ZÁKLADNÉ POJMY Z TEÓRIE MIERY A INTEGRÁLU

1. MIERA

Nech je X neprázdna množina a $\mathcal{M}$ neprázdny systém jej podmnožín. $\mathcal{M}$ sa nazýva **σ-algebra**, ak je uzavretá na doplnky a spočítateľné zjednotenia (t.j. $A \in \mathcal{M} \Rightarrow X\backslash A \in \mathcal{M}$, $A_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$). Ak je $\mathcal{F}$ ľubovoľný systém podmnožín X, potom na X existuje najmenšia σ-algebra obsahujúca $\mathcal{F}$ (tzv. σ-algebra generovaná $\mathcal{F}$). Ak je X topologický priestor, potom sa prvky σ-algebry $\mathcal{B}$ generovanej systémom všetkých otvorených množín v X nazývajú **borelovské** množiny.

Nech je $\mathcal{M}$ σ-algebra na množine X. Funkcia $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ sa nazýva (nezáporná) **miera**, ak je σ-aditívna (t.j. $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ pre ľubovoľný systém navzájom disjunktných množín $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$) a $\mu(\emptyset) = 0$. Prvky $\mathcal{M}$ sa potom nazývajú **merateľné množiny**, trojica $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sa nazýva **priestor s mierou**.

$\boxed{1}$ Nech je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ priestor s mierou.

a) Nech $A_1, A_2, \cdots$ sú prvky $\mathcal{M}$. Potom $\bigcap A_n \in \mathcal{M}$.
b) Nech $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$. Potom $\mu(A) \le \mu(B)$.
c) Nech $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ sú prvky $\mathcal{M}$, $A = \bigcup A_n$. Potom $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A_n) \to \mu(A)$.
d) Nech $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ sú prvky $\mathcal{M}$, $A = \bigcap A_n$, $\mu(A_1) < \infty$. Potom $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

Nech je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ priestor s mierou a nech je súčasne X topologický priestor. Miera μ sa nazýva

– **borelovská**, ak $\mathcal{M}$ obsahuje všetky borelovské množiny (t.j. $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$)
– **regulárna**, ak je borelovská a pre každú $A \in \mathcal{M}$ platí

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(U)\,;\ A \subset U,\ U \text{ otvorená}\} \\ &= \sup\{\mu(K)\,;\ K \subset A,\ K \text{ kompaktná}\}\end{aligned}$$

– (nezáporná) **Radonova**, ak je regulárna a pre každú $K \subset X$ kompaktnú platí $\mu(K) < \infty$

– **úplná**, ak pre každú $A \in \mathcal{M}$ platí: ak $\mu(A) = 0$ a $B \subset A$, potom $B \in \mathcal{M}$

– **konečná** (alebo ohraničená), ak $\mu(X) < \infty$

– **σ-konečná**, ak existujú $A_n \in \mathcal{M}$ tak, že $\mu(A_n) < \infty$ a $X = \bigcup A_n$.

$\boxed{2}$ Nech je X ľubovoľná množina a $\mathcal{M} = \exp(X)$ (= systém všetkých podmnožín X) Položme $\mu(A) = |A|$ (= počet prvkov množiny A pre A konečnú, inak $= \infty$). Potom je μ tzv. **aritmetická** miera na X.

$\boxed{3}$ Nech $x \in X$, $\mathcal{M} = \exp(X)$ a položme $\mu(A) = 1$ ak $x \in A$, $\mu(A) = 0$ ak $x \notin A$. Potom je μ **Diracova** miera sústredená v bode x.

$\boxed{4}$ Nech $X = \mathbb{R}^n$. Potom existuje jediná úplná Radonova, translačne invariantná miera μ v X taká, že pre $A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ platí $\mu(A) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Je to tzv. **Lebesgueova** miera v $\mathbb{R}^n$. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky merateľná, práve keď sa dá napísať v tvare $B \cup N$, kde B je borelovská a N je podmnožina nejakej borelovskej množiny s nulovou mierou. Ďalej platí $\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \exp(\mathbb{R}^n)$. Ukážte, že pre každú spočítateľnú množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ platí $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$.

$\boxed{5}$ Nech je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neklesajúca funkcia. Pre $a < b$ položme $\mu([a, b)) = \lim_{x \to b-} \varphi(x) - \lim_{x \to a-} \varphi(x)$. Funkcia μ sa potom dá rozšíriť na úplnú Radonovu mieru (tzv. **Lebesgue-Stieltjesova miera**). Špeciálne pre $\varphi(x) = x$ dostávame Lebesgueovu mieru.

$\boxed{6}$ Nech je X nekonečnorozmerný separabilný Hilbertov priestor a nech je μ translačne invariantná miera na X taká, že $\mu(B_1) < \infty$ (kde B_1 je jednotková guľa v X). Dokážte, že potom nutne platí $\mu(B_1) = 0$.

$\boxed{7}$ Nech je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ priestor s mierou a nech $\emptyset \neq A \in \mathcal{M}$. Položme $\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M}\,;\, B \subset A\}$ a nech je μ_A reštrikcia miery μ na $\mathcal{M}_A$. Ukážte, že $(A, \mathcal{M}_A, \mu_A)$ je opäť priestor s mierou. Dokážte, že ak je μ borelovská (resp. regulárna, Radonova, σ-konečná, úplná), potom má rovnakú vlastnosť aj μ_A.

$\boxed{8}$ Funkcia $\mu^* : \exp(X) \to [0, +\infty]$ sa nazýva **vonkajšia miera** ak $\mu^*(\emptyset) = 0$ a $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ pre $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pre ľubovoľnú vonkajšiu mieru μ^* môžeme definovať množinu $\mathcal{M} = \{A \subset X\,;\, \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A) \ \ \forall T \subset X\}$. Potom platí, že $\mathcal{M}$ je σ-algebra a zúženie μ^* na $\mathcal{M}$ je úplná miera (**Carathéodory**).

Takýmto spôsobom sa dá napr. zostrojiť Lebesgueova miera, ak pre $A \subset \mathbb{R}^n$ položíme $\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k)\,;\, A \subset \bigcup I_k \right\}$, kde I_k sú množiny tvaru $(a_1^k, b_1^k) \times \cdot \times (a_n^k, b_n^k)$ a

$\mu(I_k) = \prod_{i=1}^{n} (b_i^k - a_i^k)$. Funkcia μ^* sa v tomto prípade nazýva Lebesgueova vonkajšia miera.

Pre $A \subset \mathbb{R}^n$ a $p \geq 0$ položme ďalej

$$\mu_p^*(A) = \lim_{\delta \to 0+} \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_p \left(\frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2} \right)^p ; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \operatorname{diam}(A_i) < \delta \text{ pre každé } i \right\},$$

kde $\operatorname{diam}(A)$ je priemer množiny A $(= \sup_{x,y \in A} |x-y|)$ a $\alpha_p = \dfrac{\Gamma(1/2)^p}{\Gamma(1+p/2)}$ (= objem jednotkovej gule v $\mathbb{R}^p$ pre $p \in \mathbb{N}$). Potom je μ_p^* (p-dimenzionálna) **Hausdorffova vonkajšia miera** a pre $p = n$ pritom platí $\mu_n^* = \lambda^*$, kde λ^* je Lebesgueova vonkajšia miera v $\mathbb{R}^n$. Podľa vyššie uvedeného postupu (Carathéodory) z Hausdorffovej vonkajšej miery μ_p^* môžeme zostrojiť (Hausdorffovu) mieru μ_p, pričom ide o úplnú, borelovskú, translačne invariantnú mieru. Ukážte, že platí

- Ak $p < q$ a $\mu_q^*(A) < +\infty$, potom $\mu_p^*(A) = 0$; ak $p < q$ a $\mu_p^*(A) > 0$, potom $\mu_q^*(A) = +\infty$. Číslo $\mathrm{d}(A) = \sup\{p > 0\,; \mu_p^*(A) = +\infty\}$ sa nazýva **Hausdorffova dimenzia** množiny A.
- μ_0 je aritmetická miera
- pre $p < n$ a $G \subset \mathbb{R}^n$ otvorenú ($\neq \emptyset$) je $\mu_p(G) = +\infty$
- pre $p < n$ miera μ_p nie je regulárna

2. ABSTRAKTNÝ LEBESGUEOV INTEGRÁL

Nech je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ priestor s mierou. Funkcia $f : X \to \mathbb{K}^\dagger$ sa nazýva **merateľná**, ak pre každú otvorenú množinu $U \in \mathbb{K}$ platí $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$. Ak je X topologický priestor a $f^{-1}(U)$ je borelovská množina pre každú $U \in \mathbb{K}$ otvorenú, potom sa f nazýva **borelovsky merateľná**. Každá spojitá funkcia je teda borelovsky merateľná a tiež merateľná (ak je μ borelovská miera).

$\boxed{9}$ Označme $\Lambda = \Lambda(X) = \Lambda(X, \mathcal{M})$ systém všetkých merateľných funkcií na X. Nech $f_n \in \Lambda$, $f_n(x) \to f(x)$ pre každé $x \in X$. Ukážte, že potom tiež $f \in \Lambda$.

Ak sa dá funkcia f napísať v tvare $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$, kde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $A_i \in \mathcal{M}$ sú navzájom disjunktné, $\mu(A_i) < \infty$ a χ_A je charakteristická funkcia množi-

† Funkcia $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sa nazýva merateľná, ak pre každé $c \in \mathbb{R}$ platí $f^{-1}\big((c, +\infty]\big) \in \mathcal{M}$.

ny A (t.j. $\chi_A(x) = 1$ pre $x \in A$ a $\chi_A(x) = 0$ pre $x \notin A$), potom sa f nazýva **jednoduchá** funkcia. Pre takúto funkciu f a ľubovoľnú merateľnú množinu E definujeme $\int_E f\,d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i \cap E)$. Ďalej pre $f : X \to [0, +\infty]$ merateľnú definujeme

$$\int_E f\,d\mu = \sup\Big\{\int_E s\,d\mu\,;\ s \text{ je jednoduchá},\ 0 \le s \le f\Big\}.$$

Ak je $f : X \to \mathbb{K}$ merateľná a $\int_E |f|\,d\mu$ je konečný, potom definujeme (abstraktný) **Lebesgueov integrál** funkcie f formulou

$$\int_E f\,d\mu = \int_E (\operatorname{Re} f)^+ d\mu - \int_E (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i\int_E (\operatorname{Im} f)^+ d\mu - i\int_E (\operatorname{Im} f)^- d\mu$$

kde $g^+ = \max(g, 0)$, $g^- = \max(-g, 0)$. Množinu všetkých takých funkcií f označíme $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$. Platia nasledujúce tvrdenia:

– (**Levi**) *Ak je $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$ postupnosť merateľných funkcií, $f_n(x) \to f(x)$ pre každé $x \in X$, potom je f merateľná a $\int_X f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$.*

– (**Lebesgue**) *Ak sú $f_n : X \to \mathbb{K}$ merateľné, $g \in \mathcal{L}^1$, $|f_n(x)| \le g(x)$ a $f_n(x) \to f(x)$ pre každé $x \in X$, potom $f_n, f \in \mathcal{L}^1$ a $\int_X f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$.*

Ak je miera μ úplná (napr. Lebesgueova miera v $\mathbb{R}^n$), potom práve uvedené tvrdenia platia aj vtedy, keď predpoklad „pre každé $x \in X$" nahradíme slabším predpokladom „pre s.v. (=skoro všetky) $x \in X$", t.j. daná vlastnosť má platiť pre všetky $x \in X$ s výnimkou množiny nulovej miery.

$\boxed{10}$ Pomocou Lebesgueovej vety dokážte nasledujúce tvrdenie o derivovaní integrálu závislého na parametri: Nech je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ priestor s mierou, nech je I otvorený interval v $\mathbb{R}$, $a_o \in I$ a nech funkcia $f : X \times I \to \mathbb{K}$ spĺňuje nasledujúce vlastnosti:

a) $f(\cdot, a) : X \to \mathbb{K}$ je merateľná pre každé $a \in I$, $f(\cdot, a_o) \in \mathcal{L}^1(X)$

b) pre každé $x \in X$ a $a \in I$ existuje konečná $f_a(x, a) = \dfrac{\partial f(x, a)}{\partial a}$

c) existuje $g \in \mathcal{L}^1(X)$ tak, že $|f_a(x,a)| \le g(x)$ pre každé $x \in X$ a $a \in I$

Potom pre každé $a \in I$ existuje $F(a) = \int_X f(\cdot,a)\,d\mu$, funkcia $F : I \to \mathbb{K}$ je diferencovateľná a platí $F'(a) = \int_X f_a(\cdot,a)\,d\mu$.

Rozmyslite si, ako možno zoslabiť predpoklady b) a c) ak je μ úplná.

Pretože hodnota $\int_X f\,d\mu$ sa nezmení, ak funkciu $f \in \mathcal{L}^1$ zmeníme na množine miery nula, zavádzame v priestore $\mathcal{L}^1$ reláciu ekvivalencie: $f \sim g \iff f(x) = g(x)$ pre s.v. $x \in X$. Dá sa ukázať, že (faktor)priestor $L^1 = \mathcal{L}^1/_\sim$ (ktorého prvky sú triedy funkcií $f_\sim = \{g \in \mathcal{L}^1\,;\, g \sim f\}$) s normou $\|f_\sim\| = \int_X |f|\,d\mu$ je Banachov priestor. V literatúre sa väčšinou nerozlišuje (a my to tiež nebudeme robiť) medzi triedou funkcií $f_\sim \in L^1$ a jej reprezentantom $f \in f_\sim \subset \mathcal{L}^1$, takže sa o prvku $f_\sim$ hovorí ako o funkcii $X \to \mathbb{K}$. Podobne ako L^1 sa definuje Banachov priestor $L^p = L^p(X,\mathcal{M},\mu)$ pre $p > 1$ ako priestor tried ekvivalencie merateľných funkcií, pre ktoré je $\|f\| = \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$ konečný. Konečne, Banachov priestor L^∞ je priestor tried ekvivalencie esenciálne ohraničených merateľných funkcií, t.j. funkcií f, pre ktoré je konečná norma $\|f\| = \operatorname{ess\,sup}|f| = \inf\limits_{\substack{N\subset X\\ \mu(N)=0}} \sup\limits_{x\in X\setminus N} |f(x)|$.

<u>*Konvergencia postupnosti v L^p*</u>. Nech je $(X,\mathcal{M},\mu)$ priestor s mierou, f_n, f nech sú merateľné funkcie $X \to \mathbb{K}$ a $p \in [1,\infty)$. Označme $\|\cdot\|_p$ normu v L^p. V nasledujúcich tvrdeniach budeme používať toto značenie

- $f_n \to f$ v L^p, ak $\|f_n - f\|_p \to 0$
- $f_n \rightharpoonup f$, ak f_n konverguje k f v slabej topológii priestoru L^p, t.j. $\int_X f_n g\,d\mu \to \int_X fg\,d\mu$ pre každé $g \in L^q$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$, ak f_n konverguje k f **podľa miery**, t.j. ak pre každé $\varepsilon > 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\{x\,;\,|f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} = 0$
- $f_n \to f$ s.v., ak $f_n(x) \to f(x)$ pre s.v. $x \in X$

Ďalej budeme hovoriť, že $f_n \to f$ **skoro rovnomerne**, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $A \in \mathcal{M}$ tak, že $\mu(A) < \varepsilon$ a $f_n \to f$ rovnomerne na $X \setminus A$.

Predpokladajme, že $p \in [1,+\infty)$ a f_n, f sú merateľné. Potom platí:

a) Ak $f_n \to f$ v L^p, potom $f_n \xrightarrow{\mu} f$

b) Ak $f_n \xrightarrow{\mu} f$, potom existuje vybraná postupnosť f_{n_k}, ktorá konverguje s.v. k f

c) Ak je postupnosť $\{f_n\}$ ohraničená v L^p $(p > 1)$ a buď $f_n \xrightarrow{\mu} f$ alebo $f_n \to f$ s.v., potom $f_n \rightharpoonup f$.

d) Ak $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ a buď $f_n \xrightarrow{\mu} f$ alebo $f_n \to f$ s.v., potom $f_n \to f$ v L^p.

e) Ak $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ $(p > 1)$ a $f_n \rightharpoonup f$, potom $f_n \to f$ v L^p.

f) (Vitali) Nech $f_n \in L^p$, $f_n \to f$ s.v. Potom $f_n \to f$ v L^p, práve keď súčasne platí

   (i) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists A_\varepsilon)\ \mu(A_\varepsilon) < \infty$ a $\int_{X \setminus A_\varepsilon} |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon$ pre každé n

   (ii) $\lim\limits_{\mu(A) \to 0} \int_A |f_n|^p \, d\mu = 0$ rovnomerne v n.

g) Ak $f_n \to f$ s.v. a $|f_n| \le g \in L^p$, potom $f_n \to f$ skoro rovnomerne.

h) Ak $p < r < q \le +\infty$ a $f_n \to f$ v L^p aj v L^q, potom $f_n \to f$ v L^r. Naviac platí $\|f\|_r \le \|f\|_p^{1-\theta} \cdot \|f\|_q^{\theta}$, kde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1-\theta}{p} + \dfrac{\theta}{q}$.

Ak je μ naviac konečná, potom tiež platí

i) Ak $f_n \to f$ rovnomerne v X, potom $f_n \to f$ v L^p.

j) Ak $f_n \to f$ s.v., potom $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

k) (Jegorov) Ak $f_n \to f$ s.v., potom $f_n \to f$ skoro rovnomerne.

l) Ak $f_n \to f$ v L^p a $p > q$, potom $f_n \to f$ v L^q.

Priestor $L^p(\mathbb{N}, \exp(\mathbb{N}), \mu)$, kde μ je aritmetická miera na $\mathbb{N}$, sa značí ℓ^p. Pre priestor ℓ^1 ďalej platí

m) Ak $f_n \rightharpoonup f$, potom $f_n(x) \to f(x)$ pre každé $x \in X$ a $f_n \to f$ v ℓ^1.

$\boxed{11}$ Ukážte platnosť nasledujúcich tvrdení a porovnajte ich s tvrdeniami predošlými

a) Nech $f_n(x) = \cos(nx)$. Potom $f_n \in L^p([0, 2\pi])$ pre každé $p \ge 1$, $f_n \rightharpoonup 0$ (pre každé $p \ge 1$), ale neplatí $f_n \to 0$ s.v., $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ ani $f_n \to 0$ v L^p.

b) Nech $f_n(x) = 1 + \sin(nx)$, $f \equiv 1$. Potom $f_n \rightharpoonup f$ v $L^1([0, 2\pi])$, $\|f_n\|_1 = \|f\|_1 = 2\pi$, ale neplatí $f_n \to f$ v L^1, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ani $f_n \to f$ s.v.

c) Nech $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$. Potom $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ pre každé $p \ge 1$, $f_n \to 0$ s.v., $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, ale neplatí $f_n \rightharpoonup 0$.

d) Nech $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[1,e^n]}$. Potom $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ pre každé $p \geq 1$, $f_n \to 0$ rovnomerne v $\mathbb{R}$, ale neplatí $f_n \rightharpoonup 0$.

e) Nech $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n^\alpha]}$ a $p > \alpha > q$. Potom $f_n \to 0$ v $L^p(\mathbb{R})$, ale neplatí $f_n \to 0$ v $L^q(\mathbb{R})$

f) Nech $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. Potom $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ pre každé $p \geq 1$, $f_n \to 0$ s.v., ale neplatí $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ ani $f_n \to 0$ skoro rovnomerne.

g) Nájdite $f_n \in \ell^p$ $(p > 1)$ tak, aby $f_n \rightharpoonup 0$ a $f_n \not\to 0$ v ℓ^p.

3. LEBESGUEOV INTEGRÁL V $\mathbb{R}$ A V $\mathbb{R}^n$

Nech je I interval v $\mathbb{R}$. Funkcia $f : I \to \mathbb{K}$ sa nazýva **absolútne spojitá**, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre ľubovoľné $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k \in I$ s vlastnosťou $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_k < b_k$ platí:

$$\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i) < \delta \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{k}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

$\boxed{12}$ Každá absolútne spojitá funkcia je rovnomerne spojitá. Opačné tvrdenie neplatí. Dokážte.

$\boxed{13}$ Funkcia $f : I \to \mathbb{K}$ sa nazýva **lipschitzovská**, ak existuje $L > 0$ tak, že $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ pre každé $x, y \in I$. Ukážte, že platí

a) f je lipschitzovská práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre ľubovoľné $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k \in I$ s vlastnosťou $a_i < b_i$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ platí:

$$\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i) < \delta \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{k}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Špeciálne, každá lipschitzovská funkcia je absolútne spojitá

b) ak je funkcia f diferencovateľná a jej derivácia f' je ohraničená, potom je f lipschitzovská

c) funkcia $f : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ je absolútne spojitá, ale nie je lipschitzovská

d) priestor lipschitzovských funkcií na $[0, 1]$ s normou

$$\|f\| = \sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)| + \sup_{0\leq x<y\leq 1}\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

je Banachov priestor

Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ak je funkcia $F : [a,b] \to \mathbb{K}$ absolútne spojitá, potom s.v. v $[a,b]$ existuje jej derivácia F'. Ďalej $F' \in \mathcal{L}^1\big((a,b)\big)$ a $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt$ $\quad (= \int_{[a,b]} F' d\mu$, kde μ je Lebesgueova miera v $\mathbb{R}$).

Naopak, ak je $f \in \mathcal{L}^1\big((a,b)\big)$, potom je funkcia $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ absolútne spojitá a $F'(x) = f(x)$ pre s.v. $x \in (a,b)$.

- Dá sa tiež ukázať, že ak je $F : [a,b] \to \mathbb{K}$ spojitá, pre všetky $x \in (a,b)$ s výnimkou spočítateľnej množiny existuje konečná $F'(x)$ a $F' \in \mathcal{L}^1\big((a,b)\big)$, potom $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt$.
- Existuje príklad funkcie $f : [0,1] \to [0,1]$, ktorá je spojitá, neklesajúca, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ a $f' = 0$ s.v. (tzv. Cantorova funkcia)
- Nech $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Potom pre s.v. $x_o \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu\big(B_\varepsilon(x_o)\big)} \int_{B_\varepsilon(x_o)} |f(x) - f(x_o)|\,dx = 0,$$

kde $B_\varepsilon(x_o) = \{x\,;\, \|x - x_o\| < \varepsilon\}$.

<u>Vzťah medzi Lebesgueovym a Riemannovym integrálom</u>. Riemannov integrál $(R)\int_a^b f\,dx$ je pre ohraničenú funkciu $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ definovaný ako limita súčtov tvaru $\sum_{i=0}^{k} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ pre $\max_i |x_{i+1} - x_i| \to 0$ (kde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k+1} = b$ a $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$) za predpokladu, že táto limita existuje (pre ľubovoľnú voľbu $\{x_i\}$ a $\{\xi_i\}$).

Riemannov integrál (ohraničenej) funkcie f existuje práve vtedy, keď má množina bodov nespojitosti funkcie f nulovú Lebesgueovu mieru. V tom prípade existuje aj Lebesgueov integrál a rovná sa Riemannovmu.

$\boxed{14}$ Nech je $f : [0,1] \to \{0,1\}$ Dirichletova funkcia (t.j. $f(x) = 0$ pre x iracionálne, $f(x) = 1$ pre x racionálne). Ukážte, že $f \in \mathcal{L}^1((0,1))$, ale f nie je riemannovsky integrovateľná. Existuje tiež príklad ohraničenej funkcie $f \in \mathcal{L}((0,1))$ takej, že žiadna funkcia $g \in f_\sim$ nie je riemannovsky integrovateľná.

<u>Vzťah medzi Lebesgueovym a Newtonovym integrálom</u>. Nech $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a nech má funkcia $f : (a,b) \to \mathbb{K}$ primitívnu funkciu F, t.j. $F' = f$ (čo platí napr. pre f spojitú). Ak existujú konečné limity $\lim_{x \to b-} F(x)$ a $\lim_{x \to a+} F(x)$, potom sa ich rozdiel nazýva Newtonov integrál funkcie f.

Ak existuje Newtonov aj Lebesgueov integrál funkcie f, potom sa rovnajú. Ak je $f \in \mathcal{L}^1((a,b))$ spojitá, potom existuje tiež Newtonov integrál funkcie f. Ak existuje Newtonov integrál funkcie $f \notin \mathcal{L}^1$, potom je f merateľná, $\int |f|\,d\mu = +\infty$ a Newtonov integrál funkcie $|f|$ neexistuje.

$\boxed{15}$ Nech $(a,b) = (0,+\infty)$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Potom $f \notin \mathcal{L}^1$, ale existuje Newtonov integrál f $(=\pi/2)$. Podobne pre $(a,b) = (0,1)$ a $f = F'$, kde $F(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}$. Dokážte.

<u>Veta o substitúcii</u>. *Nech je $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lipschitzovské zobrazenie (t.j. $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$ pre každé $x, y \in \mathbb{R}^m$) a nech $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$. Označme $J_k f(x)$ číslo $\sqrt{\sum {A_k}^2}$, kde A_k sú všetky subdeterminanty rádu k matice $f'(x) = \Big(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\Big)$, a nech λ_n (resp. μ_n) je n-rozmerná Lebesgueova (resp. Hausdorffova) miera.*

Ak $m \le n$, potom platí

$$\int_{\mathbb{R}^m} u(x) J_m f(x)\, d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{x \in f^{-1}(y)} u(x) \Big)\, d\mu_m(y).$$

Ak $m > n$, potom platí

$$\int_{\mathbb{R}^m} u(x) J_n f(x)\, d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{f^{-1}(y)} u(x)\, d\mu_{m-n}(x) \Big)\, d\lambda_n(y)$$

(tzv. veta o koploche).

$\boxed{16}$ Nech je $A \subset \mathbb{R}^m$ merateľná, $m \le n$ a $f : A \to \mathbb{R}^n$ prosté a lipschitzovské zobrazenie. Potom platí $\mu_m(f(A)) = \int_A J_m f(x)\, d\lambda_m(x)$. Dokážte.

4. SÚČIN MIER

Nech je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ aj $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ priestor s úplnou, σ-konečnou mierou. Nech $Z = X \times Y$ a nech je $\mathcal{O}$ σ-algebra v Z generovaná systémom množín tvaru $A \times B$, kde $A \in \mathcal{M}$ a $B \in \mathcal{N}$. Potom existuje jediná σ-konečná miera

λ na $\mathcal{O}$ tak, že $\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ pre každé $A \in \mathcal{M}$ a $B \in \mathcal{N}$. Táto miera sa označuje $\mu \otimes \nu$ a jej **zúplnenie** (t.j. miera $\hat{\lambda}$ definovaná na množinách tvaru $C + S$, kde $C \in \mathcal{O}$ a $S \subset N$, $N \in \mathcal{O}$, $\lambda(N) = 0$, predpisom $\hat{\lambda}(C + S) = \lambda(C)$) je úplná σ-konečná miera, ktorú označíme $\mu \hat{\otimes} \nu$. Ak sú X, Y σ-kompaktné metrické priestory (špeciálne $\mathbb{R}^n$) a miery μ, ν sú Radonove miery, potom je $\mu \hat{\otimes} \nu$ tiež Radonova miera.

- Nech je μ_k k-rozmerná Lebesgueova miera v $\mathbb{R}^k$. Potom platí $\mu_{k+m} = \mu_k \hat{\otimes} \mu_m$.

Pre Lebesgueov integrál funkcií definovaných na Z platia nasledujúce tvrdenia

(**Tonelli**) *Ak je $f : Z \to \mathbb{K}$ merateľná, potom je funkcia $|f(x, \cdot)| : Y \to \mathbb{R}^+$ merateľná pre s.v. $x \in X$, funkcia $\int_Y |f(\cdot, y)|\, d\nu(y) : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ je merateľná a platí*

$$\int_X \Big(\int_Y |f(x, y)|\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) = \int_Z |f|\, d\hat{\lambda}.$$

(**Fubini**) *Ak $f \in \mathcal{L}^1(Z)$, potom $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(Y)$ pre s.v. $x \in X$, $\int_Y f(\cdot, y)\, d\nu(y) \in \mathcal{L}^1(X)$ a*

$$\int_X \Big(\int_Y f(x, y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) = \int_Z f\, d\hat{\lambda}.$$

$\boxed{17}$ Nech $f(x, y) = \dfrac{x - y}{(x + y)^3}$ pre $(x, y) \in M = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Ukážte, že platí

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, dy \Big)\, dx = 1/2 = - \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, dx \Big)\, dy.$$

Platí $f \in \mathcal{L}^1(M)$?

$\boxed{18}$ Nech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = \chi_A - \chi_B$, kde $A = \{(x, y)\,;\, 0 < y < x < y + 1\}$ a $B = \{(x, y)\,;\, 0 < x < y < x + 1\}$. Spočítajte $\int_{\mathbb{R}} \big(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy \big)\, dx$ a $\int_{\mathbb{R}} \big(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx \big)\, dy$.

5. ROZKLADY MIERY

Nech je $\mathcal{M}$ σ-algebra na množine X. Ak je funkcia $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ (resp. $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$) σ-aditívna, potom sa λ nazýva znamienková[†] (resp. komplexná) miera. Pre takúto mieru sa dá definovať konečná nezáporná miera $|\lambda| : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$ (tzv. **variácia miery** λ) predpisom

$$|\lambda|(A) = \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| \, ; \, A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \ A_j \cap A_k = \emptyset \Big\}.$$

Komplexná (znamienková) miera λ sa nazýva borelovská resp. regulárna, ak je miera $|\lambda|$ borelovská resp. regulárna.

Ak pre znamienkovú mieru položíme $\lambda^{\pm} = \frac{1}{2}(|\lambda| \pm \lambda)$, potom sú λ^+ a λ^- nezáporné konečné miery na $\mathcal{M}$ a platí $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ (tzv. **Jordanov rozklad** miery λ). Podobne pre komplexnú mieru existuje Jordanov rozklad $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + i(\lambda_3 - \lambda_4)$, kde λ_j sú konečné nezáporné miery.

Povieme, že funkcia $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \lambda)$, ak $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \lambda_j)$ pre každé j (analogicky pre znamienkovú mieru) a potom kladieme

$$\int_X f \, d\lambda = \int_X f \, d\lambda_1 - \int_X f \, d\lambda_2 + i \int_X f \, d\lambda_3 - i \int_X f \, d\lambda_4.$$

Ak je μ nezáporná miera na σ-algebre $\mathcal{M}$, potom sa miera λ nazýva **absolútne spojitá** vzhľadom k μ (píšeme $\lambda \ll \mu$), ak pre každdú $A \in \mathcal{M}$ takú, že $\mu(A) = 0$, platí $\lambda(A) = 0$. Táto podmienka je ekvivalená s nasledujúcou:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A \in \mathcal{M}) \ \mu(A) < \delta \ \Rightarrow \ |\lambda(A)| < \varepsilon$$

$\boxed{19}$ Nech $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$, $\mu \geq 0$. Pre $A \in \mathcal{M}$ položme $\lambda(A) = \int_A f \, d\mu$. Potom platí $\lambda \ll \mu$. Dokážte.

[†] V definícii znamienkovej miery sa niekedy tiež pripúšťa, aby táto nadobúdala niektorú z hodnôt $\pm\infty$. V tom prípade samozrejme jej variácia nemusí byť konečná. Znamienková miera sa tiež nazýva náboj.

Miery λ_1, λ_2 sa nazývajú navzájom **singulárne** (píšeme $\lambda_1 \perp \lambda_2$), ak existujú disjunktné množiny $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ tak, že pre každé $A \in \mathcal{M}$ platí $\lambda_i(A) = \lambda_i(A \cap A_i)$, $i = 1, 2$ (t.j. miera λ_i je „sústredená" na A_i). Platia nasledujúce tvrdenia

(**Hahnov rozklad**) *Pre každú znamienkovú mieru λ existujú disjunktné množiny $A^+, A^- \in \mathcal{M}$ tak, že $A^+ \cup A^- = X$ a miera λ^+ (resp. λ^-) je sústredená na A^+ (resp. A^-)*

(**Radon–Lebesgue–Nikodým**) *Nech je μ nezáporná σ-konečná miera a λ komplexná miera na σ-algebre $\mathcal{M} \subset \exp(X)$. Potom existuje práve jedna dvojica mier λ_a a λ_s na $\mathcal{M}$ tak, že $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$ a $\lambda_s \perp \mu$. Naviac existuje jediný prvok $h \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ tak, že $\lambda_a(A) = \int_A h\, d\mu$ pre každé $A \in \mathcal{M}$.*

Funkcia h v práve uvedenej vete sa tiež označuje $\dfrac{d\lambda_a}{d\mu}$ a nazýva sa Lebesgue-Radon-Nikodýmova derivácia λ_a vzhľadom k μ.

$\boxed{20}$ Nech je μ_0 σ-konečná, μ_1, μ_2 konečné nezáporné miery na $(X, \mathcal{M})$ a nech $\mu_2 \ll \mu_1 \ll \mu_0$. Ukážte, že s.v. (vzhľadom k μ_0) platí $\dfrac{d\mu_2}{d\mu_0} = \dfrac{d\mu_2}{d\mu_1} \cdot \dfrac{d\mu_1}{d\mu_0}$.

6. RIESZOVA VETA O REPREZENTÁCII

Nech je X σ-kompaktný metrický priestor (napr. otvorená alebo uzavretá množina v $\mathbb{R}^n$) a nech $\mathcal{C}_c(X)$ je priestor spojitých funkcií $f : X \to \mathbb{K}$ s kompaktným nosičom v X (topológia v tomto LF-priestore je zadaná v kapitole 1). Pre každú nezápornú Radonovu mieru μ na X je predpisom $T_\mu(f) = \int_X f\, d\mu$ definovaný na $\mathcal{C}_c(X)$ nezáporný lineárny funkcionál T_μ (t.j. T_μ je lineárne zobrazenie $\mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{K}$ také, že $T_\mu f \geq 0$ pre každú nezápornú funkciu $f \in \mathcal{C}_c(X)$). Rieszova veta o reprezentácii hovorí, že takýmto spôsobom dostaneme všetky nezáporné lineárne funkcionály na $\mathcal{C}_c(X)$, pričom ide o jednoznačné zobrazenie.

$\boxed{21}$ Ukážte, že každý nezáporný lineárny funkcionál T na priestore $\mathcal{C}_c(X)$ je spojitý, t.j. $T \in \mathcal{C}'_c(X)$. Prvky priestoru $M(X) = \mathcal{C}'_c(X)$ sa nazývajú **Radonove miery**.

Z Rieszovej vety o reprezentácii ďalej plynie, že priestor $M_b(X) = \mathcal{C}'_o(X)$ je B-priestor konečných Radonovych mier a platí $|\mu|(X) = \|T_\mu\|$.

$\boxed{22}$ Nech je X kompaktný metrický priestor (takže $M(X) = M_b(X)$) a nech je $f_n, f \in \mathcal{C}_c(X) = \mathcal{C}_o(X) = \mathcal{C}(X) = \mathcal{BUC}(X)$. Potom $f_n \rightharpoonup f$, práve keď je postupnosť $\{\|f_n\|\}$ ohraničená a zároveň $f_n(x) \to f(x)$ pre každé $x \in X$. Dokážte. (Návod: Ak $f_n \rightharpoonup f$ a $x \in X$, potom $f_n(x) \to f(x)$, pretože $F : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{K} : f \mapsto f(x)$ je spojitá forma. Pri dôkaze opačnej implikácie použite reprezentáciu priestoru $\mathcal{C}'(X)$ a Lebesgueovu vetu.)

7. BOCHNEROV INTEGRÁL

Nech je X σ-kompaktný metrický priestor, μ nezáporná Radonova miera na $\mathcal{M} \subset \exp(\mathrm{X})$ (špeciálne $\mathbb{R}^n$ s Lebesgueovou mierou) a E Banachov priestor s normou $\|\cdot\|$. Funkcia $u : X \to E$ sa nazýva

- **jednoduchá**, ak je $u(X)$ konečná množina, $u^{-1}(e) \in \mathcal{M}$ pre každé $e \in u(X)$ a $\mu\big(u^{-1}(e)\big) < \infty$ pre každé $e \neq 0$
- (silno) **merateľná**, ak existuje postupnosť $\{u_n\}$ jednoduchých funkcií tak, že $u_n(x) \to u(x)$ pre s.v. $x \in X$
- **slabo merateľná**, ak je pre každé $f \in E'$ funkcia $f\big(u(\cdot)\big) : X \to \mathbb{K}$ merateľná

Dá sa ukázať (**Pettis**), že *u je merateľná práve vtedy, keď je slabo merateľná a $\mu-$skoro separabilná* (t.j. existuje množina $N \in \mathcal{M}$ miery nula tak, že množina $u(X \backslash N)$ je separabilná).

$\boxed{23}$ Dokážte nasledujúce tvrdenia

a) Ak je $u : X \to E$ alebo $u : X \to (E, \sigma)$ spojitá, potom je merateľná. (Symbolom σ myslíme slabú topológiu na E)
b) Ak sú $u_n : X \to E$ merateľné a $u_n(x) \rightharpoonup u(x)$ s.v., potom je u merateľná.
c) Nech je F B-priestor, $u : X \to E$ merateľná a $f : E \to F$ spojitá. Potom je $f \circ u$ merateľná.
d) Nech je F reflexívny B-priestor, ktorý je husto a spojito vnorený do E. Nech je $u : X \to E$ merateľná, $u(X) \subset F$ a $u : X \to F$ je $\mu-$skoro separabilná. Potom je $u : X \to F$ merateľná.
e) Nech je F reflexívny B-priestor, ktorý je spojito vnorený do E, a nech $u \in \mathcal{B}(X, F) \cap \mathcal{C}(X, E)$. Potom $u \in \mathcal{C}(X, (F, \sigma))$ a teda $u : X \to F$ je merateľná.

Pre u jednoduchú položme $\int_X u\,d\mu = \sum\limits_{0\neq e_j\in u(X)} e_j\mu\big(u^{-1}(e_j)\big)$. Povieme, že funkcia $u : E \to X$ je **B-integrovateľná** (píšeme $u \in \mathcal{L}^1(X,E) = \mathcal{L}^1(X,\mathcal{M},\mu,E)$), ak existuje postupnosť jednoduchých funkcií u_n tak, že $u_n \to u$ s.v. a $\int_X \|u_n - u\|\,d\mu \to 0$. V tom prípade definujeme $\int_X u\,d\mu = \lim \int_X u_n\,d\mu$ (overte korektnosť definície!), pričom pre $E = \mathbb{K}$ ide o už zavedený Lebesgueov integrál. Analogicky ako pre Lebesgueov integrál definujeme B-priestory $L^p(X,E)$. Platí nasledujúce tvrdenie (**Bochner**):

Funkcia $u : X \to E$ je B-integrovateľná, práve keď je merateľná a $\|u\| \in \mathcal{L}^1$ ($=\mathcal{L}^1(X,\mathbb{R})$).

Pre Bochnerov integrál sa dajú dokázať analógie k mnohým tvrdeniam platným pre Lebesgueov integrál (Fubini, Tonelli, Lebesgue, Jegorov, Vitali . . .).

$\boxed{24}$ Nech sú E, F B-priestory, nech je $C : E \to F$ uzavreté lineárne zobrazenie s definičným oborom $\mathcal{D}(C)$, nech $f : X \to \mathcal{D}(C)$, $f \in L^1(X,E)$ a $Cf \in L^1(X,F)$. Potom platí $\int_X f\,d\mu \in \mathcal{D}(C)$ a $C(\int_X f\,d\mu) = \int_X Cf\,d\mu$. Dokážte toto tvrdenie za predpokladu $C \in \mathcal{L}(X)$.

V ďalšom budeme predpokladať, že miera μ má nasledujúcu vlastnosť: ak je $G \subset X$ otvorená a neprázdna, potom $\mu(G) > 0$. Tento predpoklad totiž zaručuje, že v každej triede $f_\sim \in L^p(X,E)$ existuje nanajvýš jedna spojitá funkcia, takže priestor $\mathcal{C}_c(X,E)$ môžeme považovať za podpriestor $L^p(X,E)$ (dokážte !). Pre ľubovoľné $p \in [1,+\infty]$ potom dokonca platí, že *$\mathcal{C}_c(X,E)$ je spojito vnorený do $L^p(X,E)$, pričom pre $p < \infty$ ide zároveň o husté vnorenie.* Ako dôsledok dostávame, že pre separabilný priestor E a $p < \infty$ je $L^p(X,E)$ separabilný B-priestor.

- Ak je $Y = (Y,\mathcal{N},\nu)$ ďalší priestor s mierou splňujúci rovnaké predpoklady ako $(X,\mathcal{M},\mu)$ a na priestore $X\times Y$ uvažujeme súčinovú mieru $\mu\hat{\otimes}\nu$, potom pre $p \in [1,\infty)$ platí $L^p(X, L^p(Y,E)) = L^p(X\times Y, E)$