lokálne kompaktný, ak pre každý jeho bod existuje jeho otvorené, relatívne kompaktné okolie. Ak sa Hausdorffov lokálne kompaktný priestor dá napísť ako spočítateľné zjednotenie kompaktných množín, potom sa nazýva σ-**kompaktný**. *Lokálne kompaktný metrický priestor je σ-kompaktný práve vtedy, keď je separabilný. Každá otvorená a uzavretá podmnožina v $\mathbb{R}^n$ je σ-kompaktný metrický priestor.*

$\boxed{14}$ Nech je X σ-kompaktný priestor. Potom v ňom existuje **fundamentálna postupnosť** relatívne kompaktných otvorených množín, t.j. taká postupnosť otvorených množín $\{X_k\}$, pre ktorú platí $X_k \subset\subset X_{k+1}$ a $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X$. Dokážte.

Nech je (X, Γ) topologický priestor a $Y \subset X$. Položme $\Gamma_Y = \{G \cap Y\,;\, G \subset \Gamma\}$. Potom je (Y, Γ_Y) topologický priestor, ktorý sa nazýva **podpriestor** priestoru (X, Γ).

Nech sú X_a, $\alpha \in A$, topologické priestory, nech je X (množinový) súčin X_α a nech sú $p_\alpha : X \to X_\alpha$ príslušné projekcie. Na X potom môžeme definovať tzv. produktovú (súčinovú) topológiu ako najslabšiu topológiu na X, pri ktorej sú všetky projekcie p_α spojité. Priestor X sa potom nazýva **produkt** priestorov X_α. Ak sú G_α neprázdne otvorené množiny v X_α a $G = \prod G_\alpha$, potom je G otvorená v X práve vtedy, keď $G_\alpha = X_\alpha$ pre všetky $\alpha \in A \backslash K$, kde K je konečná. Každá neprázdna otvorená množina v X sa pritom dá napísať ako zjednotenie takýchto množín G. *Ak sú X_α kompaktné topologické priestory, potom je ich produkt opäť kompaktný priestor* (**Tichonov**).

$\boxed{15}$ Nech je indexová množina A konečná, $A = \{1, 2, \cdots, k\}$, a nech sú $X_i = (X_i, \varrho_i)$ metrické priestory ($i = 1, 2, \cdots, k$). Potom je produktová topológia na $X = \prod X_i$ metrizovateľná. Jedna z metrík vytvárajúcich túto topológiu je metrika $\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_i \varrho_i(x_i, y_i)^2}$. Dokážte.

$\boxed{16}$ Nech $X = \mathbb{R}^{[0,1]}$, t.j. X je produkt topologických priestorov $X_\alpha = \mathbb{R}$ (s euklidovskou metrikou), kde $\alpha \in A = [0, 1]$. X je teda priestor všetkých reálnych funkcií na intervale $[0, 1]$. Ukážte, že jeho (produktová) topológia je topológia bodovej konvergencie, t.j. pre $x_n, x \in X$ platí: $x_n \to x \iff x_n(t) \to x(t)$ pre každé $t \in [0, 1]$. Ďalej položme $Y_C = \{x \in X\,;\, |x(t)| \leq C \;\; \forall t \in [0, 1]\}$. Ukážte, že Y_C je kompaktná podmnožina X.

$\boxed{17}$ Nech je X opäť priestor všetkých reálnych funkcií na $[0, 1]$, ale s topológiou danou metrikou

$$\varrho(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|}.$$

Dokážte, že ide naozaj o metriku a že platí $x_n \to x \iff x_n(t) \to x(t)$ rovnomerne na $[0, 1]$, t.j. ide o topológiu rovnomernej konvergencie, ktorá je zrejme silnejšia než topológia bodovej konvergencie z predošlého cvičenia. Ďalej dokážte, že množina Y_C z predošlého cvičenia nie je kompaktná. (Návod: Položte $x_n = C \cdot \chi_{\{1/n\}}$ a ukážte, že z postupnosti $\{x_n\} \subset Y_C$ sa nedá vybrať konvergentná podpostupnosť. Ukážte tiež, že $x_n \to 0$ v topológii bodovej konvergencie.)

Nech je X metrický priestor. Postupnosť $\{x_n\}$ prvkov z X sa nazýva **cauchyovská**, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje n_o tak, že $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$ pre každé $n, m \geq n_o$. Ak má každá cauchyovská postupnosť limitu v X (t.j. existuje $x \in X$ tak, že $x_n \to x$), potom sa X nazýva **úplný** metrický priestor. Pre každý metrický priestor X existuje jeho **zúplnenie**, t.j. taký úplný metrický priestor Y, že X je jeho hustým podpriestorom.

$\boxed{18}$ Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- Uzavretý podpriestor úplného metrického priestoru je úplný metrický priestor.
- Kompaktný metrický priestor je úplný.

2. LOKÁLNE KONVEXNÉ PRIESTORY

Nech je X lineárny priestor nad $\mathbb{K}$ (t.j. nad $\mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$) a nech je X zároveň topologický priestor. X sa nazýva **lineárny topologický priestor** (LTP), ak sú operácie sčítania ($X \times X \to X$) a násobenia skalárom ($\mathbb{K} \times X \to X$) spojité. Zo spojitosti sčítania plynie, že v LTP sa ľubovoľné okolie U bodu x dá napísať v tvare $x + V$, kde V je okolie nuly, takže topológiu v LTP možno zadať bázou okolí nuly. Systém všetkých okolí bodu $x \in X$ budeme značiť symbolom $\mathcal{U}(x)$. Zo spojitosti sčítania tiež plynie, že pre každé $V \in \mathcal{U}(0)$ existuje $W \in \mathcal{U}(0)$ tak, že $W + W \subset V$. Zo spojitosti násobenia skalárom zase plynie, že každé okolie nuly je **absorbujúca** (= pohlcujúca) množina, t.j. $(\forall x \in X)(\exists \alpha > 0)\ x \in \alpha U$ (dokážte !).

$\boxed{19}$ Ukážte, že priestor z príkladu 17. nie je LTP. (Návod: Ukážte, že okolie nuly $\{x\,;\,\varrho(x, 0) < 1\}$ nie je absorbujúca množina).

$\boxed{20}$ Dá sa ukázať, že Hausdorffov LTP je **metrizovateľný** (t.j. existuje na ňom translačne invariantná metrika, ktorá dáva pôvodnú topológiu) práve vtedy, keď v ňom existuje spočítateľná báza okolí nuly. Ukážte, že priestor z príkladu 16. je LTP, ktorý nie je metrizovateľný.

$\boxed{21}$ Každý konečnorozmerný Hausdorffov LTP X je izomorfný s $\mathbb{K}^n$ ($n = \dim(X)$), t.j. existuje vzájomne jednoznačné spojité lineárne zobrazenie priestoru X na $\mathbb{K}^n$ také, že k nemu inverzné zobrazenie je tiež spojité.

$\boxed{22}$ Nech sú X, Y LTP a $f : X \to Y$ lineárne zobrazenie. Potom je f spojité práve vtedy, keď je spojité v nule, t.j. pre každé okolie nuly V v Y existuje okolie nuly U v X tak, že $f(U) \subset V$. Dokážte.

Nech je X LTP. Množina $M \subset X$ sa nazýva **ohraničená**, ak ju absorbuje každé okolie nuly, t.j. $(\forall U \in \mathcal{U}(0))(\exists \alpha > 0)\ M \subset \alpha U$.
Množina $M \subset X$ sa nazýva **totálne ohraničená**, ak platí
$(\forall U \in \mathcal{U}(0))(\exists \text{ konečná } K \subset X)\ M \subset K + U$.

$\boxed{23}$ Dokážte, že v LTP platí

- každá kompaktná množina je totálne ohraničená
- každá totálne ohraničená množina je ohraničená
  Špeciálne každá konvergentná postupnosť je ohraničená.
- ak sú A, B ohraničené a $\lambda \in \mathbb{K}$, potom sú ohraničené tiež množiny $A \cup B$, $A + B$, λA a $\overline{A}$
- A je ohraničená, práve keď pre každé $x_n \in A$ a $\lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_n \to 0$, platí $\lambda_n x_n \to 0$
- ak sú X, Y dva LTP, $f : X \to Y$ je lineárne a spojité a $A \subset X$ je (totálne) ohraničená, potom je $f(A)$ (totálne) ohraničená

$\boxed{24}$ Nech je $X = \mathbb{R}^{[0,1]}$ LTP z príkladu 16. Ukážte, že množina $A \subset X$ je ohraničená práve vtedy, keď je bodove ohraničená, t.j. pre každé $t \in [0, 1]$ je množina $\{x(t)\,;\, x \in A\} \subset \mathbb{R}$ ohraničená.

$\boxed{25}$ Nech je X metrizovateľný LTP a nech je ϱ príslušná translačne invariantná metrika. Potom je $A \subset X$ ohraničená práve vtedy, keď je funkcia $\varrho(\cdot, 0) : X \to \mathbb{R}^+$ ohraničená na množine A. Dokážte.

$\boxed{26}$ Ak sú X, Y LTP a $f : X \to Y$ je spojité, potom je ohraničené, t.j. zobrazuje ohraničené množiny v X na ohraničené množiny v Y. Dokážte.

Množina $M \subset X$ sa nazýva **absolútne konvexná**, ak je konvexná (t.j. $(\forall x, y \in M)(\forall \lambda \in (0, 1))\ \lambda x + (1 - \lambda)y \in M$) a vyvážená (t.j. $(\forall x \in M)(\forall \lambda \in \mathbb{K})\ |\lambda| \le 1 \ \Rightarrow\ \lambda x \in M$). Ak pre každé okolie nuly U v X existuje konvexné okolie nuly $V \subset U$, potom sa X nazýva **lokálne konvexný priestor**. V ďalšom budeme pracovať výhradne s Hausdorffovymi priestormi a skratkou LKP budeme myslieť vždy Hausdorffov lokálne konvexný priestor. Dá sa ukázať, že v LKP existuje báza okolí nuly tvorená absolútne konvexnými, uzavretými množinami.

$\boxed{27}$ Nech $p \in (0, 1)$ a nech je X priestor spojitých funkcií $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ s bázou okolí nuly tvorenou množinami tvaru $U_\varepsilon = \{f\,;\, \int_0^1 |f(x)|^p\,dx < \varepsilon\}$. Ukážte, že X je LTP, ale nie je LKP.

Polonorma (=seminorma) je funkcia $p : X \to \mathbb{R}^+$ s vlastnosťami $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ a $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pre každé $\lambda \in \mathbb{K}$ a $x, y \in X$. Ak naviac platí $p(x) = 0 \iff x = 0$, potom sa p nazýva **norma**.

$\boxed{28}$ *Poznámka:* Ak je p polonorma a $U = \{x \in X\,;\, p(x) < 1\}$, potom je U absolútne konvexná a absorbujúca množina a platí $p = p_U$, kde $p_U(x) = \inf\{\alpha > 0\,;\, x \in \alpha U\}$ je tzv. Minkowkého funkcionál množiny U. Ak je naopak U absolútne konvexná a absorbujúca, potom je p_U polonorma a platí $\{x\,;\, p_U(x) < 1\} \subset U \subset \{x\,;\, p_U(x) \leq 1\}$. Naviac U je okolie nuly práve vtedy, keď je $p_U : X \to \mathbb{R}^+$ spojitá.

Ak je na lineárnom priestore X daný oddeliteľný systém polonoriem $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (t.j. $(\forall x \in X)(\exists \alpha \in A)\ p_\alpha(x) \neq 0$) a pre každú $K \subset A$ konečnú označíme $U_{K,\varepsilon} = \{x\,;\, \alpha \in K \;\Rightarrow\; p_\alpha(x) < \varepsilon\}$, potom je $\{U_{K,\varepsilon}\}$ báza okolí nuly lineárnej topológie, s ktorou je X LKP a ktorá sa nazýva topológia zadaná systémom polonoriem $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Ide pritom o najslabšiu lineárnu topológiu na X, pri ktorej sú všetky polonormy p_α spojité. Naopak, ak je X LKP a $\mathcal{B}(0)$ je jeho báza absolútne konvexných okolí nuly, potom je $\{p_U\}_{U \in \mathcal{B}(0)}$ oddeliteľný systém polonoriem a zadáva na X topológiu zhodnú s pôvodnou. Topológiu v LKP možno teda zadať systémom polonoriem, pričom ide o metrizovateľný priestor práve vtedy, keď sa dá daná topológia zadať spočítateľným (oddeliteľným) systémom polonoriem. Ak je topológia v X zadaná jedinou normou, nazýva sa X normovaný lineárny priestor (NLP). To platí práve vtedy, keď v X existuje konvexné ohraničené okolie nuly.

Úplný metrizovateľný LKP sa nazýva **Fréchetov priestor** (F-priestor). Úplný NLP sa nazýva **Banachov priestor** (B-priestor).

$\boxed{29}$ Pojem úplnosti možno rozšíriť aj na nemetrizovateľné LTP pomocou pojmu cauchyovský usmernený súbor. Usmernený súbor $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sa nazýva cauchyovský, ak $(\forall U \in \mathcal{U}(0))(\exists \alpha_o)(\forall \alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_o)\ x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in U$. Ak je každý cauchyovský súbor v X konvergentný (t.j. $x_\alpha \to x$ pre vhodné $x \in X$), potom sa X nazýva **úplný LTP**. Pre každý LTP X existuje úplný LTP $\tilde{X}$ taký, že X je hustým podpriestorom $\tilde{X}$.

Ak je X úplný Hausdorffov LTP a $A \subset X$, potom je A relatívne kompaktná práve vtedy, keď je totálne ohraničená.

$\boxed{30}$ Nech je E B-priestor s normou $|\cdot|$ (špeciálne $\mathbb{K}$) a nech je Ω Hausdorffov topologický priestor (nie nutne lineárny !). Symbolom $\mathcal{C}(\Omega, E)$ budeme vždy rozumieť priestor všetkých spojitých zobrazení $u : \Omega \to E$ s topológiou rovnomernej konvergencie na kompaktných množinách, t.j. báza okolí nuly v tomto priestore je tvorená množinami tvaru $\{u\,;\, \sup\limits_{t \in K} |u(t)| < \varepsilon\}$, kde $\varepsilon > 0$ a $K \subset \Omega$ je kompaktná.

Ak je naviac Ω σ-kompaktný metrický priestor, potom symbolom $\mathcal{C}_o(\Omega, E)$ budeme označovať priestor všetkých spojitých zobrazení $u : \Omega \to E$, pre ktoré platí: pre každé $\varepsilon > 0$ existuje kompaktná množina $K = K(u) \subset \Omega$ tak, že $|u(x)| < \varepsilon$ pre každé $x \in \Omega \setminus K$.

V priestore $\mathcal{C}_o(\Omega, E)$ pritom vždy uvažujeme topológiu rovnomernej konvergencie, t.j. ide o B-priestor s normou $\|u\| = \sup_{t\in\Omega} |u(t)|$.

- Nech je Ω σ-kompaktný metrický priestor. Ukážte, že $\mathcal{C}(\Omega, E)$ je F-priestor.
- Nech $\Omega = (0,1)$. Funkcie $\varphi_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ definujme (pre $n \geq 3$) nasledovne

  $\varphi_n(t) = 0$ pre $t \in \left(0, \frac{1}{2n}\right] \cup \left[\frac{2}{n}, 1\right)$

  φ_n je lineárna na intervale $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ aj na intervale $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$

  $\varphi_n\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha_n > 0$

  Ukážte, že $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ a ($\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{C}_o(\Omega, \mathbb{R}) \iff \alpha_n \to 0$). Ďalej ukážte, že priestor $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ (pre $\Omega = (0,1)$) nie je normovateľný.

$\boxed{31}$ Nech je $\Omega \subset \mathbb{C}$ otvorená množina. Označme $\mathcal{H}(\Omega)$ podpriestor priestoru $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ tvorený všetkými holomorfnými funkciami. Ide o uzavretý podpriestor, takže je to F-priestor.

$\boxed{32}$ Označme $\mathcal{S}$ priestor funkcií $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, ktoré majú spojité parciálne derivácie všetkých rádov a pre ktoré je konečná hodnota

$$p_{k,m}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^k) \left| \frac{\partial^{|m|} f(x)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \right|$$

pre každé $k \in \mathbb{N}$ a každý multiindex $m = (m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ (kde $|m| = \sum m_i$). Topológia v tomto priestore je daná spočítateľným systémom polonoriem $\{p_{k,m}\}$, takže ide o metrizovateľný LKP. Tento priestor je tiež úplný, takže je to F-priestor. Ukážte, že zobrazenia

- $F_1 : \mathcal{S} \to \mathcal{S} : f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$
- $F_2 : \mathcal{S} \to \mathcal{S} : f \mapsto (1 + |x|) f$
- $F_3 : \mathcal{S} \to \mathbb{K} : f \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\varphi\, dx$, kde $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$
- $F_4 : \mathcal{S} \to \mathcal{S} : f \mapsto \hat{f}$, kde $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i(x,\xi)}\, dx$

sú lineárne a spojité. Zobrazenie F_4 (Fourierova transformácia) je dokonca izomorfizmus priestoru $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$.

$\boxed{33}$ Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená množina. Definujme $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ako priestor všetkých funkcií $f : \Omega \to \mathbb{K}$, ktoré majú spojité parciálne derivácie všetkých rádov, s topológiou zadanou systémom polonoriem

$$p_{K,r} = \sup_{x\in K} \sum_{|m|\leq r} \left| \frac{\partial^{|m|} f(x)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \right|,$$

kde $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $K \subset\subset \Omega$. Tento priestor je F-priestor. Ak je $K \subset\subset \Omega$ kompaktná, potom symbolom $\mathcal{D}_K(\Omega)$ budeme značiť uzavretý podpriestor priestoru $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tvorený tými funkciami $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, ktorých nosič $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x\,;\, f(x) \neq 0\}}$ je podmnožinou K.

Podobne označíme $\mathcal{C}^m(\Omega)$ F-priestor m-krát spojite diferencovateľných funkcií na Ω s topológiou zadanou polonormami $p_{K,r}$, $r \leq m$, a položíme

$$\mathcal{D}_K^m(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^m(\Omega)\,;\, \operatorname{supp}(f) \subset K\}.$$

Ak je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktná množina, definujme $\mathcal{C}^\infty(K)$ ako priestor všetkých funkcií $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ (kde $\Omega = \Omega(f)$ je otvorená množina obsahujúca K) s topológiou zadanou polonormami $p_{K,r}$. Priestor $\mathcal{C}^\infty(K)$ je metrizovateľný LKP, ktorý však obecne nie je úplný (dokážte!).

$\boxed{34}$ LKP X sa nazýva **bornologický**, ak je každá absolútne konvexná množina V, ktorá absorbuje všetky ohraničené množiny (t. j. pre každú $A \subset X$ ohraničenú existuje $\alpha > 0$ tak, že $A \subset \alpha V$), okolím nuly v X. Dokážte, že platí

a) Ak je X metrizovateľný, potom je bornologický. (Návod: Nech je $\{U_n\}$ báza okolí nuly v X ($U_{n+1} \subset U_n$) a nech V nie je okolie nuly. Potom existujú $x_n \in U_n$ tak, že $x_n \notin nV$, takže V neabsorbuje ohraničenú množinu $\{x_n\}$.)

b) Ak je X bornologický, Y lokálne konvexný priestor a lineárne zobrazenie $F : X \to Y$ je ohraničené (t. j. zobrazuje ohraničené množiny v X na ohraničené množiny v Y), potom je F spojité.

$\boxed{35}$ LKP X sa nazýva **barelovaný**, ak je každý barrel (= absolútne konvexná, absorbujúca, uzavretá množina) okolím nuly v X. Dokážte, že platí

a) Ak je X F-priestor, potom je barelovaný. (Návod: Ak je U barrel, potom $X = \bigcup_{n=1}^\infty nU$. Keďže X nie je 1. kategórie, nie je nU riedka pre vhodné n. Odtiaľ plynie, že U má neprázdne vnútro, takže je okolím nuly.) Dá sa tiež dokázať, že každý úplný bornologický priestor je barelovaný.

b) NLP $X = \{x \in \mathcal{C}^1([0,1])\,;\, x(0) = 0\}$ s normou $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]}|x(t)|$ nie je barelovaný. (Návod: Uvažujte $U = \{x \in X\,;\, |x(t)| \leq t \quad \forall t \in [0,1]\}$.)

c) Dá sa dokázať, že priestor $\mathbb{R}^{[0,1]}$ z príkladu 16. je úplný, bornologický a barelovaný. Ukážte, že jeho podpriestor tvorený všetkými ohraničenými (resp. spojitými) funkciami $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ nie je barelovaný. (Návod: Uvažujte barrel $\{x\,;\, |x(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0,1]\}$.)

Z príkladov b) a c) plynie, že podpriestor barelovaného priestoru nemusí byť barelovaný. Existuje tiež príklad ukazujúci, že dokonca ani uzavretý podpriestor barelovaného priestoru nemusí byť barelovaný (podobne pre bornologický priestor).

Nech je X lineárny priestor a nech je $\{X_\alpha\,;\, \alpha \in A\}$ systém vektorových podpriestorov X s nasledujúcimi vlastnosťami:

a) $\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha = X$

b) Pre každé $\alpha \in A$ je X_α F-priestor.

c) Ak $X_\alpha \subset X_\beta$, potom X_β indukuje v X_α pôvodnú topológiu X_α (t.j. G_α je otvorená v X_α, práve keď existuje otvorená množina G_β v X_β tak, že $G_\alpha = G_\beta \cap X_\alpha$).

d) Existuje kofinálna postupnosť $\{X_n\}$ v $\{X_\alpha\,;\,\alpha \in A\}$, t.j. $X_n \subset X_{n+1}$ a pre každé $\alpha \in A$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $X_\alpha \subset X_n$.

Potom existuje najsilnejšia lineárna topológia na X tak, že X_α je spojito vnorený do X pre každé $\alpha \in A$. Priestor X s touto topológiou sa značí $\varinjlim_{\alpha} X_\alpha$, nazýva sa **LF-priestor** (tiež striktná induktívna limita F-priestorov) a má tieto vlastnosti:

(α) X je LKP, ktorý je úplný, bornologický a barelovaný

(β) X indukuje v X_α pôvodnú topológiu

(γ) $B \subset X$ je ohraničená $\iff$ $(\exists\alpha)(B \subset X_\alpha$ a B je ohraničená v $X_\alpha)$

(δ) Ak je Y LKP a $T : X \to Y$ lineárne zobrazenie, potom je T spojité práve vtedy, keď je $T/_{X_\alpha} : X_\alpha \to Y$ spojité pre každé $\alpha \in A$.

(ε) Ak $X_n \neq X_{n+1}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom X nie je metrizovateľný.

$\boxed{36}$ Nech je E B-priestor s normou $|\cdot|$ a Ω σ-kompaktný metrický priestor. Pre $K \subset\subset \Omega$ kompaktnú položme $\mathcal{C}_K(\Omega, E) = \{f \in \mathcal{C}(\Omega, E)\,;\, \mathrm{supp}(f) \subset K\}$; je to B-priestor s normou $\|f\| = \sup_{t\in K} |f(t)|$. Ďalej položme $\mathcal{C}_c(\Omega, E) = \varinjlim_{K\subset\subset\Omega} \mathcal{C}_K(\Omega, E)$, t.j. $\mathcal{C}_c(\Omega, E)$ je LF-priestor funkcií $\Omega \to E$ s kompaktným nosičom v Ω. Dá sa ukázať, že platí

$$\mathcal{C}_c(\Omega, E) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}_o(\Omega, E) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}(\Omega, E),$$

(t.j. ide o husté a spojité vnorenia), pričom pre E separabilný sú to tiež separabilné priestory. Ak je Ω kompaktný metrický priestor, všetky tieto priestory sa rovnajú.

Ukážte, že pre postupnosť φ_n z príkladu 30 neplatí $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{R})$.

$\boxed{37}$ Nech je Ω otvorená množina v $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{D}(\Omega) = \varinjlim_{K\subset\subset\Omega} \mathcal{D}_K(\Omega)$ (viď príklad 33). Priestor $\mathcal{D}(\Omega)$ (priestor hladkých funkcií s kompaktným nosičom v Ω) je teda LF-priestor, ktorý nie je metrizovateľný. Podobne kladieme $\mathcal{D}^m(\Omega) = \varinjlim_{K\subset\subset\Omega} \mathcal{D}^m_K(\Omega)$. Potom platí $\mathcal{D}(\Omega) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{D}^m(\Omega) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{K}) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, kde L^p je Lebesgueov priestor, $p \in [1, \infty)$. Ďalej tiež platí $\mathcal{D}(\Omega) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{D}^m(\Omega) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^m(\Omega)$ a $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^m(\Omega) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{K})$. Ak položíme $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, potom platí $\mathcal{D} \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{S}$.

$\boxed{38}$ Barelovaný LKP X sa nazýva **Montelov**, ak je každá ohraničená množina v X relatívne kompaktná. Platí

- priestory $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{D}_K(\Omega)$, $\mathcal{H}(\Omega)$ sú Montelove
- priestor $\mathcal{C}_c((0,1),\mathbb{R})$ nie je Montelov (dokážte !)
- B-priestor X je Montelov $\iff$ $\dim X < \infty$
- produkt Montelovych priestorov je Montelov priestor
- striktná induktívna limita Montelovych priestorov je Montelov priestor
- uzavretý podpriestor Montelovho priestoru nemusí byť Montelov
- každý metrizovateľný Montelov priestor je separabilný

Ak sú X a Y LKP, potom symbolom $\mathcal{L}(X,Y)$ budeme značiť množinu všetkých spojitých lineárnych zobrazení priestoru X do Y. V tomto lineárnom priestore sa dajú rôznym spôsobom zaviesť lokálne konvexné topológie. Najdôležitejšie z nich sú nasledujúce dve: **b–topológia** (jej báza okolí nuly je tvorená množinami tvaru $U_{A,V} = \{F \in \mathcal{L}(X,Y)\,;\, F(A) \subset V\}$, kde $A \subset X$ je ohraničená a V je okolie nuly v Y) a **s–topológia** (s bázou okolí nuly $\{U_{A,V}\}$, kde $A \subset X$ je konečná a V je okolie nuly v Y). Z týchto dvoch topológií je b–topológia zrejme silnejšia a nazýva sa tiež topológia rovnomernej konvergencie na ohraničených množinách; s–topológia sa nazýva tiež topológia bodovej konvergencie alebo silná operátorová topológia.

$\boxed{39}$ Ak je X bornologický a Y úplný LKP, potom je priestor $\mathcal{L}(X,Y)$ s b-topológiou úplný. Dokážte. (Návod: Ak je $\{A_\alpha\}$ cauchyovský súbor v $\mathcal{L}(X,Y)$, potom je $\{A_\alpha(x)\}$ cauchyovský súbor v Y pre každé $x \in X$, takže $A_\alpha(x) \to A(x)$. Zobrazenie A je zrejme lineárne; ukážte, že je ohraničené a teda tiež spojité.)

$\boxed{40}$ (Banach–Steinhaus) Nech je X barelovaný a Y ľubovoľný LKP, nech $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ je s–ohraničená množina (t.j. $\mathcal{F}$ je ohraničená v s–topológii, t.j. $\{F(x)\,;\, F \in \mathcal{F}\}$ je ohraničená v Y pre každé $x \in X$). Ukážte, že potom je $\mathcal{F}$ rovnako spojitá, t.j. pre každé okolie nuly V v Y existuje okolie nuly U v X tak, že $F(U) \subset V$ pre každé $F \in \mathcal{F}$. (Návod: Ukážte, že $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F^{-1}(V)$ je barrel v X.) Odtiaľ potom jednoducho plynie, že $\mathcal{F}$ je tiež b–ohraničená. Špeciálne: ak $F_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, $F_n(x) \to F(x)$ pre každé $x \in X$, potom $F \in \mathcal{L}(X,Y)$ (a dá sa tiež ukázať, že $F_n \to F$ rovnomerne na totálne ohraničených množinách).

$\boxed{41}$ Nech je X barelovaný priestor a nech pre $A_n, B_n \in \mathcal{L}(X,X)$ platí $A_n \to A$, $B_n \to B$ v s-topológii. Ukážte, že potom tiež $A_nB_n \to AB$ v s-topológii. Toto tvrdenie neplatí dokonca ani v H-priestore, ak miesto s-topológie uvažujeme tzv. slabú operátorovú topológiu (ktorej báza okolí nuly je tvorená množinami tvaru $\{A\,;\, |f(Ax)| < 1$ pre $x \in$

$K, f \in K'\}$, kde $K \subset X$ a $K' \subset \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ sú konečné množiny).

Lineárne zobrazenie $F : X \to Y$ definované len na podpriestore $\mathcal{D}(F) \subset X$ sa nazýva **uzavreté**, ak je jeho graf $\mathcal{G}(F) = \{(x, F(x))\,;\, x \in \mathcal{D}(F)\}$ uzavretá podmnožina priestoru $X \times Y$. Jedným zo základných tvrdení lineárnej funkcionálnej analýzy je nasledujúca veta o uzavretom grafe:

Ak sú X, Y LF-priestory a $F : X \to Y$ je uzavreté zobrazenie†*, potom je F spojité.*

Iná verzia tohto tvrdenia je tzv. veta otvorenom zobrazení: *Nech sú X, Y LF-priestory, nech je $F : X \to Y$ uzavreté a $F(X) = Y$. Potom je F otvorené zobrazenie, t.j. pre každé okolie nuly U v X je $F(U)$ okolie nuly v Y. Špeciálne: ak je F prosté, potom je F^{-1} spojité.*

$\boxed{42}$ Nech je X F-priestor a nech sú X_1, X_2 uzavreté podpriestory X, pre ktoré platí: pre každé $x \in X$ existujú jednoznačne určené prvky $x_1 \in X_1$ a $x_2 \in X_2$ tak, že $x = x_1 + x_2$. Ukážte, že potom je projekcia $p_1 : X \to X_1 : x \mapsto x_1$ spojitá. (Návod: Ukážte, že p_1 je uzavreté zobrazenie.)

$\boxed{43}$ Nech sú τ_1, τ_2 dve topológie na lineárnom priestore X také, že (X, τ_i) je LF-priestor $(i = 1, 2)$, a nech je τ_1 slabšia než τ_2. Potom nutne platí $\tau_1 = \tau_2$. Dokážte. (Návod: Použite vetu o otvorenom zobrazení pre identické zobrazenie $i : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$.)

$\boxed{44}$ *Poznámka:* Veta o uzavretom grafe dá tiež použiť na dôkaz spojitej závislosti riešení lineárnych diferenciálnych rovníc vzhľadom k počiatočným podmienkam (napr. v topológii priestoru $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$).

3. DUALITA

Nech je X LKP. Priestor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ spojitých lineárnych foriem $X \to \mathbb{K}$ sa označuje X' (niekedy tiež X^*) a nazýva sa **duál** (= duálny priestor k) priestoru X. V priestore X' môžeme zaviesť rôznym spôsobom lokálne konvexnú topológiu (viď predošlý odstavec), ale implicitne budeme pracovať s b–topológiou, t.j. s topológiou rovnomernej konvergencie na ohraničených

† stačí, aby F bolo sekvenciálne uzavreté, t.j. aby pre každú postupnosť $\{z_n\} \subset \mathcal{G}(F)$ platilo: ak $z_n \to z \in X \times Y$, potom $z \in \mathcal{G}(F)$.

množinách. Táto topológia priestoru X' sa tiež nazýva β–topológia a priestoru X' s touto topológiou sa tiež hovorí silný duál. Ak je X NLP, potom je X' B-priestor s normou $\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$.

Topológia bodovej konvergencie (s–topológia) sa v priestore X' označuje ako $\sigma(X', X)$–topológia (alebo w^*–topológia).

$\boxed{45}$ Pre duálny priestor platia nasledujúce tvrdenia

- Ak je X bornologický, potom je X' úplný (viď cvičenie 39).
- Ak je X Montelov priestor, potom je tiež X' Montelov priestor.
- Ak je X metrizovateľný, potom je X' bornologický práve vtedy, keď je barelovaný.

$\boxed{46}$ Ak je X Hilbertov priestor (špeciálne $\mathbb{K}^n$), potom sa jeho duál dá pomocou Rieszovej vety o reprezentácii stotožniť s X: každému $x \in X$ pritom zodpovedá spojitá lineárna forma $f_x : X \to \mathbb{K} : y \mapsto \langle y, x\rangle$, kde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je skalárny súčin v X.

$\boxed{47}$ Nech je Ω otvorená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a nech $X = L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty)$, je priestor merateľných funkcií $f : \Omega \to \mathbb{K}$, ktorých p–ta mocnina má konečný Lebesgueov integrál (viď dodatok II). Duál k tomuto priestoru sa dá reprezentovať pomocou priestoru $L^q(\Omega)$, kde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ($q = +\infty$ pre $p = 1$), nasledovne: každému prvku $g \in L^q$ priradíme formu $F_g : L^p \to \mathbb{K} : f \mapsto \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Toto priradenie je vzájomne jednoznačné zobrazenie L^q na $(L^p)'$. V prípade $p = +\infty$ je toto priradenie vnorením priestoru L^1 do $(L^\infty)'$.

Uvedené tvrdenie sa dá zobecniť aj pre Bochnerov integrál a pre obecnejšie priestory s mierou. Napr. ak je E B-priestor, ktorého duál je separabilný, a $p \in [1, \infty)$, potom platí $(L^p(\Omega, E))' = L^q(\Omega, E')$, kde rovnosť chápeme v zmysle priradenia $L^q(\Omega, E') \to (L^p(\Omega, E))' : g \mapsto F_g$, kde $F_g(f) = \int_\Omega g(x)\big(f(x)\big)\,dx$. To isté platí aj pre reflexívny (viď ďalej) B-priestor E, ak naviac predpokladáme $p > 1$.

$\boxed{48}$ Ak je Ω σ-kompaktný metrický priestor, potom duál k LF-priestoru $\mathcal{C}_c(\Omega)$ sú Radonove miery, duál k B-priestoru $\mathcal{C}_o(\Omega)$ sú konečné Radonove miery (viď dodatok II, Rieszova veta o reprezentácii).

$\boxed{49}$ Duál k priestoru $\mathcal{H}(\Omega)$ sa dá charakterizovať ako priestor tých funkcií $\tilde{F}$, ktoré sú holomorfné na okolí množiny $\mathbb{C}\backslash\Omega$ a pre ktoré platí $\lim_{|z|\to\infty} \tilde{F}(z) = 0$. Každému $F \in \mathcal{H}(\Omega)'$ pritom zodpovedá funkcia $\tilde{F}(z) = F(f_z)$, kde $f_z(s) = \dfrac{1}{z-s}$, každému $\tilde{F}$ zodpovedá funkcionál $F(f) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma f\tilde{F}$, kde Γ je vhodný cyklus konečnej dĺžky.

$\boxed{50}$ Nech je X LKP a $f : X \to \mathbb{K}$ lineárne zobrazenie. Potom je f spojité (t.j. $f \in X'$), práve keď je $\mathcal{N}(f) = \{x \in X\,;\, f(x) = 0\}$ uzavretý podpriestor X. Dokážte.

$\boxed{51}$ Nech je X metrizovateľný LKP a $f : X \to \mathbb{K}$ lineárne zobrazenie, ktoré zobrazuje kompaktné množiny v X na ohraničené množiny v $\mathbb{K}$. Ukážte, že platí $f \in X'$.

$\boxed{52}$ Nech je X B-priestor, nech $f_n, f \in X'$, $f_n \to f$ v $\sigma(X', X)$–topológii. Dokážte (pomocou Banach-Steinhausovej vety), že potom je postupnosť $\{\|f_n\|\}$ ohraničená a ukážte tiež, že platí $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$

LKP X môžeme prirodzeným spôsobom vnoriť do jeho druhého duálu $X'' = (X')'$; ide o vnorenie $Q : X \to X'' : x \mapsto Q_x$, kde $Q_x : X' \to \mathbb{K} : f \mapsto f(x)$. Priestor X sa nazýva **reflexívny**, ak je toto vnorenie izomorfizmus priestoru X na X'' (t.j. je to vzájomne jednoznačné, spojité zobrazenie, ktorého inverz je tiež spojitý). V prípade barelovaného priestoru alebo NLP stačí požadovať, aby zobrazenie Q bolo surjektívne (t.j. $Q(X) = X''$); potom je už nutne izomorfizmus.

$\boxed{53}$ Príklady a vlastnosti reflexívnych priestorov:

- každý Hilbertov priestor je reflexívny
- ak je $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená a E reflexívny B-priestor (špeciálne $\mathbb{K}$), potom je $L^p(\Omega, E)$ reflexívny
- každý Montelov priestor je reflexívny
- každý reflexívny priestor je barelovaný
- ak je X reflexívny, potom je X' reflexívny (opačné tvrdenie platí napr. pre B-priestor)
- ak sú priestory X_n v definícii LF-priestoru X reflexívne, potom je X reflexívny
- ak je Ω kompaktný metrický priestor (a nejde o konečnú množinu), potom priestor $\mathcal{C}(\Omega)$ nie je reflexívny
- uzavretý podpriestor reflexívneho F-priestoru je reflexívny (pre obecný reflexívny priestor toto tvrdenie neplatí).

$\boxed{54}$ Nech je X Montelov priestor, nech $f_n \in X'$, $f_n \to f$ v $\sigma(X', X)$–topológii. Ukážte, že potom tiež $f_n \to f$ v silnej topológii priestoru X' (t.j. rovnomerne na ohraničených množinách v X).

$\boxed{55}$ Ak sú X, Y LKP, $X \overset{d}{\hookrightarrow} Y$, potom platí $Y' \hookrightarrow X'$ (vnorenie $I' : Y' \to X'$ je adjungovaným zobrazením k vnoreniu $I : X \to Y$, t.j. $I'(g)(x) = g(I(x))$ pre $g \in Y'$ a $x \in X$). Dokážte. Ak je naviac X reflexívny, potom platí dokonca $Y' \overset{d}{\hookrightarrow} X'$.

$\boxed{56}$ Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená. Prvky duálu k LF-priestoru $\mathcal{D}(\Omega)$ nazveme **distribúcie** (v Ω), prvky duálu k priestoru $\mathcal{D}^m(\Omega)$ sa nazývajú distribúcie rádu $\leq m$. Priestor $(\mathcal{C}^\infty(\Omega))'$ sa nazýva priestor distribúcií s kompaktným nosičom. Prvky duálu k priestoru $\mathcal{S}$ sa nazývajú temperované distribúcie (tiež distribúcie pomaly rastúce v nekonečne).

Priestory distribúcií $(\mathcal{D}(\Omega))'$, $(\mathcal{C}^\infty(\Omega))'$ a $\mathcal{S}'$ sú bornologické a Montelove. Ak definujeme nosič distribúcie $T \in (\mathcal{D}(\Omega))'$ ako množinu $\mathrm{supp}(T) = \{x \in \Omega\,;\, (\forall U \in \mathcal{U}(x))(\exists \varphi \in \mathcal{D}(U))\, T(\varphi) \neq 0\}$, potom platí $(\mathcal{C}^m(\Omega))' = \{T \in (\mathcal{D}^m(\Omega))'\,;\, \mathrm{supp}(T) \subset\subset \Omega\}$ (kde pre $m = \infty$ kladieme $\mathcal{D}^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$).

Z predošlého cvičenia plynie, že platí $(\mathcal{C}_o(\Omega, \mathbb{K}))' \hookrightarrow (\mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{K}))' \hookrightarrow (\mathcal{D}^m(\Omega))' \hookrightarrow (\mathcal{D}(\Omega))'$ a tiež $(\mathcal{C}^\infty(\Omega))' \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} (\mathcal{D}(\Omega))'$ a $\mathcal{S}' \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{D}'$. Naviac sa dá dokázať, že zobrazenie $L^1(\Omega) \to (\mathcal{C}_o(\Omega, \mathbb{K}))' : f \mapsto F_f$, kde $F_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\, dx$, je spojité a prosté, t.j. $L^1(\Omega) \hookrightarrow (\mathcal{C}_o(\Omega, \mathbb{K}))'$. V zmysle tohto vnorenia potom tiež platí $\mathcal{D}(\Omega) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} (\mathcal{D}(\Omega))'$ a $\mathcal{S} \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{S}'$.

Ukážte, že platí: Ak je $T_k \in (\mathcal{D}(\Omega))'$ a $\{T_k(\varphi)\}_k$ je cauchyovská postupnosť pre každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, potom existuje distribúcia $T \in (\mathcal{D}(\Omega))'$ tak, že $T_k \to T$ v priestore $(\mathcal{D}(\Omega))'$. (Návod: Použite Banach-Steinhausovu vetu a cvičenie 54.)

$\boxed{57}$ Nech je $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ Fourierova transformácia. Potom je adjungované zobrazenie $F' : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ (t.j. $F'(T)(\varphi) = T(F(\varphi))$) izomorfizmus priestoru $\mathcal{S}'$ a súčasne ide o rozšírenie zobrazenia F. Zobrazenie F' je izomorfizmus aj v tom prípade, keď v priestore $\mathcal{S}'$ uvažujeme w^* topológiu.

Dôležitým dôsledkom tzv. Hahn-Banachovej vety je to, že v LKP X pre každé $x \in X$, $x \neq 0$, existuje $f \in X'$ tak, že $f(x) \neq 0$ (toto tvrdenie nie je triviálne a pre obecný LTP neplatí !). V priestore X teda môžeme zaviesť (Hausdorffovu) lokálne konvexnú topológiu, ktorej báza okolí nuly bude tvorená množinami tvaru $U_{K,\varepsilon} = \{x \in X\,;\, f \in K \;\Rightarrow\; |f(x)| < \varepsilon\}$, kde $K \subset X'$ je konečná a $\varepsilon > 0$. Táto topológia sa označuje $\sigma(X, X')$ (tiež w–topológia) a nazýva sa **slabá topológia** na priestore X. Konvergencia postupnosti $\{x_n\} \subset X$ k prvku $x \in X$ v tejto topológii sa značí symbolom $x_n \rightharpoonup x$ (alebo tiež $x_n \xrightarrow{\mathrm{w}} x$).

$\boxed{58}$ Ukážte, že

- slabá topológia je slabšia ako pôvodná topológia
- $x_n \rightharpoonup x \iff f(x_n) \to f(x)$ pre každé $f \in X'$
- ak je X separabilný Hilbertov priestor s ortonormálnou bázou $\{e_n\}$ a skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$, potom
  - $e_n \rightharpoonup 0$
  - slabý uzáver jednotkovej sféry je jednotková guľa
  - nula patrí do slabého uzáveru množiny $\{\sqrt{n}e_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$
  - množina $\{ne_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ je slabo uzavretá
  - ak $x_n \in X$, $x_n \rightharpoonup x$ a $\|x_n\| \to \|x\|$, potom $x_n \to x$ (toto tvrdenie platí aj pre uniformne konvexné B-priestory, napr. L^p, $p \in (1, \infty)$)

• ak $x_n \to x$ a $y_n \rightharpoonup y$, potom $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$

• ak $A_n \in \mathcal{L}(X, X)$, $A_n \to A$ v s-topológii a $x_n \rightharpoonup x$, potom nemusí platiť $A_n x_n \rightharpoonup Ax$ (Návod: položte $A_n = U^{n-1}$, kde $Ue_1 = 0$ a $Ue_{n+1} = e_n$)

Slabá topológia má nasledujúce vlastnosti:

- Ak je $M \subset X$ slabo ohraničená (t.j. ohraničená v slabej topológii), potom je tiež ohraničená. Špeciálne, ak je X NLP a $x_n \rightharpoonup x$, potom je $\{\|x_n\|\}$ ohraničená a $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- Ak je $M \subset X$ konvexná a uzavretá, potom je tiež slabo uzavretá.
- Ak je X reflexívny priestor, potom je každá ohraničená množina v X relatívne kompaktná v slabej topológii a každá postupnosť cauchyovská v slabej topológii má limitu (X však nemusí byť úplný v slabej topológii !). Ak je naviac X reflexívny F-priestor, potom sa z každej ohraničenej postupnosti $\{x_n\} \subset X$ dá vybrať konvergentná podpostupnosť.
- Nech je X NLP a nech B resp. B' je jednotková guľa v X resp. v X'. Potom platí:

  • (B', w^*) je kompaktný (topologický priestor)

  • X je separabilný $\iff$ (B', w^*) je metrizovateľný

  • X' je separabilný $\iff$ (B, w) je metrizovateľný

  • X' je separabilný $\Rightarrow$ X je separabilný

  • X je separabilný $\Rightarrow$ (X', w^*) je separabilný (pre H-priestor platí tiež obrátené tvrdenie)

  • X je nekonečnorozmerný B-priestor $\Rightarrow$ (X', w^*) nie je metrizovateľný

$\boxed{59}$ Nech je X H-priestor. Ak je postupnosť $\{v_k\} \subset X$ ohraničená, potom existuje vybraná podpostupnosť (ktorej prvky opäť značíme v_k) tak, že postupnosť $w_k = (v_1 + v_2 + \ldots + v_k)/k$ konverguje v silnej topológii. Dokážte. (Návod: Môžeme predpokladať $v_k \rightharpoonup 0$. Zvoľte podpostupnosť tak, aby $|\langle v_i, v_{k+1} \rangle| \leq \frac{1}{k}$ pre $i = 1, \ldots, k$. Potom $\|w_k\|^2 \leq \dfrac{1}{k^2} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} |\langle v_i, v_j \rangle| \to 0$.)

$\boxed{60}$ Nech je Ω σ-kompaktný metrický priestor, $X = \mathcal{C}_o(\Omega)$ a $\mu_k \in X'$, $\|\mu_k\| \leq C$. Ukážte, že existuje miera $\mu \in X'$ tak, že pre vhodnú podpostupnosť μ_{k_j} platí: $\int_\Omega \varphi\, d\mu_{k_j} \to \int_\Omega \varphi\, d\mu$ pre každé $\varphi \in X$.

$\boxed{61}$ Nech $X = \ell^1$. Potom $x_n \rightharpoonup x \iff x_n \to x$ (viď dodatok II). Napriek tomu z predošlých tvrdení plynie, že ohraničené množiny v ℓ^1 so slabou topológiou nie sú metrizovateľné (pretože duál ℓ^∞ nie je separabilný).

$\boxed{62}$ Ak je X NLP alebo barelovaný, potom je reflexívny práve vtedy, keď je topológia $\sigma(X', X)$ v priestore X' rovná topológii $\sigma(X', X'')$ (t.j. $w^* = w$ v X').

$\boxed{63}$ *Poznámka.* Kvôli lepšiemu pochopeniu zavedenej terminológie uveďme niekoľko faktov z abstraktnej teórie duality:

Nech sú X, Y lineárne priestory (nad $\mathbb{K}$). Bilineárne zobrazenie $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times Y \to \mathbb{K}$ sa nazýva **dualita** medzi X a Y, ak platí $(\forall x \in X,\, x \neq 0)(\exists y \in Y)\, \langle x, y\rangle \neq 0$ a $(\forall y \in Y,\, y \neq 0)(\exists x \in X)\, \langle x, y\rangle \neq 0$. Priestor Y môžeme prirodzeným spôsobom považovať za podpriestor lineárnych foriem na X: každému $y \in Y$ priradíme lineárnu formu $\varphi_y : X \to \mathbb{K} : x \mapsto \langle x, y\rangle$. Povieme, že lokálne konvexná topológia τ na priestore X **súhlasí s dualitou**, ak platí $X' = Y$ t.j. formy φ_y, $y \in Y$, sú práve všetky spojité lineárne formy na X. Ak je napr. X LKP, $Y = X'$ a definujeme $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X' \to \mathbb{K} : (x, f) \mapsto f(x)$, potom ide o dualitu a (pôvodná) topológia na X súhlasí s touto dualitou.

Pre $M \subset Y$ sa množina $M^\circ = \{x \in X\,;\, |\langle x, y\rangle| \leq 1\ \forall y \in M\}$ nazýva **polára** množiny M (analogicky pre $M \subset X$). Na priestore X môžeme definovať lokálne konvexnú topológiu $\sigma(X, Y)$: jej báza okolí nuly bude tvorená množinami tvaru K°, kde $K \subset Y$ je konečná množina. Analogicky sa definuje $\sigma(Y, X)$–topológia na priestore Y. Dá sa ukázať, že topológia $\sigma(X, Y)$ je najslabšia topológia súhlasiaca s dualitou $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Ak v priestore X definujeme lokálne konvexnú topológiu $\tau(X, Y)$ s bázou okolí nuly tvorenou množinami tvaru K°, kde $K \subset Y$ je absolútne konvexná a $\sigma(Y, X)$-kompaktná, potom sa táto topológia nazýva **Mackeyho** topológia a ide o najsilnejšiu topológiu súhlasiacu s dualitou $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Ak je teda X LKP, potom je jeho topológia silnejšia ako topológia $\sigma(X, X')$ a slabšia ako topológia $\tau(X, X')$.

V priestore X môžeme tiež definovať topológiu $\beta(X, Y)$, jej báza okolí nuly je tvorená množinami tvaru K°, kde $K \subset Y$ je ľubovoľná $\sigma(Y, X)$-ohraničená množina. Táto topológia je zrejme silnejšia ako $\tau(X, Y)$.

Platí:

- Všetky topológie súhlasiace s dualitou dávajú rovnaký systém ohraničených množín.
- Konvexná množina má rovnaký uzáver vo všetkych topológiach súhlasiacich s dualitou.
- LKP X je barelovaný, práve keď sa jeho topológia rovná topológii $\beta(X, X')$
- V každom bornologickom priestore X sa jeho topológia sa rovná topológii $\tau(X, X')$.
- Nech sú X, Y LKP a nech je $u : X \to Y$ lineárne. Ak je u spojité, potom je u slabo spojité (t.j. $u : (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ je spojité). Ak je u slabo spojité, potom je $u : (X, \tau(X, X')) \to (Y, \tau(Y, Y'))$ spojité. Špeciálne, pre všetky

bornologické a barelované priestory tieto pojmy splývajú.

Nech sú X a Y NLP a $T : X \to Y$ lineárne zobrazenie. Zobrazenie T sa nazýva **nukleárne**, ak existujú prvky $f_n \in X'$ a $y_n \in Y$ tak, že $\sum_n \|f_n\| \cdot \|y_n\| < \infty$ a $T(x) = \sum_n f_n(x) y_n$ pre každé $x \in X$.

Ak je X LKP a U je uzavreté, absolútne konvexné okolie nuly v X, potom je $p_U(x) = \inf\{\alpha > 0 \,;\, x \in \alpha U\}$ (Minkowského funkcionál množiny U) spojitá polonorma. Zaveďme v X reláciu ekvivalencie $\sim$ $(= \overset{U}{\sim})$ nasledujúcim spôsobom: $x \sim y \iff p_U(x-y) = 0$. V priestore $X/_\sim$ môžeme definovať normu $\|x\sim\| = p_U(x)$, takto vzniknutý NLP označme X_U. Priestor X sa nazýva **nukleárny**, ak pre každé absolútne konvexné uzavreté okolie nuly U existuje absolútne konvexné uzavreté okolie nuly $V \subset U$ tak, že zobrazenie $i : X_V \to X_U : (x \overset{V}{\sim}) \mapsto (x \overset{U}{\sim})$ je nukleárne.

$\boxed{64}$ Overte korektnosť definície zobrazenia i.

$\boxed{65}$ Ukážte, že platí:

- Každé nukleárne zobrazenie je totálne ohraničené, t.j. zobrazuje ohraničené množiny na totálne ohraničené množiny.
- Každá ohraničená množina v nukleárnom priestore je totálne ohraničená.
- Ak sú X, Y, Z H-priestory a $T : X \to Y$, $S : Y \to Z$ sú Hilbert-Schmidtove zobrazenia, potom je $ST : X \to Z$ nukleárne.

$\boxed{66}$ Ukážte, že priestor $\mathbb{R}^{[0,1]}$ je nukleárny.

$\boxed{67}$ Priestory $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{S}$ aj ich silné duály (priestory distribúcií) sú nukleárne. Podobne priestor $\mathcal{H}(\Omega)$ je nukleárny.

$\boxed{68}$ Platia nasledujúce tvrdenia:

- NLP X je nukleárny $\iff$ $\dim(X) < \infty$.
- Ak je LKP X úplný, barelovaný a nukleárny, potom je Montelov.
- Ak je X metrizovateľný LKP, potom je X nukleárny, práve keď je X' nukleárny.
- Ak je LF-priestor X nukleárny, potom je X' nukleárny.
- Podpriestor nukleárneho priestoru je nukleárny, podobne pre produkt a striktnú induktívnu limitu.
- Metrizovateľný nukleárny priestor je separabilný.
- Ak je X' nukleárny, potom je každá ohraničená množina v X totálne ohraničená a separabilná.

V nukleárnych priestoroch platí okrem iného tzv. veta o jadre: *Ak je X nukleárny priestor, Y je LKP a $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ je spojitá bilineárna* *forma, potom je B nukleárna,* t.j. má tvar $B(x,y) = \sum_n a_n(x)b_n(y)$, pričom $a_n \in X'$ a $b_n \in Y'$ splňujú nerovnosť $\sum_n \sup_{x \in U} |a_n(x)| \cdot \sup_{y \in V} |b_n(y)| < \infty$, kde U resp. V sú vhodné okolia nuly v X resp. v Y. Ak je X naviac barelovaný, potom stačí predpokladať, že B je separátne spojitá.

Špeciálne pre priestory $\mathcal{D}(\Omega)$ z vety o jadre plynie toto tvrdenie: Ak je B (separátne) spojitá bilineárna forma na $\mathcal{D}(\Omega_1) \times \mathcal{D}(\Omega_2)$, potom existuje distribúcia $A \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ tak, že platí $B(f_1, f_2) = A(f_1 \otimes f_2)$, kde $(f_1 \otimes f_2)(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.