BANACHOVE A HILBERTOVE PRIESTORY

1. ZÁKLADNÉ POJMY

Normovaným lineárnym priestorom (NLP) nazývame lineárny (= vektorový) priestor X nad telesom $\mathbb{K}$, na ktorom je daná nezáporná reálna funkcia $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ (norma) s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ pre každé $x, y \in X$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ pre každé $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K}$
3. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Ak v NLP položíme $\varrho(x,y) = \|x-y\|$, potom je ϱ (translačne invariantná) metrika, t.j. každý NLP je tiež metrický priestor. NLP X sa nazýva **Banachov** priestor (B-priestor), ak je úplný (t.j. každá cauchyovská postupnosť v X má limitu).

$\boxed{1}$ Nech je X NLP. Dokážte, že X je B-priestor práve vtedy, keď pre každú postupnosť $\{x_n\} \subset X$ platí: ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, potom je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergentný, t.j. existuje $x \in X$ také, že $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_o)\, n > n_o \;\Rightarrow\; \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - x \right\| < \varepsilon$. (Návod: Ak je X úplný a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, potom je $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ cauchyovská postupnosť v X, takže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje. Pri dôkaze implikácie $\Leftarrow$ zvoľte ľubovoľnú cauchyovskú postupnosť $\{y_n\} \subset X$ a vyberte z nej podpostupnosť $\{y_{n_k}\}$ tak, aby platilo $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|y_{n_k} - y_{n_{k-1}}\| < \infty$ (kde $y_{n_0} = 0$). Ukážte, že $y_n \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big(y_{n_k} - y_{n_{k-1}}\big)$.)

$\boxed{2}$ Nech je X NLP. Ukážte, že jednotková guľa $B = \{x \in X\,;\, \|x\| \le 1\}$ je konvexná množina (t.j. pre každé $x, y \in B$ a každé $\lambda \in (0,1)$ platí $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$).

$\boxed{3}$ Nech sú $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ dve normy v lineárnom priestore X, pre ktoré platí: $\|x_n\|_1 \to 0 \iff \|x_n\|_2 \to 0$ (také normy sa nazývajú ekvivalentné). Ukážte, že potom existujú kladné konštanty A, B tak, že $A\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le B\|x\|_1$ pre každé $x \in X$.

$\boxed{4}$ Nech sú M, N uzavreté podmnožiny B-priestoru X. Ukážte, že množina $M + N = \{x + y\,;\, x \in M,\ y \in N\}$ nemusí byť uzavretá. (Návod: Voľte $X = \mathbb{R}^2$, $M = \{(-x, 1/x)\,;\, x > 0\}$, $N = \{(x, 0)\,;\, x \geq 0\}$.)

Množina $M + N$ nemusí byť uzavretá ani keď sú M, N uzavreté podpriestory priestoru X (viď §2).

$\boxed{5}$ Nech je X NLP, nech je $M \subset X$ uzavretá a $N \subset X$ kompaktná. Ukážte, že je $M + N$ uzavretá.

$\boxed{6}$ Ak sú M, N uzavreté podpriestory NLP X, $\dim N < \infty$, potom je $M + N$ uzavretý. Dokážte. (Návod: Nech $z_n \in (M + N)$, $z_n \to z$. Napíšte z_n v tvare $z_n = x_n + y_n$, kde $x_n \in M$, $y_n \in N$, $\|y_n\| < \inf\{\|y\|\,;\, y \in N,\ z_n \in y + M\} + 1$. Ak pre vybranú postupnosť z postupnosti $\{y_n\}$ platí $\|y_n\| \to \infty$, potom pre vybranú postupnosť z postupnosti $w_n = y_n/\|y_n\|$ dostaneme $w_n \to w \in M \cap N$, takže $z_n = (x_n + \|y_n\|w) + (y_n - \|y_n\|w) \in M + N$, odkiaľ plynie spor s voľbou y_n, pretože $\big\|y_n - \|y_n\|w\big\| < \|y_n\| - 1$ pre veľké n. Postupnosť $\{y_n\}$ je teda ohraničená, takže pre vybranú postupnosť platí $y_n \to y \in N$, $x_n = z_n - y_n \to z - y \in M$, $z = (z - y) + y \in M + N$.)

Nech je X lineárny priestor (nad $\mathbb{K}$) so skalárnym súčinom, t.j. zobrazením $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$, ktoré je lineárne v prvej premennej a pre ktoré platí $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pre každé $x, y \in X$ a $\langle x, x \rangle > 0$ pre každé $x \neq 0$. Na X môžeme definovať normu predpisom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Ak je takto vzniknutý NLP úplný (t.j. B-priestor), nazýva sa X **Hilbertov** priestor (H-priestor).

Ak je X H-priestor a $x, y \in X$, $\langle x, y \rangle = 0$, potom sa prvky x, y nazývajú **ortogonálne**, píšeme $x \perp y$. Ak pre množinu $M \subset X$ platí, že každé dva z jej prvkov sú ortogonálne a $M \subset S = \{x \in X\,;\, \|x\| = 1\}$, potom sa M nazýva **ortonormálna množina**. Každý H-priestor má **ortonormálnu bázu**, t.j. maximálnu ortonormálnu podmnožinu. Pre ortonormálnu bázu $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a ľubovoľné $x \in X$ platí $x = \sum\limits_{\alpha \in A} \langle x, x_\alpha \rangle x_\alpha$ † a $\|x\|^2 = \sum\limits_{\alpha \in A} |\langle x, x_\alpha \rangle|^2$. Ďalej v H-priestore platí Schwartzova nerovnosť

† Rovnosť $x = \sum\limits_{\alpha \in A} \langle x, x_\alpha \rangle x_\alpha$ znamená, že $\sum\limits_{\alpha \in A} |\langle x, x_\alpha \rangle| < \infty$ a pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $K_o \subset A$ tak, že $\|x - \sum\limits_{\alpha \in K} \langle x, x_\alpha \rangle x_\alpha\| < \varepsilon$ pre každú konečnú množinu $K \subset A$ s vlastnosťou $K_o \subset K$.

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ a rovnobežníkové pravidlo $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Ak je X H-priestor a $K \subset X$ je neprázdna, uzavretá a konvexná množina, potom pre každé $x \in X$ existuje jediný prvok $P_K x \in K$ taký, že $\|x - P_K x\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$. Zobrazenie $P_K : X \to K$ sa nazýva (ortogonálna) projekcia na množinu K a je charakterizované podmienkou $\operatorname{Re}\langle x - P_K x, y - P_K x\rangle \leq 0$ pre každé $y \in K$.

Ak je K uzavretý podpriestor v X, potom je zobrazenie $I - P_K$ (kde $I : X \to X : x \mapsto x$ je identické zobrazenie) projekcia na uzavretý podpriestor $K^\perp = \{y \in X \,;\, y \perp x \quad \forall x \in K\}$.

$\boxed{7}$ Nech je K neprázdna, konvexná, uzavretá množina v H-priestore X. Ukážte, že projekcia P_K je neexpanzívne zobrazenie, t.j. $\|P_K x - P_K y\| \leq \|x - y\|$. (Návod: Sčítajte spolu nerovnosti $\operatorname{Re}\langle x - P_K x, P_K y - P_K x\rangle \leq 0$ a $\operatorname{Re}\langle y - P_K y, P_K x - P_K y\rangle \leq 0$.) Špeciálne, $P_K : X \to X$ je spojité zobrazenie. Ďalej ukážte, že ak je K uzavretý podpriestor priestoru X, potom je P_K lineárne zobrazenie.

$\boxed{8}$ *Poznámka:* Ak je K podpriestor B-priestoru X, potom projekciou na K sa nazýva ľubovoľné lineárne zobrazenie $P : X \to K$ také, že $Px = x$ pre každé $x \in K$. Ak je táto projekcia spojitá, potom je podpriestor K nutne uzavretý (dokážte !). Ak je naopak K uzavretý podpriestor, potom spojitá projekcia $X \to K$ nemusí existovať.

Ak je X B-priestor a K je neprázdna uzavretá konvexná množina v X, $x \in X$, potom v K nemusí existovať prvok najlepšej aproximácie prvku x (t.j. prvok $z \in K$ taký, že $\|z - x\| \leq \|y - x\|$ pre každé $y \in K$) a pokiaľ existuje, tak nemusí byť jediný (viď nasledujúci §). Ak je však B-priestor X **uniformne konvexný**, t.j.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in S)\, \|x - y\| > \varepsilon \;\Rightarrow\; \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta,$$

potom opäť platí, že pre každú $K \subset X$ uzavretú a konvexnú, $K \neq \emptyset$, a pre každé $x \in X$ existuje v K jediný prvok najlepšej aproximácie prvku x (symbolom S sme označili jednotkovú sféru v X).

$\boxed{9}$ Ukážte, že každý H-priestor je uniformne konvexný. (Návod: Použite rovnobežníkové pravidlo.)

2. PRÍKLADY B– A H–PRIESTOROV

V priestore $\mathbb{K}^n$ môžeme zaviesť normu napr. jedným z nasledujúcich spôsobov:

a) $\|x\|_p = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad p \in [1, \infty)$

b) $\|x\|_{\max} = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$

Priestor $\mathbb{K}^n$ s každou z týchto noriem je B-priestor a všetky uvedené normy sú ekvivalentné, t.j. $\|x_n\|_p \to 0 \iff \|x_n\|_{\max} \to 0$ (dokážte; dá sa dokonca ukázať, že ľubovoľné dve normy v konečnorozmernom priestore sú ekvivalentné). Napriek tomu každá z týchto noriem má iné geometrické vlastnosti. Priestor $\mathbb{K}^n$ s euklidovskou normou $\|\cdot\|_2$ je H-priestor so skalárnym súčinom $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$, takže pre každé x existuje jediný prvok jeho najlepšej aproximácie v jednotkovej guli B. Túto vlastnosť napr. priestor $\mathbb{K}^n$ s normou $\|\cdot\|_1$ alebo $\|\cdot\|_{\max}$ nemá:

$\boxed{10}$ Nech je $X = \mathbb{R}^2$ s normou $\|\cdot\|_1$ resp. $\|\cdot\|_{\max}$ a nech $x = (1, 1)$ resp. $x = (2, 0)$. Ukážte, že v B existuje nekonečne veľa prvkov z takých, že $\|x - z\| = \inf\limits_{y\in B} \|x - y\|$.

Odtiaľ tiež plynie, že priestor $\mathbb{R}^2$ s normou $\|\cdot\|_{\max}$ alebo $\|\cdot\|_1$ nie je uniformne konvexný (o čom sa dá jednoducho presvedčiť priamo). Dá sa dokázať, že priestor $\mathbb{K}^n$ s normou $\|\cdot\|_p$, $p \in (1, \infty)$, je uniformne konvexný.

$\boxed{11}$ Ukážte, že priestor $\mathbb{K}^n$ je separabilný. (Návod: Spočítateľná množina všetkých racionálnych čísel je hustá v $\mathbb{R}$.)

Nech je Ω ľubovoľná neprázdna množina a E B-priestor s normou $|\cdot|$. Označme $\mathcal{B}(\Omega, E)$ systém všetkých ohraničených funkcií $f : \Omega \to E$ s normou $\|f\| = \sup\limits_{t\in\Omega} |f(t)|$. Potom je $\mathcal{B}(\Omega, E)$ B-priestor (dokážte !). V prípade $E = \mathbb{K}$ budeme písať len $\mathcal{B}(\Omega)$ miesto $\mathcal{B}(\Omega, \mathbb{K})$ (podobne pre ďalšie priestory).

Ak je naviac Ω metrický priestor, potom symbolom $\mathcal{BC}(\Omega, E)$ budeme značiť podpriestor priestoru $\mathcal{B}(\Omega, E)$ tvorený všetkými spojitými ohraničenými funkciami $\Omega \to E$. Ide o uzavretý podpriestor priestoru $\mathcal{B}(\Omega, E)$, takže je to B-priestor.

Ak je Ω metrický priestor s metrikou ϱ, potom sa funkcia $f : \Omega \to E$ nazýva **rovnomerne spojitá**, ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall s, t \in \Omega)\, \varrho(s,t) < \delta \;\Rightarrow\; |f(s) - f(t)| < \varepsilon$$

(napr. funkcia $f : (0,1) \to \mathbb{R} : t \mapsto 1/t$ je spojitá, ale nie je rovnomerne spojitá); funkcia $f : \Omega \to E$ sa nazýva α-**hölderovská**, $\alpha \in (0,1]$, ak je konečná hodnota $p_\alpha(f) = \sup\limits_{x \neq y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{\varrho(x,y)^\alpha}$. Každá α-hölderovská funkcia je rovnomerne spojitá.

Podpriestor priestoru $\mathcal{B}(\Omega, E)$ tvorený všetkými ohraničenými, rovnomerne spojitými funkciami je opäť uzavretý podpriestor a budeme ho značiť $\mathcal{BUC}(\Omega, E)$ (= $\mathcal{B}$ounded, $\mathcal{U}$niformly $\mathcal{C}$ontinuous). Ak je Ω kompaktný metrický priestor, potom je každá spojitá funkcia $f : \Omega \to E$ ohraničená a rovnomerne spojitá, takže $\mathcal{BUC}(\Omega, E) = \mathcal{BC}(\Omega, E) = \mathcal{C}(\Omega, E)$, kde $\mathcal{C}(\Omega, E)$ je množina všetkých spojitých funkcií $\Omega \to E$. Ak Ω kompaktný metrický priestor a E je separabilný, potom je tiež priestor $\mathcal{BUC}(\Omega, E) = \mathcal{C}(\Omega, E)$ separabilný.

Priestor $\mathcal{BUC}^{0,\alpha}(\Omega, E)$ je priestor všetkých α-hölderovských funkcií $f \in \mathcal{BUC}(\Omega, E)$ s normou $\|f\|^{0,\alpha} = \sup\limits_{t \in \Omega} |f(t)| + p_\alpha(f)$; ide opäť o B-priestor.

$\boxed{12}$ Ukážte, že priestor $X = \mathcal{BUC}(\mathbb{R}) = \mathcal{BUC}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ nie je separabilný. (Návod: Nech $\varphi \in X$ má nosič $\operatorname{supp} \varphi$ $(= \overline{\{x\,;\, \varphi(x) \neq 0\}})$ v intervale $(0,1)$, $\varphi \not\equiv 0$. Pre ľubovoľnú podmnožinu A celých čísel položme $\varphi_A = \sum\limits_{m \in A} \varphi(m + \cdot)$. Systém $\{\varphi_A\}_A$ je nespočítateľný a $\|\varphi_A - \varphi_B\| = \|\varphi\| > 0$ pre každé $A \neq B$.)

$\boxed{13}$ Nech má množina Ω aspoň dva rôzne prvky. Ukážte, že priestor $\mathcal{B}(\Omega)$ nie je uniformne konvexný. (Návod: Nech $t_o \in \Omega$; položte $f_1 \equiv 1$ a $f_2 = \chi_{\{t_o\}}$, kde χ_A je charakteristická funkcia množiny A, t.j. $\chi_A(t) = 1$ pre $t \in A$, $\chi_A(t) = 0$ pre $t \notin A$.)

Ukážte tiež, že priestor $\mathcal{C}([0,1]) = \mathcal{BUC}([0,1]) = \mathcal{BUC}((0,1))$ nie je uniformne konvexný.

$\boxed{14}$ Definujte v priestore $X = \mathcal{C}([0,1])$ normu predpisom $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt$. Ukážte, že tento NLP nie je úplný. (Návod: Uvažujte postupnosť funkcií $\{f_n\}$, kde $f_n(t) = 0$ pre $t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, $f_n(t) = 1$ pre $t \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ a f_n je lineárna na intervale $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$.)

Položte ďalej $M = \{f \in X\,;\, f(x) = 0 \text{ pre } x \le \frac{1}{2}\}$, $N = \{f \in X\,;\, f(x) = 0 \text{ pre } x \ge \frac{1}{2}\}$ a ukážte, že priestory M, N sú uzavreté, ale priestor $M + N$ nie.

$\boxed{15}$ Ukážte, že v priestore $\mathcal{C}((0,1))$ neexistuje norma s nasledujúcou vlastnosťou $0 \le f_1 \le f_2 \Rightarrow \|f_1\| \le \|f_2\|$. (Návod: Zvoľte nezápornú funkciu $\varphi_n \in \mathcal{C}((0,1))$ tak, aby jej nosič $\operatorname{supp}\varphi_n = \overline{\{x\,;\,\varphi_n(x) \neq 0\}}$ bol obsiahnutý v intervale $\left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right)$ a pritom $\varphi_n \not\equiv 0$. Položte $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$ a ukážte, že $\varphi \in \mathcal{C}((0,1))$ nemôže mať konečnú normu.)

$\boxed{16}$ Nech $\Omega = (0,1)$, $f(t) = t^\beta$, $\beta \in (0,1]$. Ukážte, že $f \in \mathcal{BUC}^{0,\alpha}((0,1))$, práve keď $\alpha \le \beta$.

Definujme ďalej funkcie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ predpisom: $f_n(1/n) = (1/n)^\beta$, $f_n(0) = 0$, $f_n(t) = 0$ pre $t \ge 2/n$, f_n je lineárna na $[0, 1/n]$ aj na $[1/n, 2/n]$. Ukážte, že $f_n \in \mathcal{BUC}^{0,1}((0,1))$, ale $f_n \to 0$ v $\mathcal{BUC}^{0,\alpha}((0,1))$, práve keď $\alpha < \beta$.

$\boxed{17}$ Nech $X = \mathcal{BUC}^{0,\alpha}((0,1))$. Pre $a \in (0,1)$ položme $f_a(t) = (t-a)^\alpha$ pre $t > a$, $f_a(t) = 0$ pre $t \le a$. Ukážte, že $\{f_a\}_a$ tvorí nespočítateľný systém funkcií, pre ktoré platí $\|f_a - f_b\| \ge 1$ (pre $a \neq b$), a dokážte, že odtiaľ plynie, že priestor X nie je separabilný.

Predpokladajme ďalej, že Ω je otvorená množina v $\mathbb{R}^n$. V priestore funkcií $f \in \mathcal{BUC}(\Omega)$, ktorých všetky parciálne derivácie do rádu k existujú a patria opäť do $\mathcal{BUC}(\Omega)$, sa dá zaviesť norma predpisom $\|f\| = \|f\|_k = \sum\limits_{|\alpha| \le k} \sup\limits_{t \in \Omega} |D^\alpha f(t)|$, kde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ je multiindex celých nezáporných čísel, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ a $D^\alpha f(t) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f(t)}{\partial^{\alpha_1} t_1 \ldots \partial^{\alpha_n} t_n}$. Tento priestor označíme $\mathcal{BUC}^k(\Omega)$, ide zase o B-priestor. (Pozor: množina $\mathcal{BUC}^k(\Omega) \subset \mathcal{BUC}(\Omega)$ nie je uzavretá v topológii priestoru $\mathcal{BUC}(\Omega)$. Norma $\|\cdot\|_k$ teda v priestore $\mathcal{BUC}(\Omega)$ definuje inú (silnejšiu) topológiu ako je topológia indukovaná normou priestoru $\mathcal{BUC}(\Omega)$.)

Podobne sa definuje B-priestor $\mathcal{BUC}^{k,\alpha}(\Omega)$ ako priestor všetkých funkcií $f \in \mathcal{BUC}^k(\Omega)$, ktorých k-te derivácie sú α-hölderovské (s príslušnou normou).

Jedným z najdôležitejších príkladov B- a H-priestorov sú **Lebesgueove priestory** (viď tiež dodatok II). Nech je (X, μ) priestor s mierou. Symbolom $\mathcal{L}^p(X)$ $(1 \le p < \infty)$ označme systém všetkých merateľných funkcií

$X \to \mathbb{K}$, pre ktoré je konečná hodnota $\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$. V priestore $\mathcal{L}^p(X)$ zavedieme reláciu ekvivalencie predpisom $f \sim g \iff f(x) = g(x)$ pre s.v. $x \in X$. Lebesgueov priestor $L^p(X)$ definujeme ako faktorpriestor $\mathcal{L}^p(X)/_\sim$ s normou $\|f\sim\|_p = \|f\|_p$. Tento priestor je B-priestor, jeho prvky sú triedy ekvivalencie funkcií z $\mathcal{L}^p(X)$, ale väčšinou sa nerozlišuje medzi triedou $f\sim$ a jej reprezentantom f. Podobne definujeme B-priestor $L^\infty(X)$ ako priestor $\mathcal{L}^\infty(X)/_\sim$, kde $\mathcal{L}^\infty(X)$ je priestor merateľných funkcií $f : X \to \mathbb{K}$, pre ktoré je konečné číslo $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_X |f| = \inf\limits_{\substack{N \subset X \\ \mu(N)=0}} \sup\limits_{x \in X \setminus N} |f(x)|$. Analogicky sa tiež definujú priestory $L^p(X, E)$, kde E je B-priestor (viď dodatok II).

Priestor $L^2(X)$ je H-priestor so skalárnym súčinom $\langle f, g\rangle = \int_X f\bar{g}\, d\mu$.

Ak $X = \mathbb{N}$ a μ je aritmetická miera (t.j. $\mu(\{n\}) = 1$), potom sa priestor $L^p(X)$ značí tiež ℓ^p. Ak je X konečná množina s aritmetickou mierou, potom je zrejme priestor $L^p(X)$ izomorfný s $\mathbb{K}^n$, kde n je počet prvkov množiny X.

Pre merateľné funkcie $f, g : X \to \mathbb{K}$ platí tzv. Hölderova nerovnosť: ak $p, q \geq 1$, $1/p + 1/q = 1$, potom

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |g|^q \, d\mu\right)^{1/q},$$

kde $0 \cdot \infty = 0$.

$\boxed{18}$ Dá sa ukázať, že priestory $L^p(X)$, $1 < p < \infty$, sú uniformne konvexné. Ukážte, že priestory $L^1(\Omega)$ a $L^\infty(\Omega)$ (kde Ω je otvorená množina v $\mathbb{R}^n$ s Lebesgueovou mierou) nie sú uniformne konvexné.

$\boxed{19}$ Ak je Ω otvorená množina v $\mathbb{R}^n$, potom sú priestory $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, separabilné. Ukážte, že priestor $L^\infty((0,1))$ nie je separabilný. (Návod: Pre $a \in [0,1]$ položte $f_a = \chi_{A(a)}$, kde $A(a) = [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap (0,1)$, a ukážte $\|f_a - f_b\| \geq 1$ pre $a \neq b$.)

$\boxed{20}$ Nech $X = L^\infty((0,1))$ a nech $K = \{f \in \mathcal{C}([0,1])\,;\, \int_0^1 f(x)\, dx = 0\}$, $f_o = \chi_{[0,1/2]}$. Ukážte, že K je uzavretý podpriestor B-priestoru X a v K neexistuje prvok najlepšej aproximácie pre f_o.

Sobolevove priestory. Nech je Ω otvorená množina v $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$ a $f \in L^p(\Omega)$. Ak existuje funkcia $g \in L^p(\Omega)$ tak, že pre každú funkciu $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (= priestor hladkých funkcií s kompaktným nosičom v Ω, viď dodatok I) platí $\int_\Omega f \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\displaystyle\int_\Omega g\varphi\, dx$, potom povieme, že f má distributívnu deriváciu $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ v $L^p(\Omega)$. Sobolevov priestor $W^{k,p}(\Omega)$ je priestor tých funkcií $f \in L^p(\Omega)$, ktoré majú všetky distributívne derivácie až do rádu k v $L^p(\Omega)$. Norma v tomto priestore je daná predpisom $\|f\|_{k,p} = \Big(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p}$.

Priestory $W^{k,p}(\Omega)$ pre $1 \le p < \infty$ sú separabilné, ale priestor $W^{k,\infty}(\Omega)$ nie. Priestor $W^{k,2}(\Omega)$ je H-priestor.

Funkcie $f \in W^{1,p}(\Omega)$ sa dajú charakterizovať tiež nasledovne: funkcia $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ je v priestore $W^{1,p}(\Omega)$ práve vtedy, keď sa dá zmeniť na množine miery nula tak, že je absolútne spojitá (viď dodatok II) na skoro všetkých (v zmysle $(n-1)$-rozmernej Lebesgueovej miery) rovnobežkách s každou súradnicovou osou x_i $(i = 1,\dots,n)$ a klasická derivácia $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ podľa každej premennej padne do priestoru $L^p(\Omega)$. Špeciálne pre $n = 1$ je $f \in W^{1,p}(\Omega) \iff f$ je absolútne spojitá a $f' \in L^p(\Omega)$.

Ak je Ω ohraničená oblasť so spojitou hranicou (presnú definíciu viď napr. [KJF, 6.2.3.]) a $p < \infty$, potom je priestor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)/_\Omega$ (= reštrikcie funkcií z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ na oblasť Ω) hustým podpriestorom priestoru $W^{k,p}(\Omega)$, takže Sobolevov priestor $W^{k,p}(\Omega)$ môžeme v tomto prípade tiež definovať ako zúplnenie priestoru $\mathcal{BUC}^k(\Omega)$ s normou $\|\cdot\|_{k,p}$.

Sobolevov priestor $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ tiež možno charakterizovať ako priestor tých funkcií $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pre ktorých Fourierovu transformáciu $\hat{f}$ platí $\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2\big(1+|\xi|^2\big)^k\, d\xi < \infty$.

$\boxed{21}$ Ukážte, že pre $p < \infty$ neplatí $\mathcal{BUC}^k(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

$\boxed{22}$ Nech $f : (0,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \min\{x, 1-x\}$. Ukážte, že $f \in W^{1,\infty}((0,1))$, a neexistujú funkcie $f_n \in \mathcal{BUC}^1((0,1))$ tak, aby $f_n \to f$ vo $W^{1,\infty}((0,1))$.

$\boxed{23}$ Nech $f = \chi_A$, kde $A = (0,1/2) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Ukážte, že $f \notin W^{1,2}\big((0,1)^2\big)$.

$\boxed{24}$ Nech $X = W^{1,2}((0,1))$, $M = \{f \in X\,;\, f(\frac{1}{2n}) = 0 \text{ pre } n = 1,2,\dots\}$, $N = \{f \in X\,;\, f(\frac{1}{2n-1}) = 0 \text{ pre } n = 1,2,\dots\}$, $\varphi(x) = x^{3/2}$. Ukážte, že M, N sú uzavreté podpriestory X, ale $\varphi \in \overline{M+N} \setminus (M+N)$.

3. SPOJITÉ LINEÁRNE ZOBRAZENIA

$\boxed{25}$ Nech sú X, Y NLP a $A : X \to Y$ lineárne zobrazenie. Dokážte, že A je spojité práve vtedy, keď je ohraničené (t.j. zobrazuje ohraničené množiny v X na ohraničené množiny v Y). (Návod: Nech je $M \subset X$ ohraničená a $A(M)$ neohraničená. Potom existujú $x_n \in M$ tak, že $\|Ax_n\| \to \infty$. Ukážte, že pre $z_n = \dfrac{x_n}{\|Ax_n\|}$ platí $z_n \to 0$, ale $Az_n \not\to 0$, takže A nie je spojité. Ak je naopak A ohraničené, potom $\|Ax\| \le C$ pre každé $\|x\| \le 1$, odkiaľ plynie $\|Ax - Az\| \le C\|x - z\|$, a teda tiež spojitosť A. Z poslednej nerovnosti dokonca plynie, že každé spojité lineárne zobrazenie $A : X \to Y$ je rovnomerne spojité.)

Nech sú X a Y B-priestory s normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$. Potom je priestor $\mathcal{L}(X, Y)$ všetkých spojitých lineárnych zobrazení $A : X \to Y$ (definovaných na celom priestore X) s normou $\|A\| = \sup\{\|Ax\|_Y \,;\, \|x\|_X \le 1\}$ B-priestor. V prípade $X = Y$ píšeme $\mathcal{L}(X)$ miesto $\mathcal{L}(X, X)$.

Ak je $X \subset Y$ a identické zobrazenie $I : X \to Y : x \mapsto x$ je spojité, potom hovoríme, že priestor X je spojito vnorený do Y, píšeme $X \hookrightarrow Y$. Ak je naviac priestor X hustý v Y (v topológii priestoru Y), potom píšeme $X \overset{d}{\hookrightarrow} Y$.

$\boxed{26}$ Každé lineárne zobrazenie $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ je spojité a dá sa reprezentovať ako matica (a_{ij}) typu $m \times n$. Nech je v $\mathbb{K}^n$ i v $\mathbb{K}^m$ daná euklidovská norma. Potom platí $\|A\| \le \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$. Dokážte.

$\boxed{27}$ Pre $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ položme $(Af)(x) = x^2 f(x)$. Určite normu $A \in \mathcal{L}(X)$, ak

- $X = L^p((0, 1))$, $1 \le p \le \infty$ $\quad (\|A\| = 1)$
- $X = \mathcal{BUC}^1((0, 1))$ $\quad (\|A\| = 3)$
- $X = \mathcal{BUC}^{0,\alpha}((0, 1))$ $\quad (\|A\| = 1 + \dfrac{2}{2-\alpha}\left(\dfrac{2-2\alpha}{2-\alpha}\right)^{1-\alpha})$
- $X = W^{1,1}((0, 1))$ $\quad (3 \ge \|A\| \ge 4/3)$

$\boxed{28}$ Nech $X = L^p(\Omega)$, kde Ω je priestor so σ-konečnou mierou (špeciálne $\Omega \subset \mathbb{R}^n$). Nech $\varphi \in L^\infty(\Omega)$, $A : X \to X : f \mapsto \varphi \cdot f$. Ukážte, že $\|A\| = \|\varphi\|_{L^\infty}$. Je predpoklad σ-konečnosti miery potrebný ? (Riešenie: Pre $p < \infty$ áno; uvažujte $\Omega = \{x, y\}$, $\mu(\{x\}) = 1$, $\mu(\{y\}) = +\infty$, $\varphi = \chi_{\{y\}}$.)

$\boxed{29}$ Pre $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ a $a > 0$ položme $(Af)(x) = f(x^a)$. Zistite, pre ktoré a platí $A \in \mathcal{L}(X)$ a určite $\|A\|$, ak

- $X = L^2((0, 1))$ $\quad (a \le 1, \quad \|A\| = 1/\sqrt{a})$
- $X = \mathcal{BUC}((0, 1))$ $\quad (a > 0, \quad \|A\| = 1)$

- $X = \mathcal{BUC}^{0,\alpha}((0,1))$ $\qquad (a \geq 1, \quad \|A\| = a^{\alpha})$
- $X = W^{1,2}((0,1))$ $\qquad (a \geq 1, \quad \sqrt{a} \leq \|A\| < \sqrt{a+2})$

$\boxed{30}$ Nech $X = \mathcal{C}([0,1]) = \mathcal{BUC}((0,1))$, $A_n \in \mathcal{L}(X)$, $(A_n f)(t) = f(t^{1+1/n})$. Ukážte, že $A_n f \to f$ pre každé $f \in X$, ale $\|A_n - I\| = 1$.

$\boxed{31}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R})$, $(A_t\varphi)(x) = \varphi(x+t)$. Ukážte, že $A_t \in \mathcal{L}(X)$, $\|A_t\varphi\| = \|\varphi\|$ a súčasne $\langle A_t\varphi, \psi\rangle \to 0$ pre každé $\varphi, \psi \in X$ a $t \to +\infty$ (t.j. $A_t \to 0$ v tzv. slabej operátorovej topológii).

$\boxed{32}$ Nech $(Af)(x) = \int_0^x f(y)\,dy$. Určite $\|A\|$ pre $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, ak

- $X = L^2((0,1))$, $Y = W^{1,2}((0,1))$ $\qquad (2/\sqrt{3} \leq \|A\| \leq \sqrt{3/2})$
- $X = L^\infty((0,1))$, $Y = \mathcal{BUC}^{0,1}((0,1))$ $\qquad (\|A\| = 2)$
- $X = \mathcal{BUC}((0,1))$, $Y = \mathcal{BUC}^1((0,1))$ $\qquad (\|A\| = 2)$
- $X = \mathcal{BUC}^{0,\alpha}((0,1))$, $Y = \mathcal{BUC}^{1,\alpha}((0,1))$ $\qquad (\|A\| = 2)$
- $X = Y = \mathcal{BUC}((0,1))$ $\qquad (\|A\| = 1)$
- $X = Y = L^2((0,1))$ $\qquad (\|A\| = 2/\pi)$

$\boxed{33}$ Nech $Af = f'$. Zistite, či $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ a prípadne určite $\|A\|$, ak

- $X = Y = \mathcal{BUC}^1((0,1))$ $\qquad (A \notin \mathcal{L}(X,Y))$
- $X = \mathcal{BUC}^{1,\alpha}((0,1))$, $Y = \mathcal{BUC}^{0,\alpha}((0,1))$ $\qquad (\|A\| = 1)$
- $X = W^{1,p}(\mathbb{R})$, $Y = L^p(\mathbb{R})$ $\qquad (\|A\| = 1)$

$\boxed{34}$ Ukážte, že $W^{1,2}((0,1)) \hookrightarrow \mathcal{BUC}^{0,1/2}((0,1))$.

Riešenie: Označme $\|\cdot\|_{1,2}$ resp. $\|\cdot\|^{0,1/2}$ normu v priestore $W^{1,2}$ resp. $\mathcal{BUC}^{0,1/2}$. Pre každé $f \in W^{1,2}$ potom platí

$$|f(t) - f(s)| = |\int_s^t f'(\tau)\,d\tau| \leq \Big(\int_s^t |f'(\tau)|^2 d\tau\Big)^{1/2} \cdot |t-s|^{1/2} \leq \|f\|_{1,2} \cdot |t-s|^{1/2},$$

takže f je 1/2-hölderovská a $p_{1/2}(f) \leq \|f\|_{1,2}$. Špeciálne tiež platí $\left|\sup_{(0,1)} |f| - \inf_{(0,1)} |f|\right| \leq \|f\|_{1,2}$, a pretože

$$\|f\|_{1,2}^2 \geq \int_0^1 |f(\tau)|^2 d\tau \geq \int_0^1 (\inf|f|)^2 d\tau = (\inf|f|)^2,$$

dostávame $\sup|f| \leq \|f\|_{1,2} + \inf|f| \leq 2\|f\|_{1,2}$, takže $\|f\|^{0,1/2} = \sup|f| + p_{1/2}(f) \leq 3\|f\|_{1,2}$. Odtiaľ plynie $W^{1,2}((0,1)) \hookrightarrow \mathcal{BUC}^{0,1/2}((0,1))$, pričom norma tohto vnorenia je ≤ 3.

$\boxed{35}$ Nech $X = \{f \in W^{1,2}((0,1))\,;\, f(0)=f(1)=0\}$ (vzhľadom k predošlému cvičeniu má podmienka $f(0)=f(1)=0$ zmysel a X je uzavretý podpriestor priestoru $W^{1,2}$). V priestore X definujme normu $\|f\| = \left(\int\limits_0^1 |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}$. Ukážte, že táto norma je v priestore X ekvivalentná norme $\|\cdot\|_{1,2}$ a že norma vnorenia $(X, \|\cdot\|) \hookrightarrow \mathcal{BUC}((0,1))$ sa rovná $1/2$.

$\boxed{36}$ Pre Sobolevove priestory platia tiež nasledujúce vnorenia (kde $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$):

- ak $k < n/p$, potom $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, kde $1/q = 1/p - k/n$. Ak v priestore $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ uvažujeme normu $\|f\| = \|\nabla f\|_{L^p}$, potom sa norma vnorenia $W^{1,p} \hookrightarrow L^q$ (pre $p > 1$) nadobúda na funkciách tvaru $f(x) = (\lambda + |x|^{p/(p-1)})^{1-n/p}$, kde $\lambda > 0$, takže napr. pre $n = 3$ a $p = 2$ je rovná $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{2/3}$.
- ak $k > n/p$, potom $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{BUC}^{m,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, kde $0 \leq m < k - n/p$, $0 < \alpha \leq k - m - n/p$, $\alpha < 1$.
- ak je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou (viď [KJF]), potom je pre $k < n/p$ resp. $k = n/p$ resp. $k > n/p$ priestor $W^{k,p}(\Omega)$ spojito vnorený do priestoru $L^q(\Omega)$ resp. $L^r(\Omega)$ resp. $\mathcal{BUC}^{0,\alpha}(\Omega)$, kde $1/q \geq 1/p - k/n$ resp. $r \in [1, \infty)$ resp. $\alpha \leq k - n/p$, $\alpha < 1$. V poslednom prípade sa dá tiež dokázať vnorenie $W^{k,p} \hookrightarrow \mathcal{BUC}^{m,\alpha}$, ak $k > m + n/p$, $\alpha \leq k - m - n/p$, $\alpha < 1$.

$\boxed{37}$ Ak je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená a ohraničená, potom platí $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) = \mathcal{BUC}(\Omega) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$ pre ľubovoľné $1 \leq p < \infty$ (viď tiež dodatok II). Ukážte, že vnorenie $\mathcal{BUC}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ nie je husté. (Návod: Zvoľte $x_o \in \Omega$ a $\varepsilon > 0$ tak, aby $A = \{x\,;\, |x - x_o| < \varepsilon\} \subset \Omega$ a položte $f = \chi_A \in L^\infty(\Omega)$. Ukážte, že neexistujú $f_n \in \mathcal{BUC}(\Omega)$ tak, aby $f_n \to f$ v $L^\infty(\Omega)$; viď tiež príklad 22.)

$\boxed{38}$ Nech $X = L^2((-1,1))$, $f_n(t) = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\,\dfrac{1}{2^n n!}\,\dfrac{d^n}{dt^n}\big[(t^2 - 1)^n\big]$ (Legendrove polynómy). Ukážte, že $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ tvorí ortonormálnu bázu v X. (Návod pre dôkaz maximality (=úplnosti) systému $\{f_n\}$: Stačí dokázať, že lineárne kombinácie funkcií f_n sú husté v X. To však plynie z toho, že priestor týchto kombinácií obsahuje všetky polynómy a tie tvoria podľa Stone-Weierstrassovej vety hustú podmnožinu priestoru $\mathcal{C}([-1,1])$, ktorý je zase husto vnorený v $L^2((-1,1))$ (viď predošlé cvičenie).) Podobné vlastnosti majú tiež Laguerrove, Hermitove, Jacobiho a Čebyševove polynómy v priestoroch $L^2_\varphi((a,b))$ s príslušnou váhou $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^+$ (ide o priestory tých funkcií f, pre ktoré je konečná $\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi(x)\,dx$).

Nech sú X, Y B-priestory, $A_\alpha \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\alpha \in M$. Z Banach-Steinhausovej vety plynie, že *ak je množina $\{\|A_\alpha x\|\}_{\alpha \in M}$ ohraničená pre každé $x \in X$, potom je množina $\{\|A_\alpha\|\}_{\alpha \in M}$ ohraničená. Ak pre indexovú množi-*

nu M platí $M = \mathbb{N}$ (t.j. ide o postupnosť zobrazení $\{A_n\}$) a ak $A_n x \to Ax$ pre každé $x \in X$, potom platí $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\|A\| \leq \liminf \|A_n\|$ a $A_n x \to Ax$ rovnomerne na kompaktných množinách v X. (viď tiež dodatok I).

$\boxed{39}$ Nech sú X, Y B-priestory, $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, nech existuje hustá množina $M \subset X$ tak, že $A_n x \to Ax$ pre každé $x \in M$, a nech je postupnosť $\{\|A_n\|\}$ ohraničená. Ukážte, že potom je postupnosť $\{A_n x\}$ konvergentná pre každé $x \in X$.

$\boxed{40}$ Nech je X podpriestor priestoru ℓ^∞ tvorený všetkými postupnosťami $x = \{x_n\}$, pre ktoré platí $x_n = 0$ pre $n \geq n_o = n_o(x)$. Definujme $A_n : X \to \mathbb{K} : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Ukážte, že postupnosť $\{A_n(x)\}$ je ohraničená pre každé $x \in X$, ale postupnosť $\{\|A_n\|\}$ nie.

$\boxed{41}$ Nech je X separabilný H-priestor s ortonormálnou bázou $\{e_n\}$ a $A_n x = \langle x, e_n \rangle$. Ukážte, že $A_n x \to 0$ pre každé $x \in X$ a súčasne $\|A_n\| = 1$.

$\boxed{42}$ Nech je X B-priestor, $A_n \to A$, $B_n \to B$ v $\mathcal{L}(X)$. Ukážte, že potom $A_n B_n \to AB$ v $\mathcal{L}(X)$.

Ďalej s použitím Banach-Steinhausovej vety dokážte, že ak $A_n, B_n \in \mathcal{L}(X)$ a $A_n x \to Ax$, $B_n x \to Bx$ pre každé $x \in X$, potom $A_n B_n x \to ABx$ pre každé $x \in X$.

$\boxed{43}$ Systém funkcií $\{f_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, kde $f_k(x) = \dfrac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, tvorí ortonormálnu bázu priestoru $L^2((0,2\pi))$. Odtiaľ plynie, že pre každé $f \in L^2((0,2\pi))$ platí $S_n f \to f$ v $L^2((0,2\pi))$, kde

$$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, f_k \rangle f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cdot + t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}\, dt,$$

a funkciu f sme 2π-periodicky rozšírili na $(2\pi, 4\pi)$. Ak je naviac $f : [0,2\pi] \to \mathbb{K}$ absolútne spojitá a $f(0) = f(2\pi)$, potom platí $S_n f \to f$ rovnomerne v $[0,2\pi]$.

Položme $X = \{f \in \mathcal{C}([0,2\pi])\,;\, f(0)=f(2\pi)\}$. Ukážte pomocou Banach-Steinhausovej vety, že ak zvolíme $a \in [0,2\pi]$, potom existuje $f \in X$ tak, že Fourierov rad $(S_n f)(a)$ funkcie f v bode a diverguje. (Návod: Predpokladajte opak, potom musí byť postupnosť noriem zobrazení $A_n : X \to \mathbb{K} : f \mapsto (S_n f)(a)$ ohraničená. Ukážte, že platí $\|A_n\| = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \ \to \infty$ pre $n \to \infty$.) Z Banach-Steinhausovej vety dokonca plynie, že takéto funkcie f (pre ktoré je postupnosť $(S_n f)(a)$ neohraničená) tvoria reziduálnu množinu v priestore X, odkiaľ plynie, že tiež pre každú spočítateľnú množinu $M \subset [0,2\pi]$ existuje funkcia $f \in X$ tak, že rad $(S_n f)(a)$ diverguje pre každé $a \in M$.

Poznámka: Systém prvkov $\{f_k\}$ v B-priestore sa nazýva **topologická báza**, ak pre každé f v tomto priestore existuje jediná postupnosť čísel $\{c_k\} \subset \mathbb{K}$ tak, že $f = \sum c_k f_k$.

Z vyššie uvedeného plynie, že $f_k(x) = e^{ikx}$ netvorí topologickú bázu v priestore X. V priestore $L^p((0, 2\pi))$ tvorí tento systém topologickú bázu práve pre $1 < p < \infty$.

$\boxed{44}$ Pre $f \in X = \mathcal{C}([0,1])$ a $x_k = \frac{k}{n}$ položme

$$(A_n f)(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big(\prod_{k \neq i} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \Big) f(x_i),$$

t.j. $A_n f$ je Lagrangeov interpolačný polynóm funkcie f, $A_n \in \mathcal{L}(X)$. Ukážte, že existujú $f_n \in X$ tak, že $\|f_n\| = 1$ a $|(A_n f_n)(\frac{1}{2n})| \to \infty$, odkiaľ plynie $\|A_n\| \to \infty$. Z Banach-Steinhausovej vety teraz plynie, že existuje $f \in X$ tak, že $A_n f \not\to f$ v $\mathcal{C}([0,1])$.

Zobrazenia $X \to \mathbb{K}$ sa tiež nazývajú formy alebo funkcionály. Priestor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ spojitých lineárnych foriem sa značí X' (alebo X^*) a nazýva sa **duál** (duálny priestor k) priestoru X. Základným tvrdením o lineárnych formách je tzv. Hahn-Banachova veta, z ktorej plynie, že *ľubovoľnú spojitú lineárnu formu* $f : M \to \mathbb{K}$ (kde M je podpriestor X) *možno rozšíriť na spojitú lineárnu formu* $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ *tak, aby* $\|\tilde{f}\| = \sup\{|f(x)|\,;\ x \in M,\ \|x\| \leq 1\}$. Dôsledkom tejto vety je tiež tvrdenie o oddeľovaní konvexných množín: *Nech sú A, B neprázdne konvexné disjunktné množiny v NLP*[†] X. *Ak je A otvorená, potom existuje $f \in X'$ a $\xi \in \mathbb{R}$ tak, že pre každé $x \in A$ a $y \in B$ platí* $\operatorname{Re} f(x) < \xi \leq \operatorname{Re} f(y)$. *Ak je A kompaktná a B uzavretá, potom existuje $f \in X'$ tak, že* $\sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$. Množiny A a B teda môžeme od seba oddeliť nadrovinou $\operatorname{Re} f = \xi$ pre vhodné ξ.

$\boxed{45}$ Ukážte, že pre každé x v NLP X platí $\|x\| = \max\{|f(x)|\,;\ f \in X',\ \|f\| \leq 1\}$.

$\boxed{46}$ Nech sú $x_1, \ldots, x_n \in X$ lineárne nezávislé. Potom existujú $f_1, \ldots, f_n \in X'$ tak, že $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ (tzv. biortogonálna postupnosť). Dokážte.

Ukážte tiež, že pre dané $f_1, \ldots, f_n \in X'$ lineárne nezávislé existujú $x_1, \ldots, x_n \in X$ tak, že $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.

$\boxed{47}$ Nech $X = L^2((-1,1))$, $A = \{f \in \mathcal{BUC}((-1,1))\,;\ f(0) = \alpha\}$, $B = \{f \in \mathcal{BUC}((-1,1))\,;\ f(0) = \beta\}$, $\alpha \neq \beta$. Potom sú A, B konvexné a disjunktné, ale nedajú sa od seba oddeliť spojitým lineárnym funkcionálom v X. Dokážte. (Návod: A, B sú husté v X, takže pre $0 \neq f \in X'$ sú $f(A), f(B)$ husté v $\mathbb{K}$. Ukážte, že dokonca platí $f(A) = f(B) = \mathbb{K}$.)

[†] stačí, aby X bol LKP (viď dodatok I)

Duál k H-priestoru X sa dá pomocou Rieszovej vety o reprezentácii stotožniť so samotným priestorom X; každej forme $F \in X'$ pritom zodpovedá prvok $x_F \in X$ nasledujúcim spôsobom: $F(x) = \langle x, x_F \rangle$ pre každé $x \in X$. Podobne duál k priestoru $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, sa dá stotožniť s priestorom $L^q(X, \mu)$ (kde $1/p + 1/q = 1$; $q = +\infty$ pre $p = 1$) nasledovne: $(L^p)' \to L^q : F \mapsto g_F$, kde $F(f) = \int_X f \bar{g}_F \, d\mu$ pre každé $f \in L^p$.

Každý B-priestor X môžeme prirodzeným spôsobom vnoriť do jeho druhého duálu $X'' = \mathcal{L}(X', \mathbb{K})$; ide o zobrazenie $Q : X \to X'' : x \mapsto Q_x$, kde $Q_x(f) = f(x)$ pre $f \in X'$. Zobrazenie Q je izometria, t.j. $\|Q_x\| = \|x\|$. Priestor X sa nazýva **reflexívny**, ak platí $Q(X) = X''$. Každý H-priestor a každý uniformne konvexný B-priestor je reflexívny. Špeciálne, priestory L^p a $W^{k,p}$ sú reflexívne pre $1 < p < \infty$ (v prípade priestoru $L^p(X, E)$ musí byť tiež priestor E reflexívny). Naproti tomu priestory L^1, L^∞ a $\mathcal{BUC}$ reflexívne nie sú.

Reflexivita je topologická vlastnosť (t.j. nezávisí na voľbe konkrétnej (ekvivalentnej) normy ako napr. uniformná konvexita) a reflexívne priestory majú celý rad dôležitých vlastností. V reflexívnom priestore je každá konvexná uzavretá ohraničená množina K kompaktná v tzv. slabej topológii (viď dodatok I), odkiaľ napr. plynie, že ľubovoľná spojitá forma $f : X \to \mathbb{R}$ nadobúda na K svoje infimum i supremum a každé $x \in X$ má v K prvok svojej najlepšej aproximácie. Nadobúdanie $\inf_K f$ sa dá v reflexívnom priestore dokázať aj pre nelineárne spojité funkcionály $f : X \to \mathbb{R}$, ktoré sú konvexné (t.j. $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$ pre $\lambda \in (0, 1)$).

$\boxed{48}$ Nech $X = \mathcal{BUC}((0, 1), \mathbb{R})$ a nech

- $K = B = \{f \in X \,;\, \|f\| \leq 1\}$, $F(f) = \int_0^{1/2} f(t)\, dt - \int_{1/2}^1 f(t)\, dt$
- $K = \{f \in B \,;\, f(0){=}f(1){=}0\}$, $F(f) = \int_0^1 f(t)\, dt$
- $K = \{f \in B \,;\, f\big(\frac{1}{2n-1}\big){=}0$ pre každé $n \in \mathbb{N}\}$, $F(f) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{1}{2^n} f\big(\dfrac{1}{2n}\big)$.

Ukážte, že vo všetkých troch prípadoch platí $F \in X'$, K je konvexná, uzavretá a ohraničená, ale F nenadobúda na K svoje infimum ani supremum. Podľa Rieszovej vety o reprezentácii (viď dodatok II) zodpovedá funkcionálu F konečná Radonova miera μ_F.

Čomu sa rovná μ_F v uvedených troch prípadoch ?

Položte ďalej $K = \{f \in B\,;\, f(0) = \int_0^1 f(t)\,dt = 0\}$ a ukážte, že funkcia $f(t)=t$ nemá v K prvok najlepšej aproximácie (viď tiež príklad 20.)

$\boxed{49}$ S využitím Rieszovej vety o reprezentácii a Hahn-Banachovej vety ukážte, že pre dané $n \in \mathbb{N}$ existuje (konečná Radonova) miera μ_n na intervale $[0,1]$ tak, že $P'(0) = \int_0^1 P\,d\mu_n$ pre každý polynóm P stupňa $\leq n$. Ukážte ďalej, že neexistuje (konečná Radonova) miera μ na $[0,1]$ tak, aby $P'(0) = \int_0^1 P\,d\mu$ pre ľubovoľný polynóm.

4. KOMPAKTNOSŤ V NLP

Kompaktnosť je jeden zo základných pojmov vo funkcionálnej analýze. Kompaktné množiny majú niektoré dôležité vlastnosti, napr. spojitá funkcia na kompaktnej množine nadobúda svoje infimum, v metrickom priestore z každej postupnosti prvkov v kompaktnej množine možno vybrať konvergentnú podpostupnosť (čo sa často využíva pri rôznych limitných prechodoch).

Podmnožina M B-priestoru X je relatívne kompaktná práve vtedy, keď je totálne ohraničená, t.j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $M_\varepsilon \subset M$ tak, že $(\forall x \in M)(\exists x_\varepsilon \in M_\varepsilon)\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$. Množina M_ε sa potom nazýva ε-sieť množiny M. Pretože v $\mathbb{K}^n$ je každá ohraničená množina totálne ohraničená, je každá ohraničená uzavretá množina v $\mathbb{K}^n$ kompaktná. V nekonečnorozmernom B-priestore toto tvrdenie (bohužiaľ) neplatí: *jednotková guľa B nie je nikdy kompaktná.* To je dôsledok tzv. Rieszovej lemy, podľa ktorej *pre každý uzavretý podpriestor $Y \subset X$, $Y \neq X$, a každé $\varepsilon > 0$ existuje prvok $x \in B$ tak, že* $\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| \geq 1 - \varepsilon$. (V H-priestore zrejme stačí zvoliť $x \perp Y$, $\|x\| = 1$.)

Dôkaz: Zvoľme $x \in X \backslash Y$. Z uzavretosti Y plynie, že $d = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$. Zvoľme $y_\varepsilon \in Y$ tak, aby $d \leq \|x - y_\varepsilon\| < d(1+\varepsilon)$ a položme $x_\varepsilon = (x - y_\varepsilon)/\|x - y_\varepsilon\|$. Potom $x_\varepsilon \in B$ a pre ľubovoľné $y \in Y$ dostávame

$$\|x_\varepsilon - y\| = \frac{1}{\|x - y_\varepsilon\|}\big\|x - \underbrace{(y_\varepsilon + y\|x - y_\varepsilon\|)}_{\in Y}\big\| \geq \frac{d}{d(1+\varepsilon)} > 1 - \varepsilon,$$

odkiaľ plynie tvrdenie Rieszovej lemy.

Ak teraz zvolíme postupnosť $x_n \in B$ tak, že $\|x_n - x_m\| \geq 1 - \varepsilon$ pre každé $n \neq m$, potom $\{x_n\}_n$ nie je totálne ohraničená, takže B nie je kompaktná.

$\boxed{50}$ Nech je X separabilný H-priestor s ortonormálnou bázou $\{e_n\}$. Podľa vyššie dokázaného nie je guľa $B = \{x \in X\,;\, \sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq 1\}$ kompaktná. Ukážte, že množina $K = \{x \in X\,;\, |\langle x, e_n\rangle| \leq 1/n\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ je kompaktná. (Návod: Nech je $\varepsilon > 0$ a zvoľme n tak, aby $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon^2$. Množina $M^n = \{x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\,;\, |c_i| \leq 1/i\}$ je ohraničená množina v konečnorozmernom priestore, takže je totálne ohraničená a má konečnú ε-sieť M^n_ε. Ukážte, že M^n_ε je 2ε-sieť množiny M). Uvedomte si, čo toto tvrdenie znamená napr. v prípade priestoru $L^2((0,2\pi))$: ukážte, že pre $f \in \mathcal{BUC}^1((0,2\pi))$ s vlastnosťou $f(0) = f(2\pi)$ platí $|\langle f, e_n\rangle| \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_{\mathcal{BUC}^1}/n$, kde $e_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi}$.

$\boxed{51}$ Nech je $1 \leq p < \infty$ a nech $M \subset \ell^p$ je ohraničená. Ukážte, že M je relatívne kompaktná práve vtedy, keď

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup\Big\{\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p\,;\, x \in M\Big\}\right) = 0.$$

Kompaktné množiny v priestoroch $\mathcal{BUC}$ a L^p sa dajú charakterizovať nasledovne:

- (**Arzelà-Ascoli**) Nech je (K, ρ) kompaktný metrický priestor. Množina $M \subset \mathcal{BUC}(K)$ je relatívne kompaktná práve vtedy, keď je ohraničená a funkcie $f \in M$ sú rovnako spojité, t.j.

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall f \in M)(\forall x, y \in K)\varrho(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

- (**Riesz**) Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená a $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq k\}$. Množina $M \subset L^p(\Omega)$ je relatívne kompaktná práve vtedy, keď je ohraničená a pre $f \in M$ platí

  (i) $\|f\|_{L^p(\Omega\setminus B_k)} \to 0$ pre $k \to \infty$ rovnomerne v M

  (ii) $\|f(\cdot + h) - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ pre $|h| \to 0$ rovnomerne v M

Kompaktnosť v priestore $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ sa dá tiež niekedy ukázať pomocou nasledujúceho kritéria (**Rellich**): Nech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ je merateľná, $F(x) \to \infty$ pre $|x| \to \infty$. Potom je množina $M = \{f \in X; \|f\| \leq 1, \|F \cdot f\| \leq 1, \|F \cdot \hat{f}\| \leq 1\}$ kompaktná v X ($\hat{f}$ je Fourierova transformácia f).

Nech sú X, Y B-priestory. Zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva **kompaktné**, ak zobrazuje ohraničené množiny v X na množiny, ktoré sú relatívne kompaktné v Y. Podpriestor priestoru $\mathcal{L}(X, Y)$ tvorený všetkými kompaktnými lineárnymi zobrazeniami budeme značiť $\mathcal{K}(X, Y)$. Dá sa ukázať, že ide o uzavretý podpriestor, takže je to opäť B-priestor.

Ak je $X \hookrightarrow Y$ a príslušné vnorenie je kompaktné, budeme písať $X \subset\hookrightarrow Y$.

$\boxed{52}$ Ukážte, že priestor $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, X)$ je ideál priestoru $\mathcal{L}(X)$, t.j. $AB, BA \in \mathcal{K}(X)$ pre každé $A \in \mathcal{K}(X)$ a $B \in \mathcal{L}(X)$.

$\boxed{53}$ Ak je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ **ohraničená** oblasť s lipschitzovskou hranicou (viď [KJF]), potom sa dá dokázať, že pre $k < n/p$ resp. $k = n/p$ resp. $k > n/p$ je priestor $W^{k,p}(\Omega)$ kompaktne vnorený do priestoru $L^q(\Omega)$ resp. $L^r(\Omega)$ resp. $\mathcal{BUC}^{0,\alpha}(\Omega)$, kde $1/q > 1/p - k/n$ resp. $r \in [1, \infty)$ resp. $\alpha < k - n/p$. Dokážte, že $W^{1,2}((0,1)) \subset\hookrightarrow \mathcal{BUC}((0,1))$.

Riešenie: Nech je $M \subset W^{1,2} = W^{1,2}((0,1))$ ohraničená vo $W^{1,2}$, t.j. $\|f\|_{1,2} \le C$ pre každé $f \in M$. Z vnorenia $W^{1,2} \hookrightarrow \mathcal{BUC}^{0,1/2}$ (viď príklad 34.) potom plynie, že M je ohraničená v $\mathcal{BUC}^{0,1/2}$ (takže tiež v $\mathcal{BUC}$) a teda

$$\sup_{f\in M} p_{1/2}(f) = \sup_{f\in M} \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{1/2}} \le \tilde{C},$$

odkiaľ plynie, že funkcie $f \in M$ sú rovnako spojité. Podľa charakterizácie relatívne kompaktných množín v $\mathcal{BUC}$ je množina M relatívne kompaktná v $\mathcal{BUC}((0,1))$.

$\boxed{54}$ Ukážte, že pre otvorenú ohraničenú množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je $\mathcal{BUC}^1(\Omega) \subset\hookrightarrow \mathcal{BUC}(\Omega)$. Dá sa ukázať, že pre $0 < \nu < \lambda \le 1$ platí $\mathcal{BUC}^{k,\lambda}(\Omega) \subset\hookrightarrow \mathcal{BUC}^{k,\nu}(\Omega)$ a v prípade B-priestorov $E \subset\hookrightarrow F$ tiež $\mathcal{BUC}^{0,\lambda}(\Omega, E) \subset\hookrightarrow \mathcal{BUC}^{0,\nu}(\Omega, F)$ (kde Ω môže byť ľubovoľný kompaktný metrický priestor).

$\boxed{55}$ Ak je Ω priestor s konečnou mierou a $1 \le p < q \le \infty$, potom z Hölderovej nerovnosti plynie vnorenie $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Ukážte, že vnorenie $L^q((0,1)) \hookrightarrow L^p((0,1))$, $1 \le p < q \le \infty$, nie je kompaktné. (Návod: Položte $f_n = \chi_{A_n}$, kde $A_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n}\right)$. Potom je $\{f_n\}_n$ ohraničená množina v L^q, ale neplatí $\|f_n(\cdot + h) - f\|_{L^p} \to 0$ pre $h \to 0$ rovnomerne v n.)

$\boxed{56}$ Ukážte, že zobrazenie $A : \mathcal{BUC}((0,1)) \to \mathcal{BUC}((0,1))$ definované predpisom $(Af)(x) = \int_0^x f(s)\,ds$ je kompaktné. (Návod: $A = I \circ B$, kde $B : \mathcal{BUC} \to \mathcal{BUC}^1 : f \mapsto Af$ je spojité a $I : \mathcal{BUC}^1 \to \mathcal{BUC} : f \mapsto f$ je kompaktné.) Podobne sa dá napr. ukázať, že ak pre $f \in L^2(\Omega)$ (kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená oblasť s "rozumnou" hranicou) označíme

$Af \in L^2(\Omega)$ (slabé) riešenie okrajového problému $\triangle u = f$ v Ω, $u = 0$ na hranici $\partial\Omega$, potom je A kompaktné zobrazenie ($A = I \circ B$, kde $B : L^2 \to W^{2,2}$, $I : W^{2,2} \subset\subset\hookrightarrow L^2$).

$\boxed{57}$ Ak má obor hodnôt $\mathcal{R}(A) = \{y\,;\,(\exists x)\ Ax = y\}$ zobrazenia $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ konečnú dimenziu, potom je $A \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dokážte.

$\boxed{58}$ Zobrazenie $A : \ell^2 \to \ell^2 : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$ je kompaktné.

(Návod: Zobrazenie $A_n : \ell^2 \to \ell^2 : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, \ldots)$ je spojité a konečnorozmerné, teda kompaktné. Ukážte $A_n \to A$ v $\mathcal{L}(X)$ a využite uzavretosť $\mathcal{K}(X)$.)

Zobrazenie $A \in \mathcal{K}(\ell^2)$ sa teda dá aproximovať konečnorozmernými spojitými zobrazeniami. Takúto vlastnosť má každé kompaktné zobrazenie $A : X \to Y$, pokiaľ je Y separabilný H-priestor (stačí, ak má Y tzv. Schauderovu bázu, čo platí napr. pre priestory $W^{k,p}$ a L^p, $1 < p < \infty$). Pre obecný (separabilný) B-priestor Y toto tvrdenie neplatí.

$\boxed{59}$ Nech sú $\Omega_X \subset \mathbb{R}^n$ a $\Omega_Y \subset \mathbb{R}^m$ ohraničené otvorené množiny, nech $X = L^p(\Omega_X)$, $Y = L^q(\Omega_Y)$ a $K \in L^r(\Omega_Y \times \Omega_X)$, kde $r = \max(p', q)$ a p' je exponent duálny k p (t.j. $1/p + 1/p' = 1$). Potom je zobrazenie $A_K : X \to Y$ definované predpisom $(A_K f)(y) = \int_{\Omega_X} K(y,x) f(x)\,dx$ kompaktné.

Ukážte jednoduchšie tvrdenie: ak $\Omega_X = \Omega_Y = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{BUC}((0,1)^2)$, $X = Y = \mathcal{BUC}((0,1))$, potom je $A_K : X \to X$ kompaktné. (Návod: Využite charakterizáciu kompaktných množín v priestoroch $\mathcal{BUC}$ a rovnomernú spojitosť jadra K.) Ďalej ukážte, že ak $K(y,x) = 1/y$, t.j. $(A_K f)(y) = \frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,dx$, potom $A \in \mathcal{L}(X)\backslash\mathcal{K}(X)$.

Dokážte tiež, že ak $X = L^2((0,\infty))$ a $A : X \to X$ je dané predpisom $(Af)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds$, potom $A \in \mathcal{L}(X)\backslash\mathcal{K}(X)$. (Návod pre dôkaz nekompaktnosti: Zvoľte $f_n(x) = 2^{-n}$ pre $x \in (2^{2n}, 2^{2n+1})$, $f_n(x) = -2^{-n-1}$ pre $x \in (2^{2n+1}, 2^{2n+2})$, $f_n(x) = 0$ ináč. Ukážte, že $\{f_n\}_n \subset L^2$ je ohraničená, ale $\{Af_n\}_n$ nemá konečnú ε-sieť.)

Ak sú X resp. Y H-priestory s ortonormálnymi bázami $\{e_\alpha\}$ resp. $\{f_\beta\}$ a $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ splňuje podmienku $|||\,A\,|||^2 = \sum_{\alpha,\beta} |\langle Ae_\alpha, f_\beta\rangle|^2 < \infty$, potom sa A nazýva Hilbert-Schmidtovo zobrazenie (číslo $|||\,A\,|||$ nezáleží na konkrétnej voľbe ortonormálnych báz). Každé Hilbert-Schmidtovo zobrazenie je kompaktné, pretože sa dá aproximovať v $\mathcal{L}(X,Y)$ konečnorozmernými zobrazeniami tvaru $A_K = \sum_{\alpha\in K} \langle\cdot, e_\alpha\rangle\, Ae_\alpha$, kde K je konečná indexová množina (dokážte !). Typickým príkladom Hilbert-Schmidtovho zobrazenia je integrálny operátor $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definovaný predpisom $(Af)(x) =$

$\int_\Omega K(x,y)f(y)\,dy$, kde $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ (Ω môže byť abstraktný priestor s mierou). Hodnota $|||\,A\,|||$ sa pritom rovná norme jadra K v $L^2(\Omega\times\Omega)$.

$\boxed{60}$ Nech $A : \ell^2 \to \ell^2 : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3}{\sqrt{3}}, \ldots)$. Ukážte, že A je kompaktné, ale nie je Hilbert-Schmidtovo zobrazenie.

5. UZAVRETÉ ZOBRAZENIA

Nech sú X, Y dva B-priestory a A je lineárne zobrazenie z priestoru X do priestoru Y s definičným oborom $\mathcal{D}(A)$. Symbolom $\mathcal{N}(A)$ budeme značiť množinu $\{x \in X\,;\, Ax{=}0\}$, symbolom $\mathcal{R}(A)$ budeme značiť obor hodnôt zobrazenia A, t.j. množinu $\{y \in Y\,;\, (\exists x \in X)\, Ax{=}y\}$.

Ak je A spojité zobrazenie $\mathcal{D}(A) \to Y$ a $\mathcal{D}(A)$ je hustý podpriestor X, potom sa dá A jednoznačne rozšíriť na zobrazenie $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$ (dokážte; využite hustotu $\mathcal{D}(A)$ a rovnomernú spojitosť A).

$\boxed{61}$ Nech $X = Y = L^2(\mathbb{R}^n)$ a $(Af)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i(x,\xi)}\, dx$ pre $f \in \mathcal{D}(A) = L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ (Fourierova transformácia). Ukážte, že uvedeným predpisom sa A nedá korektne definovať pre ľubovoľné $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ďalej ukážte, že A je spojité a $\mathcal{D}(A)$ je hustý v X, takže sa A dá rozšíriť na spojité zobrazenie celého priestoru $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ak chceme vyšetrovať diferenciálny operátor ako zobrazenie v jednom B-priestore (napr. z dôvodu jeho spektrálnej analýzy), potom obyčajne nevystačíme s pojmom spojitého lineárneho zobrazenia, pretože takýto operátor je typický príklad neohraničeného (=nespojitého) zobrazenia. Tieto operátory však často majú celý rad dôležitých vlastností, ktoré obecné lineárne zobrazenia nemajú. Preto sa zavádza pojem uzavretého zobrazenia; tieto zobrazenia predstavujú dostatočne širokú triedu pre vyšetrovanie mnohých diferenciálnych (a iných) operátorov a pritom majú veľa zo spomínaných dôležitých vlastností.

Zobrazenie A sa nazýva **uzavreté**, ak je jeho graf, t.j. množina $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax)\,;\, x \in \mathcal{D}(A)\}$, uzavretá podmnožina kartézskeho súčinu $X \times Y$. Ak zobrazenie A nie je uzavreté, ale má uzavreté rozšírenie (t.j. existuje uzavreté zobrazenie $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \to Y$ tak, že $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\tilde{A})$ a $\tilde{A}x = Ax$ pre každé $x \in \mathcal{D}(A)$), potom definujeme jeho **uzáver** $\overline{A}$ ako jeho najmenšie uzavreté rozšírenie, t.j. graf $\mathcal{G}(\overline{A})$ zobrazenia $\overline{A}$ je uzáver grafu $\mathcal{G}(A)$. Ak je A uzavreté zobrazenie s definičným oborom $\mathcal{D}(A)$ a D je lineárny podpriestor $\mathcal{D}(A)$ s vlastnosťou $A = \overline{A/_D}$ (t.j. A je uzáverom svojej reštrikcie na priestor D), potom povieme, že D je **jadro** (anglicky *core*) zobrazenia A. Jadro zrejme nemusí byť jednoznačne určené.

Každé zobrazenie $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ je uzavreté. Naopak platí nasledujúca veta o uzavretom grafe: *ak je $A : X \to Y$ uzavreté a $\mathcal{D}(A) = X$, potom $A \in \mathcal{L}(X, Y)$* (stále pritom predpokladáme, že X a Y sú B-priestory). Dôsledkom tohto tvrdenia je tiež veta o otvorenom zobrazení: *Ak je $A : X \to Y$ uzavreté, prosté a $\mathcal{R}(A) = Y$, potom $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Ak je $A : X \to Y$ uzavreté, potom jeho graf $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax) ; x \in \mathcal{D}(A)\}$ s normou $\|(x, Ax)\| = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ je B-priestor. Lineárne zobrazenie $B : X \to Y$ s definičným oborom $\mathcal{D}(B)$ obsahujúcim $\mathcal{D}(A)$ sa nazýva A-**ohraničené** (resp. A-**kompaktné**), ak je zobrazenie $B_A : \mathcal{G}(A) \to Y : (x, Ax) \mapsto Bx$ spojité (resp. kompaktné). Budeme písať $B \prec A$, ak je B A-ohraničené. V tomto prípade zrejme existujú kladné konštanty a, b tak, že $\|Bx\|_Y \le a\|Ax\|_Y + b\|x\|_X$ pre každé $x \in \mathcal{D}(A)$. Ak v tejto nerovnosti môžeme zvoliť $a < 1$ (resp. $a \le 1$), budeme písať $B \prec_1 A$ (resp. $B \preceq_1 A$); ak môžeme zvoliť a ľubovoľne malé (kladné), budeme písať $B \prec_\varepsilon A$.

$\boxed{62}$ Nech $X = Y = \mathcal{C}([0,1]), \mathcal{D}(A) = \{f \in X ; \text{existuje } f'(0)\}, Af = f'(0)$. Ukážte, že $A : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{K}$ nie je uzavreté ani nemá uzavreté rozšírenie. (Návod: Uvažujte $f_n(t) = \max(0, t - \frac{1}{n})$ a ukážte $f_n \to f \in \mathcal{D}(A)$, $Af_n \to 0$, ale $Af \neq 0$.)

$\boxed{63}$ Nech $X = \mathcal{C}([0,1])$, $(Af)(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ pre $f \in \mathcal{D}(A) = \{f \in X ;$ existuje konečná $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{f(t)}{t}\}$. Ukážte, že $A : X \to X$ je uzavreté zobrazenie.

$\boxed{64}$ Nech $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}^1([0,1]) = \mathcal{BUC}^1((0,1)) \subset X$, $A : X \to X : f \mapsto f'$. Potom je A uzavreté zobrazenie. Dokážte.

$\boxed{65}$ Nech je $A : X \to Y$ uzavreté a $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ resp. $B \in \mathcal{K}(X, Y)$. Ukážte, že je

B potom nutne A-ohraničené resp. A-kompaktné.

$\boxed{66}$ Zobrazenie $Au = u''$ je uzavreté zobrazenie v $X = L^2((0,1))$ s hustým definičným oborom $\mathcal{D}(A) = W^{2,2}((0,1))$. Zobrazenie $Bu = u'$ v $L^2((0,1))$ s definičným oborom $\mathcal{D}(B) = W^{1,2}((0,1))$ je A-kompaktné, ale neplatí $B \in \mathcal{L}(X)$. Dokážte.

Ak zvolíme $\mathcal{D}(A) = \{u \in W^{2,2}((0,1))\,;\, u(0) = u'(0) = 0\}$ a pre $u \in \mathcal{D}(A)$ definujeme $(Bu)(t) = \dfrac{u(t)}{t^\beta}$, kde $\beta < 2$, potom je opäť A uzavreté zobrazenie a B je A-kompaktné. Dokážte.

$\boxed{67}$ Nech sú $A : X \to Y$, $B : Y \to Z$ uzavreté zobrazenia. Ukážte nasledujúce tvrdenia:

- Ak je B prosté, $B^{-1} \in \mathcal{L}(Z,Y)$, potom je $BA : X \to Z$ uzavreté.
- Ak je A spojité, $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, potom je BA spojité.

$\boxed{68}$ Nech je A uzavreté zobrazenie, $B \prec_1 A$. Ukážte, že potom je tiež zobrazenie $A+B$ (s definičným oborom $\mathcal{D}(A)$) uzavreté. Dá sa predpoklad $B \prec_1 A$ zoslabiť na $B \preceq_1 A$? (Návod pre riešenie otázky: Voľte A tak, aby $\mathcal{D}(A) \neq X$ a položte $B = -A$.)

$\boxed{69}$ Nech je $A : X \to Y$ prosté zobrazenie, $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. Nech $B \prec A$, pričom konštanty a, b môžeme zvoliť tak, aby $b\|A^{-1}\| + a < 1$. Ukážte, že potom je $A+B$ uzavreté, prosté a $(A+B)^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. Naviac $(A+B)^{-1} \in \mathcal{K}(Y,X)$, ak $A^{-1} \in \mathcal{K}(Y,X)$. (Návod: K dôkazu uzavretosti použite predošlé cvičenie. Ak označíme $R = -BA^{-1}$, potom z našich predpokladov plynie $R \in \mathcal{L}(Y)$, $\|R\| < 1$. Ďalej platí $A + B = (I - R)A$, takže $(A+B)^{-1} = A^{-1}(I-R)^{-1}$, kde $(I-R)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} R^k \in \mathcal{L}(Y)$.)

$\boxed{70}$ Nech $X = Y = L^p((0,1))$, $c \in [0,1]$, $Af = f'$ a $Bf = f(c)$ pre $f \in W^{1,p}((0,1))$. Ukážte, že $B \prec_\varepsilon A$ pre $p > 1$, $B \prec A$ pre $p = 1$.

$\boxed{71}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ a nech je A X-realizácia operátora $\triangle$, t.j. $Au = \triangle u$ pre $u \in \mathcal{D}(A) = \{u \in X\,;\, \triangle u \in X\}$. Dá sa ukázať, že $\mathcal{D}(A) = W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ a že A je uzavreté zobrazenie. Ukážte, že zobrazenie $I : X \to X : u \mapsto u$ nie je A-kompaktné. (Návod: Nech $0 \not\equiv \varphi \in \mathcal{D}(A)$ má nosič obsiahnutý v množine $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| < 1\}$. Položte $\varphi_n = \varphi(\cdot + ne_1)$, kde $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, a ukážte, že $\{\varphi_n\}$ je ohraničená v grafovej norme zobrazenia A, ale nie je relatívne kompaktná v X.)

$\boxed{72}$ Pre $f \in L^1((0,2\pi))$ a n celé položme $\hat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ (t.j. $\hat{f}(n)$ je Fourierov koeficient funkcie f). Definujme B-priestor c_o ako priestor tých postupností komplexných čísel $\{z_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, pre ktoré je konečná norma $\|z\| = \sup\limits_n |z_n|$ a pre ktoré naviac platí $\lim\limits_{|n|\to\infty} z_n = 0$. Ukážte, že zobrazenie $\mathcal{F} : L^1 \to c_o : f \mapsto \hat{f} = \{\hat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je prosté spojité a lineárne a k nemu inverzné zobrazenie $\mathcal{F}^{-1}$ nie je spojité. (Návod: Linearita a spojitosť $\mathcal{F}$ sú jednoduché. Pri dôkaze $\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \{0\}$ využite hustotu lineárneho obalu funkcií $\{e^{int}\}$ v $L^2((0,2\pi))$. Nespojitosť $\mathcal{F}^{-1}$: uvažujte $f_n(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ a ukážte, že $\|\widehat{f_n}\|_{c_o} = 1$, ale $\|f_n\|_{L^1} \to \infty$.) Ako dôsledok vety o otvorenom zobrazení dostávame, že zobrazenie $\mathcal{F}$ nie je surjektívne ($\mathcal{R}(\mathcal{F}) \neq c_o$), takže existuje $\{z_n\} \in c_o$ tak, že z_n nie sú Fourierove koeficienty žiadnej funkcie $f \in L^1((0,2\pi))$.

$\boxed{73}$ Nech sú X, Y B-priestory, $\dim X = \infty$, a nech je $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ prosté. Ukážte, že potom $\mathcal{R}(A) \neq Y$. (Návod: Ak $\mathcal{R}(A) = Y$, potom podľa vety o otvorenom zobrazení je $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, takže $I = A^{-1}A \in \mathcal{K}(X)$, čo nie je možné.)

6. KOMPLEXIFIKÁCIA

V nasledujúcich kapitolách je veľa výsledkov uvedených len pre komplexné B-priestory. Aby sa tieto výsledky dali použiť aj v prípade reálneho priestoru, uvedieme si v tomto odstavci spôsob, ako možno reálny priestor a príslušné lineárne zobrazenia „ komplexifikovať”.

Nech je X reálny B-priestor. Označme $X_{\mathbb{C}}$ priestor $X \times X$ so sčítaním a násobením skalárom $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ definovaným nasledovne:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \lambda(x,y) &= (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y) \end{aligned}$$

Prvok $z = (x,y) \in X_{\mathbb{C}}$ sa dá reprezentovať v tvare $x + iy$, takže priestor X môžeme považovať za $\mathbb{R}$-lineárny podpriestor komplexného priestoru $X_{\mathbb{C}}$. Ak v priestore $X_{\mathbb{C}}$ definujeme normu predpisom

$$\|z\|_{\mathbb{C}} = \sup_{0 \le \alpha \le 2\pi} \|\operatorname{Re}(e^{i\alpha} z)\| = \sup_{0 \le \alpha \le 2\pi} \|x \cos\alpha + y \sin\alpha\|,$$

potom je $X_{\mathbb{C}}$ B-priestor a vnorenie $X \hookrightarrow X_{\mathbb{C}}$ je (reálna) izometria. Podobne ak je X reálny H-priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$, môžeme v $X_{\mathbb{C}}$ definovať skalárny súčin $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ predpisom

$$\langle x + iy, u + iv \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle + i\big(\langle y, u \rangle - \langle x, v \rangle\big).$$

Ak sú X, Y dva reálne priestory a $A : X \to Y$ je lineárne zobrazenie, definujme zobrazenie $A_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}} : (x + iy) \mapsto Ax + iAy$. Potom je $A_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-lineárne zobrazenie a $A_{\mathbb{C}}(X) \subset Y$. Naopak, pre každé $\mathbb{C}$-lineárne zobrazenie $A : X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ existujú jediné $\mathbb{R}$-lineárne zobrazenia $A_1, A_2 : X \to Y$ tak, že $Ax = A_1x + iA_2x$ pre každé $x \in X$, pričom sa jednoducho overí $A = (A_1)_{\mathbb{C}} + i(A_2)_{\mathbb{C}}$, takže priestor všetkých $\mathbb{C}$-lineárnych zobrazení $X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ je vlastne komplexifikácia priestoru zobrazení tvaru $A_{\mathbb{C}}$, kde $A : X \to Y$ je $\mathbb{R}$-lineárne zobrazenie. Ďalej platí $A \in \mathcal{L}(X, Y) \iff A_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$ a pri stotožnení zobrazení A a $A_{\mathbb{C}}$ tiež $\mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}}) = \big(\mathcal{L}(X, Y)\big)_{\mathbb{C}}$, takže špeciálne $(X_{\mathbb{C}})' = (X')_{\mathbb{C}}$ a $(A_{\mathbb{C}})' = (A')_{\mathbb{C}}$.

$\boxed{74}$ Nech je $A : X \to Y$ $\mathbb{R}$-lineárne zobrazenie. Ukážte, že A je uzavreté (resp. kompaktné) práve vtedy, keď je zobrazenie $A_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ uzavreté (resp. kompaktné).