SAMOADJUNGOVANÉ ZOBRAZENIA

Samoadjungované (=samozdružené) zobrazenia v H-priestore tvoria významnú triedu operátorov. Tieto zobrazenia majú dôležité vlastnosti (existencia spektrálneho rozkladu a príslušného funkčného kalkulu, generovanie C^o-semigrúp unitárnych zobrazení) a pritom reprezentujú veľa operátorov v matematickej fyzike (napr. hamiltoniány v kvantovej mechanike). Dokázať samoadjungovanosť (najmä neohraničeného) zobrazenia však nie je vždy úplne jednoduché a to je jeden z dôvodov, prečo tomuto pojmu venujeme celú kapitolu.

1. ADJUNGOVANÉ ZOBRAZENIA V B-PRIESTOROCH

Nech sú X, Y B-priestory a $A : X \to Y$ lineárne zobrazenie s hustým definičným oborom $\mathcal{D}(A)$. Pre $g \in Y'$ definujme zobrazenie $f_g : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{K} : x \mapsto g(Ax)$ a označme $\mathcal{D}(A') = \{g \in Y' \,;\, f_g \text{ je spojité}\}$. Pre $g \in \mathcal{D}(A')$ možno zrejme príslušnú formu f_g jednoznačne rozšíriť na formu $\widetilde{f_g} \in X'$. **Adjungované zobrazenie** $A' : Y' \to X'$ k zobrazeniu A definujeme pre $g \in \mathcal{D}(A')$ predpisom $A'g = \widetilde{f_g}$, t.j. platí $(A'g)(x) = g(Ax)$ pre každé $x \in \mathcal{D}(A)$ a $g \in \mathcal{D}(A')$.

Zobrazenie A' je vždy uzavreté (dokážte !), ale nemusí mať hustý definičný obor (takže zobrazenie A'' nemusí byť vždy definované).

Pre $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ platí $A' \in \mathcal{L}(Y',X')$, $\|A'\| = \|A\|$, a tiež
$A \in \mathcal{K}(X,Y) \iff A' \in \mathcal{K}(Y',X')$.

$\boxed{1}$ Nech $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ je reprezentované maticou (a_{ij}). Ukážte, že $A' : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ je reprezentované maticou (a_{ji}).

$\boxed{2}$ Nech $A : \ell^1 \to \ell^1 : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)$. Ukážte, že zobrazenie A' sa dá reprezentovať ako zobrazenie $\ell^\infty \to \ell^\infty : (y_1, y_2, \ldots) \mapsto (0, y_1, y_2, \ldots)$.

$\boxed{3}$ Nech $X = \ell^p$, $1 \le p < \infty$, nech $A : X \to \mathbb{K}$, $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ pre $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathcal{D}(A) = \ell^1 \cap \ell^p$. Potom $\mathcal{D}(A') \ne \{0\}$ len pre $p = 1$. Dokážte. Je A uzavreté ?

$\boxed{4}$ Nech je A zobrazenie v ℓ^1 definované predpisom $Ax = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots)$ pre $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathcal{D}(A) = \{x \in \ell^1\,;\, Ax \in \ell^1\}$. Ukážte, že A je uzavreté zobrazenie s hustým definičným oborom, ale zobrazenie A' nemá hustý definičný obor.

$\boxed{5}$ Nech je $A : X \to Y$ uzavreté zobrazenie s hustým definičným oborom a nech je priestor Y reflexívny. Ukážte, že potom má $A' : Y' \to X'$ tiež hustý definičný obor.

Riešenie: Nech $\overline{\mathcal{D}(A')} \neq Y'$. Z Hahn–Banachovej vety a reflexivity Y plynie, že existuje $0 \neq y_o \in Y$ tak, že $y'(y_o) = 0$ pre každé $y' \in \mathcal{D}(A')$. Pretože graf $\mathcal{G}(A) \in X \times Y$ je uzavretý podpriestor neobsahujúci bod $[0, y_o]$, existuje podľa Hahn–Banachovej vety funkcionál $z'_1 = [x'_1, y'_1] \in X' \times Y' = (X \times Y)'$, ktorý oddeľuje tieto dve konvexné množiny, t.j. $x'_1(x) + y'_1(Ax) = 0$ pre každé $x \in \mathcal{D}(A)$, $x'_1(0) + y'_1(y_o) = y'_1(y_o) \neq 0$. Z rovnosti $y'_1(Ax) = -x'_1(x)$ plynie $y'_1 \in \mathcal{D}(A')$, čo je však v spore s voľbou y_o.

$\boxed{6}$ Nech $A, B : X \to Y$ a nech je $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ hustý v X. Dokážte, že potom platí $A' + B' \subset (A + B)'$. Ukážte tiež, že pre $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ platí $A' + B' = (A + B)'$, pričom pre všeobecné B rovnosť nastať nemusí. (Návod: Uvažujte $B = -A$, $\mathcal{D}(A') \neq Y'$.)

$\boxed{7}$ Nech $X = Y = L^p((0,1))$, $(Af)(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. Ukážte, že zobrazenie A' sa dá reprezentovať ako zobrazenie $L^{p'}((0,1)) \to L^{p'}((0,1)) : g \mapsto G$, kde $G(t) = \int_t^1 g(s)\,ds$ a $1/p + 1/p' = 1$.

$\boxed{8}$ Ak je M resp. N podpriestor priestoru X resp. X', označme $M^\circ = \{f \in X'\,;\, f(x){=}0\ \forall x \in M\}$ resp. $N^\circ = \{x \in X\,;\, f(x){=}0\ \forall f \in N\}$. Nech je $A : X \to Y$ lineárne zobrazenie s hustým definičným oborom. Ukážte, že platí $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{R}(A')^\circ$, $\mathcal{N}(A') = \mathcal{R}(A)^\circ$, $\mathcal{R}(A') \subset \mathcal{N}(A)^\circ$, $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{N}(A')^\circ$.

Ďalej platí tzv. Banachova veta: *Ak je $A : X \to Y$ uzavreté zobrazenie s hustým definičným oborom, potom sú nasledujúce výroky ekvivalentné:*

- *$\mathcal{R}(A)$ je uzavretý*
- *$\mathcal{R}(A')$ je uzavretý*
- *$\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A')^\circ$*
- *$\mathcal{R}(A') = \mathcal{N}(A)^\circ$*

Dôsledkom tejto vety je tiež nasledujúce tvrdenie: *Nech $A : X \to Y$ je uzavreté, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Potom $\mathcal{R}(A) = Y \iff (A')^{-1}$ je spojité.*

$\boxed{9}$ Nech je $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, X reflexívny. Ukážte, že $\mathcal{R}(A')$ je hustý v X' práve vtedy, keď je A prosté. (Návod: Pre dôkaz implikácie $\Rightarrow$ použite predošlé cvičenie; pri dôkaze obrátenej implikácie ukážte, že z predpokladu $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ a reflexivity X plynie tiež $\mathcal{N}(A'') = \{0\}$ a potom opäť použite predošlé cvičenie.)

Dokážte tiež, že predpoklad reflexivity je nutný. (Návod: Položte $X = \ell^1$, $Ax = (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$.)

2. ADJUNGOVANÉ ZOBRAZENIA V H-PRIESTORE

Nech je X H-priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $A : X \to X$ lineárne zobrazenie s hustým definičným oborom $\mathcal{D}(A)$. Pre $y \in X$ položme $f_y : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{K} : x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ a označme $\mathcal{D}(A^*) = \{y \in H\,;\, f_y \text{ je spojité}\}$. Pre $y \in \mathcal{D}(A^*)$ možno funkcionál f_y rozšíriť na $\widetilde{f_y} \in X'$ a ten sa dá pomocou Rieszovej vety o reprezentácii reprezentovať prvkom z_y, t.j. $\widetilde{f_y}(x) = \langle x, z_y\rangle$ pre každé $x \in X$. Adjungované zobrazenie $A^* : \mathcal{D}(A^*) \to X$ definujeme† predpisom $A^*y = z_y$, takže pre každé $x \in \mathcal{D}(A)$ a $y \in \mathcal{D}(A^*)$ platí $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.

Ak označíme $R : X \to X' : x \mapsto \langle\cdot, x\rangle$ (R je izomorfizmus priestorov X a X'), potom zrejme platí $A^* = R^{-1}A'R$, takže všetky tvrdenia platné pre adjungované zobrazenia v B-priestoroch sa vďaka tomuto vzťahu medzi A' a A^* dajú jednoducho preformulovať pre adjungované zobrazenia v H-priestore. Špeciálne, zobrazenie A^* je uzavreté.

Ďalej sa dá ukázať, že $\mathcal{D}(A^*)$ je hustý v X (t.j. existuje A^{**}) práve vtedy, keď má A uzavreté rozšírenie. Potom platí $\overline{A} = A^{**}$.

Zobrazenie A sa nazýva **symetrické**, ak $A \subset A^*$ (t.j. $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(A^*)$, kde $\mathcal{G}(A) \subset X \times X$ je graf zobrazenia A). Zobrazenie A sa nazýva **samoadjungované**, ak $A = A^*$.

Symetrické zobrazenie A sa nazýva **zdola ohraničené**, ak existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že pre každé $x \in \mathcal{D}(A)$ platí $\langle Ax, x\rangle \geq \alpha\|x\|^2$. Ak je A zdola ohraničené konštantou $\alpha = 0$ (resp. $\alpha > 0$), potom sa A nazýva **nezáporné** (resp. **kladné**).

$\boxed{10}$ Nech $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ je reprezentované maticou (a_{ij}). Potom je A^* reprezentované maticou $(\overline{a_{ji}})$.

$\boxed{11}$ Nech $X = L^2((0,1))$, $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds$. Potom $(A^*y)(t) = \int_t^1 \overline{y(s)}\,ds$. Dokážte.

---

† Adjungované zobrazenie A^* sa dá zrejme definovať aj pre zobrazenie $A : X \to Y$, kde X, Y sú dva (rôzne) H-priestory; my to však v ďalšom nebudeme potrebovať.

$\boxed{12}$ Nech $A_n : \ell^2 \to \ell^2 : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$. Ukážte, že $A_n x \to 0$ pre každé x, ale $A_n^* x \not\to 0$ pre žiadne $x \neq 0$.

$\boxed{13}$ Nech je $A \in \mathcal{L}(X)$ samoadjungované. Ukážte, že platí $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| \,;\, \|x\| \le 1\}$.

Riešenie: Označme $\alpha = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| \,;\, \|x\| \le 1\}$. Zrejme platí $\alpha \le \|A\|$. Ďalej platí

$$4\operatorname{Re}\langle Ax, y\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \le \alpha(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)\ ,$$

$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| \,;\, \|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1\}$. Zvoľme ľubovoľné x, y, $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Potom pre vhodné $\beta \in \mathbf{C}$, $|\beta| = 1$, platí $\langle Ax, y\rangle = \beta|\langle Ax, y\rangle|$, takže

$$\begin{aligned}|\langle Ax, y\rangle| =& \langle Ax, \beta y\rangle \le \frac{\alpha}{4}\big(\|x+\beta y\|^2 + \|x-\beta y\|^2\big)\\ =& \frac{\alpha}{2}\big(\|x\|^2 + \|\beta y\|^2\big) = \frac{\alpha}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \le \alpha\ ,\end{aligned}$$

odkiaľ plynie $\|A\| \le \alpha$.

$\boxed{14}$ Nech $A \in \mathcal{L}(X)$. Ukážte, že $A = A_1 + iA_2$, kde $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X)$ sú samoadjungované. (Návod: $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $A_2 = \frac{i}{2}(A^* - A)$.)

$\boxed{15}$ Nech $X = L^2(M)$, $(Af)(x) = \int_M K(x,y) f(y)\, dy$, kde jadro $K \in L^2(M \times M)$ je symetrické (t.j. $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$). Potom je $A \in \mathcal{K}(X)$ samoadjungované. Dokážte.

$\boxed{16}$ Nech $X = L^2((0,1))$, $Af = if'$ pre $f \in \mathcal{D}(A) = W_o^{1,2}((0,1)) = \{f \in W^{1,2}((0,1)) \,;\, f(0){=}f(1){=}0\}$. Dokážte, že A je uzavreté symetrické zobrazenie, $\mathcal{D}(A^*) = W^{1,2}((0,1))$.

Riešenie: Nech $f \in \mathcal{D}(A)$, $g \in W^{1,2}((0,1))$. Potom platí $\langle Af, g\rangle = \int_0^1 if'\overline{g}\, dx = \int_0^1 f\overline{ig'}\, dx$, takže $|\langle Af, g\rangle| \le \|f\|_{L^2}\|g\|_{W^{1,2}}$, teda $g \in \mathcal{D}(A^*)$, $A^*g = ig'$. Odtiaľ plynie, že A je symetrické a $W^{1,2}((0,1)) \subset \mathcal{D}(A^*)$. Zvoľme teraz ľubovoľné $g \in \mathcal{D}(A^*)$ a označme $G(t) = \int_0^t (A^*g)(s)\, ds$. Pre každé $f \in \mathcal{D}(A)$ potom dostávame

$$\int_0^1 if'\overline{g}\, dx = \langle Af, g\rangle = \langle f, A^*g\rangle = \int_0^1 f\overline{A^*g}\, dx = -\int_0^1 f'\overline{G}\, dx,$$

t.j. $\int_0^1 f'\overline{h}\, dx = 0$, kde $h = G - ig$. Ak položíme špeciálne $f_h(t) = \int_0^t h(x)\, dx - t\int_0^1 h(x)\, dx$, potom $f_h \in \mathcal{D}(A)$ a $f_h' = h - c$, kde $c = \int_0^1 h(x)\, dx$, takže

$$\|h - c\|^2 = \int_0^1 f_h'\overline{(h-c)}\, dx = \int_0^1 f_h'\overline{h}\, dx = 0,$$

t.j. $G - ig = h = c$, $g(t) = -i\big(\int_0^t (A^*g)(x)\,dx - c\big)$, odkiaľ plynie $g \in W^{1,2}((0,1))$. Rovnakým postupom môžeme ukázať $A^{**} = A$, t.j. A je uzavreté (tento fakt sa však dá dokázať aj priamo).

$\boxed{17}$ Nech sú A, B zobrazenia s hustým definičným oborom. Ukážte, že platí:

- Ak $A \subset B$, potom $B^* \subset A^*$.
- Ak je definičný obor zobrazenia AB hustý, potom $B^*A^* \subset (AB)^*$.
- Ak je A prosté a jeho obor hodnôt $\mathcal{R}(A)$ je hustý, potom $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.
- Ak existuje uzáver $\overline{A}$ zobrazenia A, potom $A^* = \big(\overline{A}\big)^*$.

$\boxed{18}$ Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- Ak je A symetrické a $\mathcal{D}(A) = X$, potom je A samoadjungované a spojité. (Návod: Samoadjungovanosť je zrejmá z definície, spojitosť plynie z vety o uzavretom grafe.)
- Ak je A symetrické a $\mathcal{R}(A) = X$, potom je A samoadjungované. (Návod: Ak $x \in \mathcal{D}(A^*)$, potom existuje $u \in \mathcal{D}(A)$ tak, že $A^*x = Au$, lebo $A^*x \in X = \mathcal{R}(A)$. Pre každé $v \in \mathcal{D}(A)$ potom platí $\langle Av, x\rangle = \langle v, A^*x\rangle = \langle v, Au\rangle = \langle Av, u\rangle$, takže $x = u \in \mathcal{D}(A)$.)
- Ak je A samoadjungované a prosté, potom je inverzné zobrazenie A^{-1} samoadjungované. (Návod: Nech $x \perp \mathcal{R}(A)$. Ukážte, že potom nutne $x \in \mathcal{D}(A^*)$, $A^*x = Ax = 0$, takže $x = 0$, teda $\mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(A^{-1})$ je hustý a $(A^{-1})^*$ je definované. Podľa cvičenia 17 je potom $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$.)

$\boxed{19}$ Pomocou dôsledku Banachovej vety (viď cvičenie 8) dokážte nasledujúce tvrdenie: Ak je A uzavreté a kladné, potom je $\mathcal{R}(A^*) = X$. (Návod: Z uzavretosti A plynie $A = A^{**}$. Pretože $\|Ax\| \cdot \|x\| \ge \langle Ax, x\rangle \ge \alpha\|x\|^2$, je zobrazenie A^{-1} spojité. Použite spomínaný dôsledok na zobrazenie A^*.) Miesto kladnosti A zrejme stačilo predpokladať $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \ge \alpha\|x\|^2$.

$\boxed{20}$ Zo spektrálneho rozkladu samoadjungovaných zobrazení (viď nasledujúca kapitola) plynie toto tvrdenie: *Ak je A nezáporné samoadjungované zobrazenie, potom existuje jediné nezáporné samoadjungované zobrazenie $A^{1/2}$, pre ktoré $(A^{1/2})^2 = A$.* Ak naviac platí $A \in \mathcal{L}(X)$, potom tiež $A^{1/2} \in \mathcal{L}(X)$. Obecne zrejme platí $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$; ukážte, že rovnosť $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^{1/2})$ nastáva len pre $A \in \mathcal{L}(X)$. (Návod: Najprv ukážte, že z rovnosti uvedených definičných oborov plynie $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ a potom využite predošlý príklad.) Dá sa ukázať (J. von Neumann), že *pre ľubovoľné uzavreté zobrazenie A s hustým definičným oborom je zobrazenie A^*A samoadjungované a nezáporné a jeho definičný obor je jadro zobrazenia A.* Môžeme preto definovať zobrazenie $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Pritom platí $\mathcal{D}(|A|) = \mathcal{D}(A)$ a v prípade nezáporného samoadjungovaného zobrazenia A zrejme $|A| = A$.

$\boxed{21}$ Zobrazenie $U \in \mathcal{L}(X)$ sa nazýva čiastočná izometria, ak je jeho reštrikcia na podpriestor $\mathcal{N}(U)^\perp$ izometria (t.j. $\|Ux\| = \|x\|$ pre každé $x \in \mathcal{N}(U)^\perp$). *Ak je A uzavreté, potom existuje jediná čiastočná izometria $U \in \mathcal{L}(X)$ tak, že $A = U|A|$ a súčasne*

$\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(A)$. Rozklad $A = U|A|$ sa nazýva polárny rozklad zobrazenia A. Nájdite polárny rozklad zobrazenia $A : \ell^2 \to \ell^2 : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$.

$\boxed{22}$ Nájdite polárny rozklad zobrazenia $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ reprezentovaného maticou $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. (Riešenie: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.)

$\boxed{23}$ Prvok $\varphi \in X$ sa nazýva **analytický vektor** zobrazenia A, ak $\varphi \in \mathcal{D}(A^n)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ a naviac $\sum_n \frac{\|A^n\varphi\| s^n}{n!} < \infty$ pre nejaké $s > 0$. Dá sa ukázať, že *uzavreté symetrické zobrazenie A je samoadjungované práve vtedy, keď má hustú množinu analytických vektorov.* Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- Zobrazenie A z príkladu 16 nemá nenulový analytický vektor. (Návod: Nech je φ analytický vektor A, potom $\varphi \in \mathcal{C}^\infty((0,1))$ a $\varphi^{(n)}(0) = 0$ pre každé n. Ďalej $c_n := \|A^n\varphi\|^2 \le \frac{(n!)^2}{s^{2n}}$ od istého n,

$$|\varphi^{(n-1)}(t)|^2 = \Big|\int_0^t \varphi^{(n)}(\tau)\,d\tau\Big|^2 \le t\int_0^t |\varphi^{(n)}(\tau)|^2\,d\tau \le tc_n\ ,$$

$$|\varphi^{(n-2)}(t)|^2 = \Big|\int_0^t \varphi^{(n-1)}(\tau)\,d\tau\Big|^2 \le c_n\Big(\int_0^t \tau^{1/2}\,d\tau\Big)^2 = \Big(\frac{2}{3}\Big)^2 t^3 c_n\ ,$$

  indukciou $|\varphi(t)|^2 \le \frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!!^2} t^{2n-1} c_n < \frac{n^2}{s}\left(\frac{t}{s}\right)^{2n-1} \to 0$ pre $n \to \infty$ a $t < s$, takže $\varphi(t) = 0$ pre $t < s$. Opakovaním tohto postupu dostávame $\varphi \equiv 0$.)
- Nech $X = \ell^2$ s ortonormálnou bázou $\{e_n\}$, $Ae_n = ne_n$, $\mathcal{D}(A) = \{x\,;\,\sum |n\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty\}$. Potom je A samoadjungované a platí $A = \overline{A/_D}$, kde D je priestor konečných lineárnych kombinácií vektorov $f_{k,m} = e_k + \frac{1}{2^{k+m}}\sum_{n=k+m}^{\infty} \frac{e_n}{n^{2+\alpha(k,m)}}$, kde $\alpha(k,m) \in (0, 1/2)$ volíme tak, aby $\alpha(k_1, m_1) \ne \alpha(k_2, m_2)$ pre $(k_1, m_1) \ne (k_2, m_2)$, $k, m \in \mathbb{N}$. Ďalej platí $D \cap \mathcal{D}(A^2) = \emptyset$, takže v D neexistuje analytický vektor A.

$\boxed{24}$ Nech je A samoadjungovaný operátor násobenia funkciou $\varphi(x) = x$ v $L^2(\mathbb{R})$, t.j. $Af = \varphi f$ pre $f \in \mathcal{D}(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R})\,;\,\varphi f \in L^2(\mathbb{R})\}$. Ukážte, že existujú jadrá D_1, D_2 zobrazenia A tak, že $D_1 \cap D_2 = \{0\}$.

$\boxed{25}$ Nech je A uzavreté zobrazenie s hustým definičným oborom a nech $A^*A \subset AA^*$. Ukážte, že potom je A **normálne**, t.j. A je uzavreté zobrazenie s hustým definičným oborom a $A^*A = AA^*$.

Riešenie: Zobrazenie A^*A je samoadjungované (viď cvičenie 20), takže s využitím cvičenia 17 dostávame $AA^* = A^{**}A^* \subset (AA^*)^* \subset (A^*A)^* = A^*A$.

$\boxed{26}$ Nech je A normálne a prosté a nech je $\mathcal{R}(A)$ hustý. Ukážte, že potom je zobrazenie A^{-1} normálne.

Riešenie: $(A^{-1})^* A^{-1} = (A^*)^{-1} A^{-1} = (AA^*)^{-1} = (A^*A)^{-1} = A^{-1}(A^*)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^*$.

$\boxed{27}$ Uzavreté zobrazenie A s hustým definičným oborom je normálne práve vtedy, keď $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ a súčasne $\|Ax\| = \|A^*x\|$ pre každé $x \in \mathcal{D}(A)$. Ukážte implikáciu $\Longleftarrow$.

Riešenie: Pre $x, y \in \mathcal{D}(A)$ platí

$$\begin{aligned} 4\langle Ax, Ay\rangle =& \langle A(x+y), A(x+y)\rangle - \langle A(x-y), A(x-y)\rangle \\ &+ i\langle A(x+iy), A(x+iy)\rangle - i\langle A(x-iy), A(x-iy)\rangle \\ =& \|A(x+y)\|^2 - \ldots = \|A^*(x+y)\|^2 - \ldots = 4\langle A^*x, A^*y\rangle, \end{aligned}$$

takže pre $x \in \mathcal{D}(A^*A) = \mathcal{D}(AA^*)$ a $y \in \mathcal{D}(A)$ dostávame $\langle A^*Ax, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*x, A^*y\rangle = \langle AA^*x, y\rangle$, odkiaľ plynie $A^*A = AA^*$.

$\boxed{28}$ Nech $A \in \mathcal{L}(X)$. Ukážte, že A je **unitárne** (t.j. $AA^* = A^*A = I$) práve vtedy, keď je A izometria (t.j. $\|Ax\| = \|x\|$ pre každé $x \in X$).

$\boxed{29}$ Nech je A normálne zobrazenie. Ukážte, že potom existuje unitárne zobrazenie U tak, že platí $A = U|A| = |A|U$. (Návod: V polárnom rozklade A predefinujte čiastočnú izometriu pre $x \in \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(|A|) = \mathcal{R}(|A|)^\perp = \mathcal{R}(A)^\perp$; pre takéto x položte $Ux = x$.)

3. ROZŠÍRENIA SYMETRICKÝCH ZOBRAZENÍ

Nech je A symetrické zobrazenie v komplexnom H-priestore X. Zobrazenie $\lambda I - A$ (kde $\lambda \in \mathbb{C}$) budeme skrátene zapisovať ako $\lambda - A$. Dá sa ukázať, že dimenzia priestoru $\mathcal{N}(\lambda - A^*) = \mathcal{R}(\overline{\lambda} - A)^\perp$ je konštantná pre $\operatorname{Im}\lambda > 0$ (resp. $\operatorname{Im}\lambda < 0$); táto dimenzia sa nazýva **index defektu** zobrazenia A a označuje sa n_+ (resp. n_-). Označme $K_\pm = \mathcal{N}(\pm i - A^*)$ (tzv. defektné priestory zobrazenia A) a nech $M_\pm$ sú uzavreté podpriestory priestorov $K_\pm$ a $U : M_+ \to M_-$ je izometria. Definujme zobrazenie A_U s definičným oborom $\mathcal{D}(A_U) = \{\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+\,;\, \varphi \in \mathcal{D}(A), \varphi_+ \in M_+\}$ predpisom $A_U(\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+) = A\varphi + i\varphi_+ - iU\varphi_+$. Potom platí nasledujúce tvrdenie (**J. von Neumann**): *Ak je A uzavreté symetrické zobrazenie, potom je A_U uzavreté symetrické rozšírenie zobrazenia A. Všetky uzavreté symetrické rozšírenia A pritom možno dostať týmto spôsobom.* Ako dôsledok dostávame, že samoadjungované rozšírenie symetrického zobrazenia A existuje práve vtedy, keď sú priestory K_+ a K_- izometrické; v prípade separabilného H-priestoru X je tento požiadavok zrejme ekvivalentný podmienke $n_+ = n_-$.

$\boxed{30}$ Nech je A symetrické zobrazenie v priestore komplexných funkcií a nech pre každé $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ platí $\overline{\varphi} \in \mathcal{D}(A)$, $A\overline{\varphi} = \overline{A\varphi}$ (= funkcia komplexne združená k $A\varphi$). Ukážte, že potom existuje samoadjungované rozšírenie zobrazenia A.

Riešenie: Ak $\varphi_+ \in K_+ = \mathcal{R}(-i-A)^\perp$, $\psi \in \mathcal{D}(A)$, potom $\langle \overline{\varphi_+}, (i-A)\overline{\psi} \rangle = \overline{\langle \varphi_+, (-i-A)\psi \rangle} = 0$, takže $\overline{\varphi_+} \in \mathcal{R}(i-A)^\perp = K_-$. Analogicky platí $\overline{\varphi_-} \in K_+$ pre $\varphi_- \in K_-$, takže $U : K_+ \to K_- : \varphi \mapsto \overline{\varphi}$ je izometria K_+ na K_-.

$\boxed{31}$ Nech $X = L^2((0,1))$, $Af = A_a f = if'$, $\mathcal{D}(A) = \{f \in W^{1,2}((0,1))\,;\, f(0)=f(1)=0\}$, $\mathcal{D}(A_a) = \{f \in W^{1,2}((0,1))\,;\, af(0)=f(1)\}$, kde $|a| = 1$. Potom je A uzavreté, symetrické zobrazenie, pre jeho adjungované zobrazenie platí $\mathcal{D}(A^*) = W^{1,2}((0,1))$ (viď príklad 16). Ukážte, že zobrazenia A_a sú (jedinými) samoadjungovanými rozšíreniami zobrazenia A. (Návod: Defektné priestory A sú $K_\pm = \{c\exp(\pm x)\,;\, c \in \mathbb{C}\}$, $n_+ = n_- = 1$, izometrie $U : K_+ \to K_-$ sú dané predpisom $U(e^x) = be^{-x}$, kde $|b| = e$.)

$\boxed{32}$ Nech $X = L^2((0,\infty))$, $Af = if'$, $\mathcal{D}(A) = \{f \in W^{1,2}((0,\infty))\,;\, f(0)=0\}$. Ukážte, že A je symetrické, ale nemá samoadjungované rozšírenie. (Návod: $n_+ \neq n_-$)

$\boxed{33}$ Nech $X = L^2((0,1))$, $Af = A_1 f = -f''$, $\mathcal{D}(A) = \{f \in W^{2,2}((0,1))\,;\, f(0)=f'(0)=f(1)=f'(1)=0\}$, $\mathcal{D}(A_1) = \{f \in W^{2,2}((0,1))\,;\, f(0)=f(1),\ f'(0)=f'(1)\}$ alebo $\mathcal{D}(A_1) =\{f \in W^{2,2}((0,1))\,;\, a_1 f(0) + a_2 f'(0) = b_1 f(1) + b_2 f'(1) = 0\}$, kde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $|a_1| + |a_2| \neq 0 \neq |b_1| + |b_2|$. Ukážte, že A je uzavreté symetrické zobrazenie s adjungovaným zobrazením $A^* f = -f''$, $\mathcal{D}(A^*) = W^{2,2}((0,1))$, $n_+ = n_- = 2$ a zobrazenie A_1 je samoadjungované rozšírenie A.

$\boxed{34}$ Nech $X = L^2((0,\infty))$, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}((0,\infty))$ (= priestor hladkých funkcií s kompaktným nosičom v $(0,\infty)$), $Af = -f''$. Potom je A symetrické, $K_\pm = \{c\exp(\frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}x)\,;\, c \in \mathbb{C}\}$, $n_+ = n_- = 1$. Pre samoadjungované rozšírenie platí opäť $A_1 f = -f''$, pričom $\mathcal{D}(A_1) = \{f \in W^{2,2}((0,\infty))\,;\, f'(0) + af(0) = 0\}$ pre vhodné $a \in \mathbb{R}$ alebo $\mathcal{D}(A_1) = \{f \in W^{2,2}((0,\infty))\,;\, f(0)=0\}$. Dokážte. Ukážte tiež, že $\mathcal{D}(\overline{A}) = \{\varphi \in W^{2,2}((0,\infty))\,;\, \varphi(0)=\varphi'(0)=0\}$.

$\boxed{35}$ Nech $X = L^2((0,\infty))$, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}((0,\infty))$, $Af = -f'' + Vf$, kde $V : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Ukážte, že A je symetrické zobrazenie a $n_+ = n_-$ (využite príklad 30). Dá sa ukázať (viď [RS, §X.1]), že podmienka $n_+ = n_- = 0$ (t.j. $\overline{A}$ je samoadjungované) je splnená napr. pre V majúce nasledujúce dve vlastnosti

(i) $V(x) \geq 3x^2/4$ pre $x \leq \varepsilon$

(ii) existuje kladná C^1-funkcia $M : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ taká, že $\int_1^\infty M(x)^{-1/2}\,dx = \infty$,

$V \geq -M$, a funkcia $M'(x) \cdot M(x)^{-3/2}$ je ohraničená pre $x \to \infty$.

$\boxed{36}$ Nech sú A, N symetrické zobrazenia s definičným oborom D, nech je $\overline{N}$ samoadjungované, $\langle N\varphi, \varphi\rangle \geq \|\varphi\|^2$, $\|A\varphi\| \leq c\|N\varphi\|$ a $|\langle A\varphi, N\varphi\rangle - \langle N\varphi, A\varphi\rangle| \leq d\|\overline{N}^{1/2}\varphi\|^2$ pre vhodné $c, d > 0$ a každé $\varphi \in D$. Ukážte, že pre indexy defektu zobrazenia A platí $n_\pm = 0$, t.j. zobrazenie $\overline{A}$ je samoadjungované.

Toto tvrdenie umožňuje napr. dokázať samoadjungovanosť uzáveru zobrazenia $H\varphi = -\triangle\varphi + V \cdot \varphi$ definovaného pre $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ za predpokladu, že potenciál $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sa dá napísať v tvare $V_1 + V_2$, kde $V_1(x) \geq -ax^2 - b$, $V_1 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (t.j. $V_1/_{\mathrm{K}} \in L^2(K)$ pre každú kompaktnú množinu $K \subset \mathbb{R}^n$) a $V_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, kde $p \geq \max(\frac{n}{2}, 2)$, $p > 2$ pre $n = 4$ (viď [RS,X.38]).

(Návod pre dôkaz $n_\pm = 0$: Najprv ukážte, že $\mathcal{D}(\overline{N}) \subset \mathcal{D}(\overline{A})$ a že uvedené nerovnosti platia pre každé $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{N})$. Z príkladu 19 plynie $\mathcal{R}(\overline{N}) = X$, takže špeciálne pre každé $\psi \in \mathcal{D}(A^*)$ existuje $\varphi = (\overline{N})^{-1}\psi \in \mathcal{D}(\overline{N}) \subset \mathcal{D}(\overline{A})$. Platí $\langle \psi, \varphi\rangle = \langle \overline{N}\varphi, \varphi\rangle = \|\overline{N}^{1/2}\varphi\|^2$,

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Im}\langle A^*\psi, \varphi\rangle| =& \frac{1}{2}|\langle \varphi, A^*\psi\rangle - \langle A^*\psi, \varphi\rangle| = \\
=& \frac{1}{2}|\langle \overline{A}\varphi, \overline{N}\varphi\rangle - \langle \overline{N}\varphi, \overline{A}\varphi\rangle| \leq \frac{d}{2}\|\overline{N}^{1/2}\varphi\|^2 ,
\end{aligned}
$$

takže $\mathrm{Im}\langle(\pm A^* + id)\psi, \varphi\rangle \geq \frac{d}{2}\|\overline{N}^{1/2}\varphi\|^2$, t.j. $n_\pm = 0$.)

Z vyššie uvedeného plynie, že pokiaľ samoadjungované rozšírenie symetrického zobrazenia existuje, potom nie je jednoznačne určené. Ak je však A symetrické, zdola ohraničené zobrazenie, potom sa dá ukázať existencia jediného samoadjungovaného rozšírenia zobrazenia A s istými dodatočnými vlastnosťami. Predpokladajme teda, že zobrazenie A je symetrické a zdola ohraničené konštantou α a pre $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ položme $\|\varphi\|_A^2 := \langle A\varphi, \varphi\rangle + (\alpha{+}1)\|\varphi\|^2$. Potom je $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ NLP a jeho zúplnenie X_A sa dá spojito vnoriť do priestoru X. Existuje jediné (tzv. **Friedrichsove**) samoadjungované rozšírenie $\hat{A}$ zobrazenia A s vlastnosťou $\mathcal{D}(\hat{A}) \subset X_A$; toto zobrazenie je naviac zdola ohraničené konštantou α.

Ak je A kladné zobrazenie, potom sú nasledujúce 4 tvrdenia ekvivalentné:

1. $\overline{A}$ je samoadjungované
2. $\mathcal{R}(A)$ je hustý
3. $\mathcal{N}(A^*) = \{0\}$

4. A má jediné zdola ohraničené samoadjungované rozšírenie

$\boxed{37}$ Nech $X = L^2(0,\infty)$, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}((0,\infty))$, $A\varphi = -\varphi''$ (viď príklad 34). Potom platí $\mathcal{D}(\hat{A}) = \{f \in W^{2,2}((0,\infty))\,;\, \varphi(0) = 0\}$. Dokážte. (Návod: Uvedomte si, že $\|\cdot\|_A$ je norma priestoru $W^{1,2}((0,\infty))$, takže $X_A = \{\varphi \in W^{1,2}\,;\, \varphi(0){=}0\}$. Ďalej využite príklad 34.)

$\boxed{38}$ Nech $X = L^2((0,1))$, $A\varphi = -\varphi''$, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}((0,1))$. Overte nasledujúce tvrdenia: platí $\mathcal{D}(\hat{A}) = \{\varphi \in W^{2,2}((0,1))\,;\, \varphi(0){=}\varphi(1){=}0\}$ a $\hat{A}$ je zdola ohraničené konštantou $\alpha = \pi^2$. Ak je A_1 samoadjungované rozšírenie A s definičným oborom $\mathcal{D}(A_1) = \{\varphi \in W^{2,2}((0,1))\,;\, \varphi'(0){=}\varphi'(1){=}0\}$, potom je A_1 zdola ohraničené konštantou α $=0$; ak $\mathcal{D}(A_1) = \{\varphi \in W^{2,2}((0,1))\,;\, \varphi(0){=}-\varphi(1),\ \varphi'(0){=}-\varphi'(1)\}$, potom opäť $\alpha = \pi^2$. Všetky samoadjungované rozšírenia A sú zdola ohraničené, pretože indexy defektu A sú konečné.

$\boxed{39}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $H = -\triangle + V$, kde potenciál $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je zdola ohraničená funkcia, ktorá patrí do priestoru $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, t.j. $V/_{\mathrm{K}} \in L^2(K)$ pre každú kompaktnú množinu $K \subset \mathbb{R}^n$. Potom pre dostatočne veľké $c > 0$ je zobrazenie $H{+}c$ kladné a $\mathcal{N}((H{+}c)^*) = \{0\}$, takže $\overline{H{+}c}$ (a teda aj $\overline{H}$) je samoadjungované zobrazenie (viď napr. [RS,X.28]). Dokážte toto tvrdenie za predpokladu $n = 1$.

4. PERTURBÁCIE SAMOADJUNGOVANÝCH ZOBRAZENÍ

Nech sú A, B husto definované lineárne zobrazenia v H-priestore X. Pripomeňme, že píšeme $B \prec A$, ak je B A-ohraničené, t.j. $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ a existujú $a, b \in \mathbb{R}$ tak, že pre každé $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ platí $\|B\varphi\| \le a\|A\varphi\| + b\|\varphi\|$. Ak môžeme v tejto nerovnosti zvoliť $a < 1$ (resp. $a \le 1$), píšeme $B \prec_1 A$ (resp. $B \preceq_1 A$); ak môžeme zvoliť a ľubovoľne malé (kladné), píšeme $B \prec_\varepsilon A$.

Jednou zo základných perturbačných viet je tzv. **Kato-Rellichova** veta: *Ak je A samoadjungované, B symetrické zobrazenie a $B \prec_1 A$, potom je $A{+}B$ samoadjungované. Ak je naviac A zdola ohraničené, potom je tiež $A{+}B$ zdola ohraničené.* Predpoklad $B \prec_1 A$ v tejto vete je pritom automaticky splnený, ak zobrazenie B je A-kompaktné (potom dokonca $B \prec_\varepsilon A$). Ak namiesto $B \prec_1 A$ predpokladáme len $B \preceq_1 A$, potom platí, že zobrazenie $\overline{A{+}B}$ je samoadjungované.

$\boxed{40}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R}^3)$, $H\varphi = -\triangle\varphi + V\cdot\varphi$, kde $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $V \in L^2(\mathbb{R}^3) +$

$L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (napr. $V(x) = -\dfrac{1}{|x|^\alpha}$, $0 < \alpha < 3/2$), $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(-\triangle) = W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$. Potom je H samoadjungované zobrazenie.

Riešenie: Zobrazenie $A\varphi = -\triangle\varphi$ s definičným oborom $\mathcal{D}(A) = W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$ je samoadjungované a zobrazenie $B\varphi = V \cdot \varphi$ je symetrické. Ukážeme, že platí $B \prec_\varepsilon A$, takže podľa Kato-Rellichovej vety je $H = A + B$ samoadjungované.
Funkcia V sa dá napísať v tvare $V_1 + V_2$, kde $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ a $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Ak položíme $B_i\varphi = V_i\varphi$ $(i = 1, 2)$, potom $B = B_1 + B_2$, $B_2 \in \mathcal{L}(X)$, takže $B_2 \prec_\varepsilon A$ a stačí dokázať $B_1 \prec_\varepsilon A$. Z viet o vnorení a ekvivalentnosti noriem plynie $\|u\|_{L^\infty} \leq \tilde{c}\|u\|_{W^{2,2}} \leq c(\|\triangle u\| + \|u\|)$ pre každé $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$ (kde $\|u\| = \|u\|_{L^2}$). Ak položíme $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon\varphi(x)$, dostávame

$$\begin{aligned}\|V_1 \cdot \varphi\| \leq & \|V_1\| \cdot \|\varphi\|_{L^\infty} = \|V_1\| \cdot \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \\ \leq & c\|V_1\| \cdot (\|\triangle\varphi_\varepsilon\| + \|\varphi_\varepsilon\|) = \\ = & c\|V_1\| \cdot (\sqrt{\varepsilon}\|\triangle\varphi\| + \varepsilon^{-3/2}\|\varphi\|)\ ,\end{aligned}$$

odkiaľ plynie $B_1 \prec_\varepsilon A$.

Podobne sa dá tiež dokázať samoadjungovanosť H v $L^2(\mathbb{R}^n)$, ak $V \in L^p + L^\infty$ a $p \geq 2$, $p > n/2$.

Ďalším perturbačným tvrdením je tzv. **KLMN** veta. *Nech je A nezáporné samoadjungované zobrazenie a β symetrická kvadratická forma na* $Q(A) = \mathcal{D}(|A|^{1/2})$ (t.j. $\beta : Q(A) \times Q(A) \to \mathbb{C}$ je lineárna v prvej premennej a $\beta(\varphi, \psi) = \overline{\beta(\psi, \varphi)}$) *splňujúca odhad* $|\beta(\varphi, \varphi)| \leq a\langle A\varphi, \varphi\rangle + b\|\varphi\|^2$ *pre vhodné $a < 1$ a každé $\varphi \in \mathcal{D}(A)$. Potom existuje jediné samoadjungované zobrazenie C, pre ktoré $Q(C) = Q(A)$ a $\langle C\varphi, \psi\rangle = \langle A^{1/2}\varphi, A^{1/2}\psi\rangle + \beta(\varphi, \psi)$ pre každé $\varphi, \psi \in Q(C)$. Naviac C je zdola ohraničené konštantou $-b$ a platí $\mathcal{D}(C) = \{\varphi \in Q(C)\,;\ |\langle C\varphi, \psi\rangle| \leq c\|\psi\|\ \forall\psi \in Q(C)\}$.*

$\boxed{41}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R})$, $Af = -f''$, $\mathcal{D}(A) = W^{2,2}(\mathbb{R})$. Potom platí $Q(A) = W^{1,2}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{BUC}(\mathbb{R})$ a ak položíme $\beta(\varphi, \psi) = \varphi(0) \cdot \overline{\psi(0)}$ pre $\varphi, \psi \in Q(A)$, potom sú splnené predpoklady KLMN vety, pretože pre $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ platí

$$\begin{aligned}\beta(\varphi, \varphi) = & |\varphi(0)|^2 = |\varphi_\varepsilon(0)|^2 \leq c\|\varphi_\varepsilon\|^2_{W^{1,2}} = \\ = & c(\|\varphi'_\varepsilon\|^2 + \|\varphi_\varepsilon\|^2) = c(\varepsilon\|\varphi'\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\varphi\|^2) = \\ = & \varepsilon c\langle A\varphi, \varphi\rangle + \frac{c}{\varepsilon}\|\varphi\|^2\ ,\end{aligned}$$

kde $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$. Existuje teda jediné samoadjungované zobrazenie C tak, že $Q(C) = Q(A)$ a $\langle C\varphi, \psi\rangle = \langle A^{1/2}\varphi, A^{1/2}\psi\rangle + \beta(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'\overline{\psi'}\,dx + \varphi(0)\overline{\psi(0)}$; formálne $C\varphi = -\varphi'' + \delta\cdot\varphi$, kde δ je Diracova funkcia. Ukážte, že neplatí $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C)$ ani $\mathcal{D}(C) \subset \mathcal{D}(A)$.

Riešenie: Nech $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $\varphi(x) = 1$ pre $|x| \le 1$. Zvoľme $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ s nosičom v intervale $[-1,1]$, $0 \le \psi \le 1$, $\psi(0) = 1$ a položme $\psi_n(x) = \sqrt{n}\psi(nx)$. Potom $\psi_n \in Q(A)$ a $\langle C\varphi, \psi_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} -\varphi''\psi_n\,dx + \varphi(0)\psi_n(0) = \sqrt{n}$. Keby $\varphi \in \mathcal{D}(C)$, potom $\sqrt{n} = \langle C\varphi, \psi_n\rangle \le \|C\varphi\|\cdot\|\psi_n\| \le \sqrt{2}\|C\varphi\|$, čo nie je možné, takže $\varphi \in \mathcal{D}(A)\backslash\mathcal{D}(C)$.

Nech ďalej $\varphi_o \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi_o(x) = 1$ pre $|x| \le 1$ a $\varphi(x) = (1 + \frac{|x|}{2})\varphi_o(x)$. Potom zrejme $\varphi \in Q(A)\backslash\mathcal{D}(A)$ a pre každé $\psi \in Q(C)$ dostávame

$$
\begin{aligned}
|\langle C\varphi,\psi\rangle| =& \Big|\frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi_o\overline{\psi'}\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \varphi_o\overline{\psi'}\,dx + \int_{\mathbb{R}} (1+\frac{|x|}{2})\varphi_o'\overline{\psi'}\,dx + \overline{\psi(0)}\Big| \\
=& \Big| -\frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi_o'\overline{\psi}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \varphi_o'\overline{\psi}\,dx - \int_{\mathbb{R}} \big((1+\frac{|x|}{2})\varphi_o'\big)'\overline{\psi}\,dx\Big| \le c\|\psi\| \,,
\end{aligned}
$$

takže $\varphi \in \mathcal{D}(C)$.

$\boxed{42}$ *Poznámka:* Pomocou KLMN vety možno tiež napr. korektne definovať samoadjungované zobrazenie $H = -\triangle + V$ v $L^2(\mathbb{R}^3)$ pre potenciály $V \in R + L^\infty(\mathbb{R}^3)$, kde $V \in R \iff \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|V(x)|\cdot|V(y)|}{|x-y|^2}\,dx\,dy < \infty$. Špeciálne môžeme zvoliť $V(x) = -\frac{1}{|x|^\alpha}$ pre $0 < \alpha < 2$ (viď [RS,X.19]). Zápis $H = -\triangle + V$ je však v tomto prípade formálny, pretože nemusí platiť $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(\triangle) \cap \mathcal{D}(V)$, ako tomu bolo v prípade Kato-Rellichovej vety.