SPEKTRUM LINEÁRNEHO ZOBRAZENIA

Pri štúdiu lineárneho zobrazenia $A : X \to X$ nám často pomôže, ak vieme toto zobrazenie rozložiť na jednoduchšie zobrazenia. Ak napr. existujú uzavreté podpriestory $X_1, X_2 \subset X$ tak, že $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, $X_1 + X_2 = X$ a pritom $A(X_i) \subset X_i$, $i = 1, 2$, (t.j. priestory X_1, X_2 sú A-invariantné), potom zobrazenie A môžeme písať v tvare $A = A_1 \oplus A_2$, kde $A_i = A/_{X_i} : X_i \to X_i$, $i = 1, 2$. Ak je X konečnorozmerný priestor (nad $\mathbb{C}$), potom pri výbere vhodnej bázy môžeme A reprezentovať maticou v Jordanovom kanonickom tvare, ktorá nám poskytuje rozklad na zobrazenia príslušné jednotlivým Jordanovym bunkám: $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, kde A_i je reprezentované maticou tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix},$$

a λ_i je vlastné číslo zobrazenia A. Z lineárnej algebry plynie, že priestor X_i príslušný zobrazeniu A_i sa už nedá ďalej rozložiť na A-invariantné podpriestory. Ak označíme P_i projekciu na priestor X_i, potom zrejme platí

$$A = \sum_{i=1}^{k} AP_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i + \sum_{i=1}^{k} (A_i - \lambda_i) P_i \ ,$$

kde zobrazenie A_i-λ_i je nilpotentné, t.j. $(A_i - \lambda_i)^n = 0$ pre vhodné n. V prípade, že A je symetrické, je A reprezentované Jordanovou maticou, ktorá je diagonálna (jej bunky majú veľkosť 1), takže A má tvar $A = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ a zobrazenie A_i predstavuje násobenie číslom λ_i. Tento rozklad umožňuje tiež jednoduchý funkčný kalkulus pre zobrazenie A, napr. platí $A^n = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i^n P_i$, $\quad A^{-1} = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\lambda_i} P_i \quad$ (ak $\lambda_i \neq 0$ pre každé i).

Našou snahou v tejto kapitole bude určiť spektrum (t.j. analóg k množine vlastných čísel) zobrazenia A aj v nekonečnorozmernom prípade; pre samoadjungované zobrazenie tiež uvedieme tvrdenie o jeho spektrálnom rozklade a o jeho unitárnej ekvivalencii s operátorom násobenia.

Spektrálny rozklad možno urobiť tiež pre normálne zobrazenia (viď napr. [R2]) a pre niektoré ďaľšie typy zobrazení (tzv. spektrálne operátory, viď [DS]). Vo všeobecnom prípade sa dá otázka rozkladu zobrazenia často riešiť aspoň čiastočne: podľa toho, či sa nám podarí (určiť a) rozložiť jeho spektrum (viď §1).

1. SPEKTRUM A REZOLVENTA

V celej kapitole o spektre lineárneho zobrazenia budeme predpokladať, že X je B-priestor nad $\mathbb{C}$ a A je uzavreté lineárne zobrazenie v X s definičným oborom $\mathcal{D}(A)$. Operátor $\lambda I - A : x \mapsto \lambda x - Ax$ (kde $\lambda \in \mathbb{C}$) budeme stručne zapisovať ako $\lambda - A$. Povieme, že číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ patrí do

- **rezolventnej množiny** $\varrho(A)$, ak je zobrazenie $\lambda - A$ prosté, jeho obor hodnôt $\mathcal{R}(\lambda - A)$ je hustý v X a k nemu inverzné zobrazenie $(\lambda - A)^{-1}$ je spojité
- **spektra** $\sigma(A)$, ak nepatrí do rezolventnej množiny
- **bodového spektra** $\sigma_{\mathrm{P}}(A)$, ak zobrazenie $\lambda - A$ nie je prosté. Číslo λ sa potom nazýva **vlastné číslo** zobrazenia A, ľubovoľný nenulový prvok priestoru $\mathcal{N}(\lambda) := \mathcal{N}(\lambda - A)$ sa nazýva **vlastný vektor** zobrazenia A a dimenzia priestoru $\mathcal{N}(\lambda)$ sa nazýva (geometrická) **násobnosť** vlastného čísla λ. **Algebraická násobnosť** vlastného čísla λ je dimenzia priestoru $\bigcup\limits_{k\geq 0} \mathcal{N}\big((\lambda - A)^k\big)$.
- **spojitého spektra** $\sigma_{\mathrm{C}}(A)$, ak je zobrazenie $\lambda - A$ prosté, jeho obor hodnôt je hustý, ale zobrazenie $(\lambda - A)^{-1}$ nie je spojité
- **zbytkového spektra** $\sigma_{\mathrm{r}}(A)$, ak je zobrazenie $\lambda - A$ prosté, ale nemá hustý obor hodnôt.

$\boxed{1}$ Nech $X = \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{L}(X)$. Potom z lineárnej algebry plynie $\sigma_{\rm C}(A) = \sigma_{\rm r}(A) = \emptyset$, t.j. spektrum A sa skladá len z vlastných čísel. Ak zobrazenie A reprezentujeme maticou v Jordanovom kanonickom tvare, ľahko zistíme, že počet vlastných čísel sa rovná n (= dimenzia priestoru X); každé vlastné číslo však pritom musíme započítať toľkokrát, aká je jeho algebraická násobnosť. Napr. pre spektrum zobrazenia A reprezentovaného maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

platí $\sigma(A) = \{1, 2\}$, pričom geometrická násobnosť oboch vlastných čísel je 2, algebraická násobnosť vlastného čísla λ=1 je tiež 2. Ďalej platí

$$4 = \dim \mathcal{N}\big((1-A)^2\big) < \dim \mathcal{N}\big((1-A)^3\big) = \dim\big((1-A)^k\big) = 5$$

pre každé $k \geq 3$, takže algebraická násobnosť vlastného čísla λ=1 je 5.

$\boxed{2}$ Nech $\lambda \in \varrho(A)$. Potom $\mathcal{R}(\lambda - A) = X$ a teda $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Dokážte.

Riešenie: Nech $\lambda \in \varrho(A)$, $y \in X$. Pretože $\mathcal{R}(\lambda - A)$ je hustý v X, existujú $x_n \in X$ tak, že $(\lambda - A)x_n \to y$. Zo spojitosti $(\lambda - A)^{-1}$ teraz plynie cauchyovskosť postupnosti $x_n = (\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)x_n$, takže $x_n \to x$ pre vhodné $x \in X$. Ďalej platí $Ax_n = \lambda x_n - (\lambda - A)x_n \to \lambda x - y$ a z uzavretosti zobrazenia A dostávame $x \in \mathcal{D}(A)$, $Ax = \lambda x - y$, t.j. $y = (\lambda - A)x \in \mathcal{R}(\lambda - A)$.

$\boxed{3}$ Nech $X = \mathcal{C}([0,1]) = \mathcal{BUC}((0,1))$, $(Ax)(t) = x'(t)$.
(i) Ak $\mathcal{D}(A) = \{x \in \mathcal{C}^1([0,1])\,;\, x(0) = 0\}$, potom $\sigma(A) = \emptyset$.
(ii) Ak $\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}^1([0,1])$, potom $\sigma_{\rm p}(A) = \mathbb{C}$.
(iii) Ak $\mathcal{D}(A) = \{x \in \mathcal{C}^1([0,1])\,;\, x(0) = x(1)\}$, potom $\sigma(A) = \sigma_{\rm p}(A) = \{2\pi i n\,;\, n \text{ celé}\}$.
Vo všetkých troch prípadoch je A uzavreté zobrazenie.

$\boxed{4}$ Nech $X = L^p(-\pi, \pi)$, $p < \infty$, $Ax = x'$, $\mathcal{D}(A) = \{x \in W^{1,p}(-\pi,\pi)\,;\, x(-\pi) = x(\pi)\}$. Potom je A uzavreté zobrazenie s hustým definičným oborom a $\sigma(A) = \sigma_{\rm p}(A) = \{in\,;\, n \text{ celé}\}$.

$\boxed{5}$ Nech $X_1 = \mathcal{BUC}(\mathbb{R})$, $X_2 = L^1(\mathbb{R})$, $X_3 = L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ a nech A_k je X_k-realizácia diferenciálneho operátora $Ax = x'$, t.j. $\mathcal{D}(A_k) = \{x \in X_k\,;\, Ax \in X_k\}$ $(k = 1,2,3)$. Potom $\sigma(A_k) = \sigma_{\rm p}(A_1) = \sigma_{\rm r}(A_2) = \sigma_{\rm C}(A_3) = i\mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ Nech $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $X_1 = \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^+)$, $X_2 = L^p(\mathbb{R}^+)$, $p \geq 1$ a A_k je X_k-realizácia $Ax = x'$. Potom $\sigma(A_k) = \sigma_{\rm p}(A_1) = \{\lambda\,;\, \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$, $\sigma_{\rm p}(A_2) = \{\lambda\,;\, \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, $\sigma_{\rm C}(A_2) = i\mathbb{R}$.

$\boxed{7}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia a M_φ je X-realizácia operátora násobenia funkciou φ, t.j. $M_\varphi f = \varphi f$. M_φ je uzavreté zobrazenie s hustým definičným oborom (tzv. maximálny multiplikatívny operátor), $\sigma(M_\varphi) = \overline{\mathcal{R}(\varphi)}$, $\sigma_{\mathrm{r}}(M_\varphi) = \emptyset$, $\sigma_{\mathrm{p}}(M_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0\}$, kde μ je Lebesgueova miera v $\mathbb{R}^n$. Naviac pre reálnu funkciu φ je zobrazenie M_φ samoadjungované. Dokážte.

Mnohé diferenciálne operátory v X sú prostredníctvom Fourierovej transformácie unitárne ekvivalentné s maximálnymi multiplikatívnymi operátormi, čo umožňuje jednoduché určenie ich spektra. Napr. operátor $D_j = \frac{1}{i}\partial_j$ je unitárne ekvivalentný s M_φ pre $\varphi(x) = x_j$, takže $\sigma(D_j) = \sigma_{\mathrm{c}}(D_j) = \mathbb{R}$. Podobne $\sigma(-\triangle) = \sigma_{\mathrm{c}}(-\triangle) = \mathbb{R}^+$. Ukážte, že odtiaľ napr. plynie, že úloha $\triangle u = f$ v $L^2(\mathbb{R}^n)$ má riešenie len pre hustú množinu pravých strán $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

$\boxed{8}$ Použite Fourierovu transformáciu $\mathcal{F}$ tiež v nasledujúcich príkladoch:

- Nech $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, $Af = u * f$ (konvolúcia). Potom je A spojitý lineárny operátor v X so spektrom rovným uzáveru množiny $\{(2\pi)^{n/2}\mathcal{F}u(\xi)\,;\, \xi \in \mathbb{R}^n\}$, pričom $\mathcal{F}u \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{F}u(\xi) \to 0$ pre $|\xi| \to \infty$.
- Nech $X = L^2(\mathbb{R})$. Položte $(T\varphi)(x) = \varphi(x+a)$, kde $a > 0$, a ukážte, že T je unitárne zobrazenie so spektrom $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{c}}(T) = \{\lambda\,;\, |\lambda| = 1\}$.

$\boxed{9}$ Dokážte, že pre adjungované zobrazenie platí $\sigma(A') = \sigma(A)$. (Návod: Dokazujte $\varrho(A') = \varrho(A)$ a použite pritom Banachovu vetu o zobrazeniach s uzavretým oborom hodnôt. Pripomeňme, že $\mathcal{D}(A')$ nemusí byť hustý.) Ďalej ukážte, že $\sigma_{\mathrm{r}}(A) \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A') \subset \sigma_{\mathrm{r}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(A)$. (Návod: $\mathcal{N}(\lambda - A') = \mathcal{R}(\lambda - A)^\circ$.)

Podľa cvičenia 2 je pre $\lambda \in \varrho(A)$ zobrazenie $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$ prvok B-priestoru $\mathcal{L}(X)$. Vektorová funkcia $R(\cdot, A) : \varrho(A) \to \mathcal{L}(X) : \lambda \mapsto R(\lambda, A)$ sa nazýva **rezolventa**. Platí nasledujúce tvrdenie: $\varrho(A)$ *je otvorená množina a rezolventa je holomorfná (analytická) vektorová funkcia.* Ďalej platí

(i) $R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A)$ (komutovanie)

(ii) $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A)$ (rezolventná (Hilbertova) identita)

Návod dôkazu: Pre $\lambda \in \varrho(A)$ a $\mu \in \mathbf{C}$ formálne platí

$$R(\mu, A) = \frac{1}{\mu - A} = \frac{1}{(\lambda - A) - (\lambda - \mu)} = \frac{1}{\lambda - A} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda - \mu}{\lambda - A}}$$

$$= R(\lambda, A) \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^k R^k(\lambda, A)$$

pričom uvedená nekonečná suma má zrejme zmysel pre $|\lambda - \mu| < \dfrac{1}{\|R(\lambda, A)\|}$. Pre takéto μ položte $B_\mu = R(\lambda, A) \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^k R^k(\lambda, A)$ a pomocou rozpisu $\mu - A = (\mu - \lambda) + (\lambda - A)$ ukážte $(\mu - A)B_\mu = I$, $B_\mu(\mu - A) = I/_{\mathcal{D}(A)}$, odkiaľ plynie $\mu \in \varrho(A)$, $R(\mu, A) = B_\mu$, a teda tiež holomorfnosť rezolventy. K dôkazu identity (i) resp. (ii) použite identitu

$$(\lambda - A)(\mu - A) = (\mu - A)(\lambda - A)$$

resp. rozpis

$$R(\lambda - A) - R(\mu, A) = R(\lambda, A)(\mu - A)R(\mu, A) - R(\lambda, A)(\lambda - A)R(\mu, A).$$

$\boxed{10}$ Nech sú A, B uzavreté zobrazenia. Ukážte, že potom platí

(i) Ak $\lambda \in \varrho(A) \cap \varrho(B)$, potom $R(\lambda, A)(B - A)R(\lambda, B) \subset R(\lambda, B) - R(\lambda, A)$.

(ii) Ak $\lambda \in \varrho(A)$, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ a zobrazenie $C = (B - A)R(\lambda, A)$ je spojité, $\|C\| < 1$, potom $\lambda \in \varrho(B)$, $R(\lambda, B) = R(\lambda, A) \sum_{k=0}^{\infty} C^k$.

$\boxed{11}$ Nech je A uzavreté zobrazenie, $\varrho(A) \neq \emptyset$, a nech $B \in \mathcal{L}(X)$. Potom platí: A komutuje s B (t.j. $BA \subset AB$) práve vtedy, keď existuje $\lambda \in \varrho(A)$ tak, že $R(\lambda, A)B = BR(\lambda, A)$, a to platí práve vtedy, keď pre každé $\lambda \in \varrho(A)$ je $R(\lambda, A)B = BR(\lambda, A)$. Dokážte. (Návod: Ak B komutuje s A, potom $R(\lambda, A)B = R(\lambda, A)B(\lambda - A)R(\lambda - A) = R(\lambda, A)(\lambda - A)BR(\lambda, A) = BR(\lambda, A)$. Ak B komutuje s $R(\lambda, A)$, potom $BAR(\lambda, A) = B(\lambda R(\lambda, A) - I) = (\lambda R(\lambda, A) - I)B = AR(\lambda, A)B = ABR(\lambda, A)$, takže $BA \subset AB$.)

$\boxed{12}$ Nech je A uzavreté zobrazenie s hustým definičným oborom a nech $\varrho(A) \neq \emptyset$. Potom je A^n uzavreté zobrazenie s hustým definičným oborom. Dokážte.

Riešenie pre $n = 2$: Nech $\lambda \in \varrho(A)$, $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\tilde{x} \in \mathcal{D}(A)$ tak, že $\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon$. Pre $y = (\lambda - A)\tilde{x}$ ďalej existujú $y_n \in \mathcal{D}(A)$ tak, že $y_n \to y$. Potom pre $z_n = R(\lambda, A)y_n$ platí $z_n \in \mathcal{D}(A^2)$, $z_n \to R(\lambda, A)y = \tilde{x}$, takže $\|x - z_n\| < \varepsilon$ pre veľké n, odkiaľ plynie hustota $\mathcal{D}(A^2)$.

Ak $x_n \in \mathcal{D}(A^2)$, $x_n \to x$, $A^2 x_n \to z$, potom rozpisom $A = A - \lambda + \lambda$ dostávame $Ax_n = -R(\lambda, A)A^2 x_n - \lambda x_n + \lambda^2 R(\lambda, A)x_n$, t.j. $Ax_n \to y$ pre vhodné y, odkiaľ vzhľadom k uzavretosti A plynie $x \in \mathcal{D}(A)$, $Ax = y$, $y \in \mathcal{D}(A)$, $Ay = z$, takže tiež $x \in \mathcal{D}(A^2)$, $A^2 x = z$, t.j. A^2 je uzavreté.

Nech je σ_1 ohraničená podmnožina $\sigma(A)$, ktorá je zároveň uzavretá i otvorená v $\sigma(A)$ (tzv. spektrálna množina). Nech je Γ konečný systém Jordanovych kriviek konečnej dĺžky oddeľujúci σ_1 od $\sigma(A)\backslash\sigma_1$ (t.j. $\mathrm{ind}_\Gamma \lambda = 1$ pre $\lambda \in \sigma_1$ a $\mathrm{ind}_\Gamma \lambda = 0$ pre $\lambda \in \sigma(A)\backslash\sigma_1$). *Potom je zobrazenie* $P :=$

$\frac{1}{(2\pi i)}\int_\Gamma R(\lambda, A)\,d\lambda$ *spojitá projekcia v* X, $P(X) \subset \mathcal{D}(A)$. *Ak označíme* $X_1 = P(X), X_2 = (I-P)(X)$, *potom sú priestory* X_1, X_2 *A-invariantné, zúženie* A_1 *zobrazenia* A *na priestor* X_1 *je spojité lineárne zobrazenie v priestore* X_1 *so spektrom* $\sigma(A_1) = \sigma_1$ *a zúženie* A_2 *zobrazenia* A *na* $\mathcal{D}(A)\cap X_2$ *je uzavreté zobrazenie v* X_2 *so spektrom* $\sigma(A_2) = \sigma(A)\backslash\sigma_1$.

Ak je špeciálne $\sigma_1 = \{\lambda_o\}$ *(izolovaný bod spektra), potom má rezolventa v okolí bodu* λ_o *Laurantov rozvoj*

$$R(\lambda, A) = \frac{P}{\lambda-\lambda_o} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B^k}{(\lambda-\lambda_o)^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_o)^k C^{k+1},$$

kde $B = (A-\lambda_o)P$, $C = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R(\lambda, A)}{\lambda-\lambda_o}\,d\lambda$ *a* P *je príslušná spektrálna projekcia. Ak je* λ_o *pól rezolventy stupňa* ν, *potom* $\lambda_o \in \sigma_p(A)$ *a* $X_1 = \mathcal{N}\big((\lambda_o - A)^n\big)$, $X_2 = \mathcal{R}\big((\lambda_o - A)^n\big)$ *pre každé* $n \geq \nu$ (číslo ν sa nazýva Rieszov index vlastného čísla λ_o).

Idea dôkazu 1. časti tvrdenia: Označme $⨍ = \frac{1}{2\pi i}\int$. Nech sú Γ_1, Γ_2 dva systémy Jordanovych kriviek splňujúce predpoklady tvrdenia a nech $\operatorname{ind}_{\Gamma_1}\lambda = 0$ pre $\lambda \in \Gamma_2$, $\operatorname{ind}_{\Gamma_2}\lambda = 1$ pre $\lambda \in \Gamma_1$. Potom platí

$$\begin{aligned} P^2 &= ⨍_{\Gamma_1}⨍_{\Gamma_2} R(\lambda, A)R(\mu, A)\,d\mu\,d\lambda = ⨍_{\Gamma_1}⨍_{\Gamma_2}\frac{R(\lambda, A)-R(\mu, A)}{\mu-\lambda}\,d\mu\,d\lambda \\ &= ⨍_{\Gamma_1}⨍_{\Gamma_2}\frac{R(\lambda, A)}{\mu-\lambda}\,d\mu\,d\lambda - ⨍_{\Gamma_2}⨍_{\Gamma_1}\frac{R(\mu, A)}{\mu-\lambda}\,d\lambda\,d\mu = ⨍_{\Gamma_1} R(\lambda, A)\,d\lambda - 0 = P\ , \end{aligned}$$

takže P je projekcia. S využitím posledného cvičenia v dodatku II dostávame ďalej pre $x \in X$

$$\begin{aligned} ⨍_\Gamma \lambda R(\lambda, A)x\,d\lambda &= ⨍_\Gamma(\lambda R(\lambda, A) - I)x\,d\lambda = ⨍_\Gamma AR(\lambda, A)x\,d\lambda \\ &= A\big(⨍_\Gamma R(\lambda, A)x\,d\lambda\big) = APx\ , \end{aligned}$$

takže $Px \in \mathcal{D}(A)$, $AP \in \mathcal{L}(X)$. Pre $x \in \mathcal{D}(A)$ platí tiež

$$APx = ⨍_\Gamma AR(\lambda, A)x\,d\lambda = ⨍_\Gamma R(\lambda, A)Ax\,d\lambda = PAx\ ,$$

odkiaľ plynie A-invariantnosť priestorov X_1 a X_2.

Zvoľme $\mu \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$ a položme $B = \displaystyle\int_\Gamma \frac{R(\lambda, A)}{\mu - \lambda}\, d\lambda$. Ak $\operatorname{ind}_\Gamma \mu = 0$, potom pre $x \in X_1$ platí

$$(\mu - A)Bx = B(\mu - A)x = \int_\Gamma \Big(R(\lambda, A) + \frac{I}{\mu - \lambda}\Big) x\, d\lambda = Px = x\ ,$$

takže $\mu \in \varrho(A_1)$. Analogicky pre $\operatorname{ind}_\Gamma \mu = 1$ a $x \in X_2$ (resp. $x \in \mathcal{D}(A_2)$) dostávame $(\mu - A)Bx = -x$ (resp. $B(\mu - A)x = -x$), takže $\mu \in \varrho(A_2)$. Zvyšok tvrdenia plynie z rovnosti $\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$.

$\boxed{13}$ Nech je λ_o izolovaný bod spektra. Dokážte, že pre zobrazenia P, B, C vyskytujúce sa v Laurantovom rozvoji rezolventy platí $PC = CP = 0$, $B = BP = PB$, $CA \subset AC \in \mathcal{L}(X)$, $(\lambda_o - A)C = P - 1$.

$\boxed{14}$ Nech je λ_o izolovaný bod spektra a nech $\dim \mathcal{R}(P) < \infty$, kde $P = P(\lambda_o)$ je spektrálna projekcia príslušná spektrálnej množine $\sigma_1 = \{\lambda_o\}$. Ukážte, že potom je λ_o nutne pól rezolventy, a teda tiež $\lambda_o \in \sigma_{\mathrm{P}}(A)$. (Návod: Pre spektrum zobrazenia $D = (A - \lambda_o)/_{X_1}$ platí $\sigma(D) = \{0\}$, pričom ide o zobrazenie v konečnorozmernom priestore $X_1 = \mathcal{R}(P)$. Odtiaľ plynie $D^n = 0$ pre vhodné n, takže $B^k = D^k P = 0$ pre dostatočne veľké k.)

$\boxed{15}$ Nech je A matica z príkladu 1. Čomu sa rovná Rieszov index vlastných čísel 1 a 2 ? ($\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 1$)

$\boxed{16}$ Nech má rezolventa $R(\cdot, A)$ izolovanú singularitu v ∞. Dá sa ukázať, že táto singularita je odstrániteľná (t.j. rezolventa je analytická v ∞) práve vtedy, keď $A \in \mathcal{L}(X)$. Ukážte, že ak $A \notin \mathcal{L}(X)$, musí ísť dokonca o podstatnú singularitu, t.j. ∞ nie je pól rezolventy. (Návod: Nech je ∞ pól rezolventy, $R(\lambda, A) = \lambda^k R_k + \lambda^{k-1} R_{k-1} + \ldots$, kde $k \geq 1$, $R_k \neq 0$. Potom $AR(\lambda, A) = -1 + \lambda R(\lambda, A) = -1 + \lambda^{k+1} R_k + \lambda^k R_{k-1} + \ldots$, takže pre každé $x \in X$ a $\lambda \to \infty$ platí $\lambda^{-k-1} R(\lambda, A)x \to 0$ a $A\big(\lambda^{-k-1} R(\lambda, A)x\big) \to R_k x$. Z uzavretosti A plynie $R_k x = 0$, spor.)

$\boxed{17}$ Na základe tvrdenia v predošlom cvičení definujme tzv. rozšírené spektrum $\tilde\sigma(A)$ ako $\sigma(A) \cup \{\infty\}$ pre $A \notin \mathcal{L}(X)$ a položme $\tilde\sigma(A) = \sigma(A)$ pre $A \in \mathcal{L}(X)$. Ukážte, že pre prosté uzavreté zobrazenie A s hustým $\mathcal{D}(A)$ i $\mathcal{R}(A)$ platí $\lambda \in \tilde\sigma(A) \iff \dfrac{1}{\lambda} \in \tilde\sigma(A^{-1})$ (kde kladieme $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$). Vyslovte a dokážte tiež analogické tvrdenia pre $\sigma_{\mathrm{P}}(A)$, $\sigma_{\mathrm{r}}(A)$ a $\sigma_{\mathrm{C}}(A)$.

$\boxed{18}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha < 0$, a nech je pre $f \in X$ funkcia $y = Af \in X$ definovaná ako riešenie diferenciálnej rovnice $y' = \alpha y + f$, t.j. $y(t) = \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$. Ukážte, že A je normálne zobrazenie a $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{C}}(A) = \left\{ \dfrac{1}{ix - \alpha}\, ;\, x \in \mathbb{R} \right\} \cup \{0\}$. (Návod:

Pomocou Fourierovej transformácie ukážte, že $\sigma(A^{-1}) = \sigma_{\mathrm{C}}(A^{-1}) = \{ix - \alpha\,;\, x \in \mathbb{R}\}$ a potom s využitím predošlého príkladu určte $\sigma(A)$ a $\sigma_{\mathrm{C}}(A)$. Normalitu dokazujte tiež najprv pre zobrazenie A^{-1}.)

Pri určovaní spektra operátora $(Af)(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$, kde funkcia h má tvar $h(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i \exp(\alpha_i t)$ $(\operatorname{Re}\alpha_i < 0)$, sa dá tiež použiť Laplaceova transformácia (viď [NS], §6.6).

$\boxed{19}$ Nech je σ_1 spektrálna množina zobrazenia A a nech je P príslušná spektrálna projekcia. Ukážte, že adjungované zobrazenie P' je spektrálna projekcia príslušná zobrazeniu A' (a množine σ_1).

$\boxed{20}$ Nech je λ pól rezolventy a zároveň vlastné číslo A konečnej (algebraickej) násobnosti. Potom platí $\dim \mathcal{N}(\lambda - A) = \dim \mathcal{N}(\lambda - A')$, $\mathcal{R}(\lambda - A) = \mathcal{N}(\lambda - A')^{\circ}$. Dokážte.

(Návod: Nech $X = X_1 \oplus X_2$, $A = A_1 \oplus A_2$ je spektrálny rozklad príslušný spektrálnej množine $\sigma_1 = \{\lambda\}$. Potom $\dim X_1 < \infty$, $\mathcal{R}(\lambda - A) = \mathcal{R}(\lambda - A_1) \oplus \mathcal{R}(\lambda - A_2) = \mathcal{R}(\lambda - A_1) \oplus X_2$, takže

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}(\lambda - A') &= \dim \mathcal{R}(\lambda - A)^{\circ} = \dim \mathcal{R}(\lambda - A_1)^{\circ(X_1)} \\ &= \dim \mathcal{N}(\lambda - A_1) = \dim \mathcal{N}(\lambda - A)\ . \end{aligned}$$

Ďalej použite Banachovu vetu o zobrazeniach s uzavretým oborom hodnôt.)

2. SPEKTRUM SPOJITÝCH ZOBRAZENÍ

Ak je $A \in \mathcal{L}(X)$, potom je $\sigma(A)$ neprázdna kompaktná množina. Ak položíme $r(A) = \sup\{|\lambda|\,;\, \lambda \in \sigma(A)\}$ (tzv. **spektrálny polomer**), *potom platí $r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \le \|A\|$. Ak je naviac X H-priestor a A je samoadjungované, potom $r(A) = \|A\|$.*

Idea dôkazu: Označme $\varrho = \inf_n \|A^n\|^{1/n} \le \|A\|$, $s = \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$. K danému $\varepsilon > 0$ zvoľme m tak, aby $\|A^m\|^{1/m} < \varrho + \varepsilon$ a položme $C = \max_{0 \le i < m} \|A^i\|$. Potom pre $n = pm + q$, $0 \le q < m$, dostávame $\|A^n\| \le C(\varrho + \varepsilon)^{pm}$, odkiaľ jednoducho plynie $s \le \varrho + \varepsilon$, a teda tiež $s \le \varrho$, čiže existuje $\lim \|A^n\|^{1/n} = \varrho$.

Ak $|\lambda| > \varrho$, potom podobne sa podobne ako v dôkaze otvorenosti rezolventnej množiny ukáže, že existuje $R(\lambda, A) = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{\lambda^k}$, t.j. $r(A) \le \varrho$. Ďalej z tohto explicitného vyjadrenia $R(\lambda, A)$ plynie $\|R(\lambda, A)\| \to 0$ pre $|\lambda| \to \infty$, takže spektrum nemôže byť prázdne (inak by totiž rezolventa musela byť podľa Liouvillovej vety konštantná, t.j. $R(\cdot, A) \equiv 0$, čo nie je možné).

Zvoľme teraz $R > r(A)$. Z jednoznačnosti Laurantovho rozvoja plynie, že rad $R(\lambda, A) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}$ konverguje na kružnici $|\lambda| = R$, takže

$$\|A^n\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=R} \lambda^n R(\lambda, A)\, d\lambda \right\| \le R^{n+1} \max_{|\lambda|=R} \|R(\lambda, A)\| \,,$$

odkiaľ plynie $\varrho \le R$, a teda tiež $\varrho \le r(A)$.

V prípade samoadjungovaného zobrazenia A platí $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} |\langle Ax, x\rangle|$, odkiaľ dostaneme $\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k}$, takže $r(A) = \|A\|$.

$\boxed{21}$ Nech $X = \ell^1$, $A : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$. Potom $\sigma(A) = \{\lambda\,;\ |\lambda| \le 1\}$, $\sigma_{\mathrm{P}}(A) = \{\lambda\,;\ |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{\mathrm{C}}(A) = \{\lambda\,;\ |\lambda| = 1\}$ a pre adjungované zobrazenie platí $A' : \ell^\infty \to \ell^\infty : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$, $\sigma(A') = \sigma_{\mathrm{R}}(A') = \{\lambda\,;\ |\lambda| \le 1\}$.

$\boxed{22}$ Nech $X = \mathcal{BUC}((0,1))$, $(Af)(t) = t\int_0^1 sf(s)\,ds$. Ukážte, že potom $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{P}}(A) = \{0, 1/3\}$.

$\boxed{23}$ Nech $X = L^2((0,1))$, $(Ax)(t) = \int_0^t K(t,s)x(s)\,ds$, kde $K \in L^2((0,1)^2)$. Potom platí $r(A) = 0$ (zobrazenia s touto vlastnosťou sa nazývajú kvázinilpotentné). Dokážte toto tvrdenie za dodatočného predpokladu $|K(t,s)| \le M$. (Návod: Dokážte indukciou $\int_0^t |(A^k x)(s)|^2\,ds \le \dfrac{(Mt)^{2k}\|x\|^2}{k!\,2^k}$, odkiaľ $\|A^k\|^{1/k} \to 0$.)

Ukážte, že $r(A) = 0$ tiež v prípade $X = \mathcal{C}([0,1])$ a $K \in \mathcal{C}([0,1]^2)$.

$\boxed{24}$ Nech $A, B \in \mathcal{L}(X)$ komutujú. Dokážte, že potom $r(A+B) \le r(A) + r(B)$, $r(AB) \le r(A)r(B)$. Platia tieto nerovnosti aj bez predpokladu komutovania A, B ? (Návod: Uvažujte $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.)

$\boxed{25}$ Nech je X H-priestor, nech $A \in \mathcal{L}(X)$ je normálny a $r(A) = 0$. Dokážte, že potom $A = 0$. (Návod: $\|A^*A\| = r(A^*A) \le r(A^*)r(A) = 0$)

$\boxed{26}$ Nech je A uzavreté zobrazenie a nech je λ_o izolovaný bod $\sigma(A)$. Ukážte, že hlavná časť príslušného Laurantovho rozvoja rezolventy konverguje pre ľubovoľné $\lambda \ne \lambda_o$. (Návod: $r(B) = 0$.)

$\boxed{27}$ Nech $A_k, A \in \mathcal{L}(X)$, $A_k \to A$ v $\mathcal{L}(X)$. Nech $\lambda_k \in \sigma(A_k)$, $\lambda_k \to \lambda$. Potom platí $\lambda \in \sigma(A)$. Dokážte.

Opačné tvrdenie (ku každému $\lambda \in \sigma(A)$ existujú $\lambda_k \in \sigma(A_k)$ tak, že $\lambda_k \to \lambda$) obecne neplatí, dokonca nemusí ani $r(A_k) \to r(A)$. Dokážte platnosť uvedeného obráteného tvrdenia za dodatočného predpokladu, že X je H-priestor a zobrazenia A_k, A sú samoadjungované.

$\boxed{28}$ Nech $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Potom $\sigma(AB)\backslash\{0\} = \sigma(BA)\backslash\{0\}$. Dokážte. (Návod: Ak $1 \in \varrho(AB)$, $C = R(1, AB)$, potom $(1 + BCA) = R(1, BA)$, takže $1 \in \varrho(BA)$.)

$\boxed{29}$ (i) Použite cvičenie 28 na dôkaz neexistencie zobrazení $A, B \in \mathcal{L}(X)$ s vlastnosťou $[A, B] = 1$, kde $[A, B] = AB - BA$. (Návod: Ak $AB - BA = 1$, potom $\sigma(AB) = \sigma(BA + 1) = \sigma(BA) + 1$.) Dá sa dokonca dokázať, že v nekonečnorozmernom priestore pre ľubovoľné $K \in \mathcal{K}(X)$ neexistujú $A, B \in \mathcal{L}(X)$ tak, že $[A, B] = 1 + K$, pričom v separabilnom H-priestore sú zobrazenia tvaru $1 + K$ jedinými zobrazeniami, ktoré sa nedajú napísať v tvare $[A, B]$.

(ii) Existujú uzavreté zobrazenia vlastnosťou $[A, B] = 1/_D$, kde $D = \mathcal{D}(AB) \cap \mathcal{D}(BA)$ je hustý podpriestor X ? (Návod: Položte $X = L^2(\mathbb{R})$, $Af = f'$, $(Bf)(x) = xf(x)$.)

(iii) Ukážte, že ak pre $A, B \in \mathcal{L}(X)$ platí $[A, [A, B]] = 0$, potom platí $r([A, B]) = 0$. (Návod: Pre $C \in \mathcal{L}(X)$ položme $\triangle C = AC - CA$, takže $[A, B] = \triangle B$. S využitím identít $\triangle(BC) = \triangle B \cdot C + B \cdot \triangle C$ a $\triangle^2 B = 0$ dokážte identitu $\triangle^n B^n = n!(\triangle B)^n$ a tú použite na odhad $\|(\triangle B)^n\|^{1/n}$.)

$\boxed{30}$ Nech $A \in \mathcal{L}(X)$. Položme

$$\sigma_{\text{appr}}(A) = \{\lambda\,;\ (\exists x_n \in X)\ \|x_n\| = 1,\ \|(\lambda - A)x_n\| \to 0\}$$

(aproximatívne bodové spektrum). Dokážte, že platí:

(i) $\sigma_{\text{p}}(A) \cup \sigma_{\text{c}}(A) \subset \sigma_{\text{appr}}(A)$

(ii) $\sigma_{\text{appr}}(A)$ je uzavretá množina

(iii) $\partial\sigma(A) \subset \sigma_{\text{appr}}(A)$

Nech $A \in \mathcal{L}(X)$, $\mathcal{U}$ je okolie $\sigma(A)$ v $\mathbb{C}$ a $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ je analytická funkcia. Potom môžeme definovať zobrazenie

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R(\lambda, A)\, d\lambda,$$

kde Γ je ľubovoľný konečný systém Jordanovych kriviek konečnej dĺžky s vlastnosťou $\operatorname{ind}_\Gamma \lambda = 1$ pre $\lambda \in \sigma(A)$, $\operatorname{ind}_\Gamma \lambda = 0$ pre $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{U}$. Potom platí

- $f(A) \in \mathcal{L}(X)$
- $f \mapsto f(A)$ je lineárne zobrazenie
- $(fg)(A) = f(A)g(A)$
- $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$ na okolí $\sigma(A)$ $\Rightarrow$ $f(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n$ (v $\mathcal{L}(X)$)

- $f_n \to f$ rovnomerne na okolí $\sigma(A) \quad \Rightarrow \quad f_n(A) \to f(A)$ v $\mathcal{L}(X)$
- $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$
- $f(A') = \big(f(A)\big)'$
- ak $A, B \in \mathcal{L}(X)$ komutujú, f je analytická v ε-okolí $\sigma(A)$ a $|\lambda| < \varepsilon$ pre každé $\lambda \in \sigma(B)$, potom je f analytická v okolí $\sigma(A+B)$ a platí $f(A+B) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(A)B^n}{n!}$.

Podobne sa dá definovať zobrazenie $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ aj pre neohraničené (t.j. nespojité) uzavreté zobrazenie A s neprázdnym $\varrho(A)$, ak je f analytická na okolí $\sigma(A)$ a v nekonečne. Tu platí

$$f(A) = f(\infty)\, I + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(\lambda) R(\lambda, A)\, d\lambda.$$

$\boxed{31}$ Dokážte prvých 7 tvrdení o zobrazeniach $f(A)$. V prípade dôkazu $(fg)(A) = f(A)g(A)$ postupujte podobne ako v dôkaze $P^2 = P$ pre spektrálnu projekciu.

$\boxed{32}$ Nech $A \in \mathcal{L}(X)$ je kvázinilpotentné zobrazenie (t.j. $r(A) = 0$) a nech existuje funkcia $f \not\equiv 0$ analytická v okolí nuly tak, že $f(A) = 0$. Potom je A nilpotentné, t.j. $A^n = 0$ pre vhodné n. Dokážte.

Riešenie: Pre vhodné n platí $f(\lambda) = \lambda^n g(\lambda)$, kde $g(0) \neq 0$. Potom $A^n = (fg^{-1})(A) = f(A)g^{-1}(A) = 0$.

$\boxed{33}$ Nech $A \in \mathcal{L}(X)$ a nech $P(A) = 0$ pre polynóm P stupňa n. Ukážte, že potom má množina $\sigma(A)$ nanajvýš n prvkov.

3. SPEKTRUM A KOMPAKTNOSŤ

Nech je $A \in \mathcal{K}(X)$. Potom pre ľubovoľné $\lambda \neq 0$ je $\mathcal{R}(\lambda - A)$ uzavretý a platí tzv. Fredholmova alternatíva: *buď* $\mathcal{R}(\lambda - A) = X$ *alebo* (vo vylučovacom zmysle) $\mathcal{N}(\lambda - A) \neq \{0\}$. Odtiaľ (na základe vety o otvorenom zobrazení) plynie, že každé $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$, je vlastným číslom zobrazenia A. Naviac sa dá ukázať, že *každé nenulové $\lambda \in \sigma(A)$ je izolovaným bodom spektra*, takže $\sigma(A)$ je nanajvýš spočítateľná množina.

$\boxed{34}$ Nech $A \in \mathcal{K}(X)$, $0 \neq \lambda_o \in \sigma(A)$ a nech $P = P(\lambda_o)$ je projekcia príslušná spektrálnej množine $\{\lambda_o\}$. Ukážte, že platí $\dim \mathcal{R}(P) < \infty$, takže λ_o je pól rezolventy a vlastné číslo konečnej algebraickej násobnosti a platia tiež tvrdenia cvičenia 20. (Návod:

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda, A)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Big(R(\lambda, A) - \frac{1}{\lambda}\Big)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda} AR(\lambda, A)\, d\lambda \in \mathcal{K}(X),$$

pretože $AR(\lambda, A) \in \mathcal{K}(X)$.)

$\boxed{35}$ Nech $X = \ell^2$, $A(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$. Ukážte, že $A \in \mathcal{K}(X)$, $\sigma(A) = \{0\}$ a 0 nie je vlastným číslom zobrazenia A. Porovnajte tento výsledok s cvičením 14.

$\boxed{36}$ Nech $q \in \mathcal{C}([0,1])$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Ukážte, že platí: buď má úloha

$$\begin{aligned} -u'' + \lambda q u &= f \qquad \text{v } (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

pre každé $f \in \mathcal{C}([0,1])$ jednoznačné riešenie $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ alebo má homogénna úloha

$$\begin{aligned} -u'' + \lambda q u &= 0 \qquad \text{v } (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

netriviálne riešenie. Čo sa dá povedať o množine tých $\lambda \in \mathbf{C}$, pre ktoré nastáva druhá možnosť ? (Návod: Reformulujte úlohu ako integrálnu rovnicu.)

$\boxed{37}$ Nech $A \in \mathcal{L}(X)$ a nech $P(A) \in \mathcal{K}(X)$ pre vhodný polynóm P. Potom je $\sigma(A)$ spočítateľná množina s konečným počtom hromadných bodov. Dokážte.

Ak je X H-priestor a zobrazenie $A \in \mathcal{K}(X)$ je samoadjungované, potom sú všetky jeho vlastné čísla reálne, ich algebraická násobnosť sa rovná geometrickej a vlastné vektory príslušné rôznym vlastným vektorom sú navzájom kolmé (viď tiež nasledujúci §). Naviac v X existuje ortonormálna báza $\{e_\alpha\}$ tvorená vlastnými vektormi zobrazenia A, pričom A sa dá napísať v tvare $Ax = \sum \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$, kde e_k sú vlastné vektory (a prvky spomínanej bázy) prislúchajúce nenulovým vlastným číslam λ_k a pre vlastné čísla λ_k platí $\lambda_k \to 0$ (pokiaľ ich nie je len konečne veľa).

Idea dôkazu existencie spomínanej bázy: Pre každé $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$ zvolíme ortonormálnu bázu konečnorozmerného priestoru $\mathcal{N}(\lambda - A)$; zjednotením týchto báz dostaneme ortonormálny zoznam $E = \{e_k\}$. Ak položíme $Y = E^\perp$, potom je $A/_Y$ samoadjungované, $\|A/_Y\| = r(A/_Y) = 0$.

$\boxed{38}$ Nech je X H-priestor a nech je zobrazenie $A \in \mathcal{K}(X)$ samoadjungované. Usporiadajme jeho vlastné čísla $\{\lambda_k\}$ podľa veľkosti ich absolútnych hodnôt: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ (každé vlastné číslo je v tejto postupnosti zapísané toľkokrát, koľko je jeho násobnosť). Dokážte, že potom platí

$$|\lambda_k| = \max\bigl\{|\langle Ax, x\rangle|\,;\ \|x\| \leq 1,\ x \perp \{e_1, \dots, e_{k-1}\}\bigr\}.$$

(Návod: $|\lambda_1| = r(A) = \|A\| = \max\{|\langle Ax, x\rangle|\,;\ \|x\| \leq 1\}$. Ďalej uvažujte $A_1 = A/_{\{e_1\}^\perp}$ atď.) Takisto platí

$$|\lambda_k| = \inf_M \sup\{|\langle Ax, x\rangle|\,;\ \|x\| = 1,\ x \perp M\}$$

(kde M sú podpriestory X dimenzie $k-1$). Využite túto variačnú charakterizáciu vlastných čísel na dôkaz nerovnosti $\lambda_k(A_1) \leq \lambda_k(A_2)$, kde $A_i \in \mathcal{K}(X)$ sú samoadjungované a nezáporné, $A_1 \leq A_2$ (t.j. $A_2 - A_1 \geq 0$) a $\lambda_k(A_i)$ je k-te vlastné číslo zobrazenia A_i $(i = 1, 2)$.

$\boxed{39}$ Nech $X = L^2((0,1))$, $(Af)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy$, kde $K(x,y) = \cos 2\pi(x-y)$ resp. $K(x,y) = \min(x,y)$ resp. $K(x,y) = e^{-|x-y|}$. Podľa cvičení v predošlých kapitolách je $A \in \mathcal{K}(X)$ samoadjungované. Nájdite vlastné čísla a funkcie zobrazenia A. (Výsledok: Pre $K(x,y) = \cos 2\pi(x-y)$ je $\sigma(A) = \{1/2, 0\}$, $\mathcal{N}(1/2 - A) = \{c_1 e^{2\pi i x} + c_2 e^{-2\pi i x}\}$. Pre $K(x,y) = \min(x,y)$ je $\sigma(A) = \{((n+\frac{1}{2})\pi)^{-2}\,;\ n \text{ celé}\}$ a príslušné vlastné funkcie majú tvar $\varphi_n(x) = \sin \pi(n+\frac{1}{2})x$; ide o riešenie diferenciálnej rovnice $\lambda\varphi'' + \varphi = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(1) = 0$. Pre $K(x,y) = e^{-|x-y|}$ platí $\sigma(A) = \left\{\dfrac{2}{1+k_n^2}\right\}_n$ a príslušné vlastné funkcie majú tvar $\varphi_n(x) = \sin(k_n x) + k_n \cos(k_n x)$, kde k_n sú kladné korene rovnice $2 \operatorname{cotg} k = k - 1/k$; funkcie φ_n sú riešeniami diferenciálnej rovnice $\varphi'' = (1 - 2\lambda)\varphi$, $\varphi'(0) = \varphi(0)$, $\varphi'(1) = -\varphi(1)$.)

$\boxed{40}$ Nech je X separabilný H-priestor, $A \in \mathcal{K}(X)$ samoadjungované, nech $\{e_k\}$ je ortonormálna báza X tvorená vlastnými vektormi zobrazenia A s vlastnými číslami λ_k. Nech $\lambda \in \varrho(A)$. Ukážte, že riešenie x rovnice $\lambda x - Ax = y$ možno vyjadriť v tvare $x = \sum \dfrac{\langle y, e_k\rangle}{\lambda - \lambda_k} e_k$, takže $R(\lambda, A)x = \sum \dfrac{1}{\lambda - \lambda_k} P_k x$, kde P_k je spektrálna projekcia príslušná λ_k.

$\boxed{41}$ Nech je X separabilný H-priestor a $A \in \mathcal{K}(X)$. Ukážte, že existujú ortonormálne bázy $\{e_k\}$, $\{f_k\}$ v X a postupnosť nezáporných čísel $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k \to 0$, tak, že $Ax = \sum \lambda_k \langle x, e_k\rangle f_k$. (Návod: Ukážte, že zobrazenie $|A|$ je kompaktné (a samoadjungované), takže $|A|x = \sum \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$. Ďalej $A = U|A|$, kde $U/_{\overline{\mathcal{R}(|A|)}}$ je izometria, $\langle Ue_i, Ue_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$ pre nenulové λ_i, λ_j.)

$\boxed{42}$ Povieme, že uzavreté zobrazenie A má **kompaktnú rezolventu**, ak existuje $\lambda_o \in \varrho(A)$ tak, že $R(\lambda_o, A) \in \mathcal{K}(X)$. Ukážte, že pre zobrazenie A s kompaktnou rezolventou platí

(i) $R(\lambda, A) \in \mathcal{K}(X)$ pre každé $\lambda \in \varrho(A)$
(Návod: $R(\lambda, A) = R(\lambda_o, A) + (\lambda_o - \lambda)R(\lambda, A)R(\lambda_o, A)$)

(ii) každé $\lambda \in \sigma(A)$ je izolovaný bod spektra, pól rezolventy a vlastné číslo konečnej násobnosti (Návod: Ukážte $\lambda \in \sigma(A) \iff \dfrac{1}{\lambda_o - \lambda} \in \sigma(R(\lambda_o, A))$, takže $\sigma(A)$ je izolovaná množina. Ďalej ukážte, že pre každé $\lambda \in \sigma(A)$ je príslušná spektrálna projekcia kompaktná.)

(iii) ak je A samoadjungované, potom preň platia analogické tvrdenia ako pre kompaktné samoadjungované zobrazenia (existencia ortonormálnej bázy vlastných vektorov, ...).

$\boxed{43}$ Nech je Ω ohraničená oblasť v $\mathbb{R}^n$ s hladkou hranicou, $X = L^2(\Omega)$, $Au = -\triangle u$ pre $u \in \mathcal{D}(A) = \{u \in W^{2,2}(\Omega)\,;\, u = 0 \ \text{ na } \partial\Omega\}$. Ukážte, že zobrazenie A má kompaktnú rezolventu. (Návod: Platí

$$\|u\| \cdot \|A^{-1}u\| \geq \langle u, A^{-1}u\rangle = \int_\Omega |\nabla(A^{-1}u)|^2\, dx \geq c\|A^{-1}u\|^2_{W^{1,2}},$$

takže $\|A^{-1}u\|_{W^{1,2}} \leq C\|u\|$. Odtiaľ s použitím kompaktnosti vnorenia $W^{1,2} \hookrightarrow L^2$ plynie kompaktnosť A^{-1}.)

Pretože A je tiež samoadjungované a kladné, je jeho spektrum tvorené postupnosťou kladných vlastných čísel $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, pričom $\lambda_k \to \infty$ a dá sa tiež ukázať $\lambda_1 < \lambda_2$.

$\boxed{44}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, $A\varphi = -\triangle\varphi + V\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, kde $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ je lokálne integrovateľná a $V(x) \to \infty$ pre $|x| \to \infty$. Zobrazenie A je symetrické a zdola ohraničené, takže existuje jeho Friedrichsove rozšírenie $\hat{A}$. Ukážte, že toto zobrazenie má kompaktnú rezolventu. (Návod: Môžeme predpokladať $V \geq 1$. Ukážte, že pre $\psi = \hat{A}^{-1}\varphi$, kde $\varphi \in \mathcal{D}(\hat{A})$, $\|\varphi\| \leq 1$, platí $\int |\nabla\psi|^2 + \int V|\psi|^2 \leq 1$ a použite Rellichove kritérium kompaktnosti v $L^2(\mathbb{R}^n)$.)

Ak ďalej zvolíme $\tilde{V} \in L^{n/2}(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$, potom sa dá ukázať, že forma $\beta(\varphi, \psi) = \int V\varphi\overline{\psi}$ a zobrazenie $\hat{A}$ splňujú predpoklady KLMN vety, takže môžeme definovať samoadjungované zobrazenie $\tilde{A}$, pre ktoré formálne platí $\tilde{A}\varphi = -\triangle\varphi + V\varphi + \tilde{V}\varphi$. Ukážte, že tiež zobrazenie $\tilde{A}$ má kompaktnú rezolventu.

$\boxed{45}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R})$ a $\hat{A}$ je Friedrichsove rozšírenie zobrazenia $A\varphi = -\varphi'' + V\varphi$, kde $V(x) = x^2$ a $\mathcal{D}(A) = \mathcal{S}$. Podľa predošlých cvičení tvoria vlastné čísla zobrazenia $\hat{A}$ postupnosť $\lambda_k \to +\infty$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ a príslušné vlastné funkcie e_k tvoria ortonormálnu bázu v priestore X. Ukážte, že $\lambda_k = 2k + 1$ a (až na násobok) $e_k = B^k e_o$, kde $e_o(x) = e^{-x^2/2}$ a $(B\varphi)(x) = -\varphi'(x) + x\varphi(x)$. (Návod: Ukážte $Ae_o = \lambda_o e_o$, $A(B\varphi) = (\lambda + 2)B\varphi$ pre $\varphi \in \mathcal{S}$, $A\varphi = \lambda\varphi$, odkiaľ plynie, že λ_k, e_k sú vlastné čísla a vlastné funkcie zobrazenia $\hat{A}$. Ďalej ukážte, že $\{e_k\}$ generuje hustý podpriestor v X.)

4. PODSTATNÉ SPEKTRUM

Nech je A uzavreté zobrazenie s hustým definičným oborom. Povieme, že $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ (**podstatné spektrum**), ak je buď λ hromadný bod $\sigma(A)$ alebo je λ vlastné číslo nekonečnej algebraickej násobnosti alebo priestor $\mathcal{R}(\lambda - A)$ nie je uzavretý (v prípade samoadjungovaného zobrazenia v H-priestore je posledná možnosť zahrnutá v predošlých). Potom $\lambda \in \sigma(A) \backslash \sigma_{\text{ess}}(A)$ práve vtedy, keď je λ pól rezolventy a zároveň vlastné číslo konečnej (algebraickej) násobnosti. Odtiaľ plynie, že pre každé $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(A)$ je zobrazenie $\lambda - A$ fredholmovské (t.j. $\mathcal{R}(\lambda - A)$ je uzavretý, $\dim \mathcal{N}(\lambda - A) < \infty$, $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\lambda - A) < \infty$) a $\dim \mathcal{N}(\lambda - A) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\lambda - A)$ (viď cvičenie 20).

Definujme ďalej

$$
\begin{aligned}
\sigma^1_{\text{ess}}(A) = &\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \mathcal{R}(\lambda - A) \text{ nie je uzavretý alebo} \\
&\qquad \dim \mathcal{N}(\lambda - A) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\lambda - A) = \infty\} \\
\sigma^2_{\text{ess}}(A) = &\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \lambda - A \text{ nie je fredholmovské}\} \\
\sigma^3_{\text{ess}}(A) = &\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \lambda \in \sigma^2_{\text{ess}}(A) \text{ alebo } \dim \mathcal{N}(\lambda - A) \neq \operatorname{codim} \mathcal{R}(\lambda - A)\}
\end{aligned}
$$

Zrejme $\sigma^1_{\text{ess}}(A) \subset \sigma^2_{\text{ess}}(A) \subset \sigma^3_{\text{ess}}(A) \subset \sigma_{\text{ess}}(A)$, pričom ide o uzavreté množiny. Ak je A samoadjungované zobrazenie v H-priestore, potom platí $\sigma^i_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(A)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Podstatné spektrum je invariantné voči kompaktným poruchám; presnejšie pre ľubovoľné uzavreté zobrazenia A, B platí: *ak B je A-kompaktné, potom $\sigma^i_{ess}(A + B) = \sigma^i_{ess}(A)$ pre $i = 1, 2, 3$.*

Ak pre $A \in \mathcal{L}(X)$ položíme $r_{\text{ess}}(A) = \sup\{|\lambda|\,;\, \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A) \cup \{0\}\}$ (analogicky $r^i_{\text{ess}}(A)$) a $\|A\|_{\text{ess}} = \inf\{\|A + K\|\,;\, K \in \mathcal{K}(X)\}$, potom pre $i = 1, 2, 3$ platí $r^i_{\text{ess}}(A) = r_{\text{ess}}(A) = \lim_{n\to\infty} (\|A^n\|_{\text{ess}})^{1/n}$.

$\boxed{46}$ Nech $\dim X = \infty$. Dokážte, že

- pre $A \in \mathcal{L}(X)$ platí $\sigma_{\text{ess}}(A) \neq \emptyset$
- pre $A \in \mathcal{K}(X)$ platí $\sigma_{\text{ess}}(A) = \{0\}$

- pre A s kompaktnou rezolventou platí $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)=\emptyset$

$\boxed{47}$ Nech $X=L^2(\mathbb{R}^3)$, $H\varphi=-\triangle\varphi+V\varphi$ pre $\varphi\in\mathcal{D}(H)=W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$, kde $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $V\in L^2+L^\infty$, $V(x)\to 0$ pre $|x|\to\infty$. Ukážte, že $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)=[0,+\infty)$. (Návod: H je A-kompaktnou perturbáciou operátora $A=-\triangle$.) Ukážte tiež, že predpoklad $V(x)\to 0$ pre $|x|\to\infty$ je podstatný. (Návod: Voľte $V\equiv 1$.)

$\boxed{48}$ Nech je $\lambda\in\partial\sigma(A)$ hromadný bod $\sigma(A)$. Potom platí $\lambda\in\sigma^1_{\mathrm{ess}}(A)$. Dokážte.

$\boxed{49}$ Nech je λ izolovaný bod spektra, $\lambda\in\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. Potom $\lambda\in\sigma^1_{\mathrm{ess}}(A)$. Dokážte.

$\boxed{50}$ Ukážte, že $\sigma^3_{\mathrm{ess}}(A)=\bigcap\{\sigma(A+K)\,;\,K\in\mathcal{K}(X)\}$.

$\boxed{51}$ Nech $X=\ell^2\times\ell^2$, $A:X\to X:(x,y)\mapsto\big((x_2,x_3,\ldots),(0,y_1,y_2,\ldots)\big)$, $K:X\to X:(x,y)\mapsto\big((0,0,0,\ldots),(x_1,0,0,\ldots)\big)$. Potom je $\sigma^i_{\mathrm{ess}}(A)=\sigma^i_{\mathrm{ess}}(A+K)=\sigma_{\mathrm{ess}}(A+K)=\{\lambda\,;\,|\lambda|=1\}$ pre $i=1,2,3$, ale $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)=\{\lambda\,;\,|\lambda|\le 1\}$. Dokážte.

5. SPEKTRÁLNY ROZKLAD SAMOADJUNGOVANÝCH ZOBRAZENÍ

V tomto § budeme predpokladať, že A je samoadjungované zobrazenie v H-priestore X. Za tohto predpokladu platí $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$, $\sigma_{\mathrm{r}}(A)=\emptyset$ a vlastné vektory príslušné rôznym vlastným číslam sú navzájom kolmé.

Dôkaz: Pre $x\in\mathcal{D}(A)$ platí

$$\begin{aligned}\|(\lambda-A)x\|^2 =&\langle\lambda x-Ax,\lambda x-Ax\rangle=\ldots=\|(\operatorname{Re}\lambda-A)x\|^2+|\operatorname{Im}\lambda|^2\|x\|^2\\ \ge&|\operatorname{Im}\lambda|^2\|x\|^2\ ,\end{aligned}$$

odkiaľ plynie $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$. Z cvičenia 9 ďalej vyplýva $\sigma_{\mathrm{r}}(A)\subset\sigma_{\mathrm{p}}(A^*)=\sigma_{\mathrm{p}}(A)$, takže $\sigma_{\mathrm{r}}(A)=\emptyset$. Ak sú λ_1,λ_2 dve rôzne vlastné čísla A a x_1,x_2 sú príslušné vlastné vektory, potom

$$\lambda_1\langle x_1,x_2\rangle=\langle\lambda_1x_1,x_2\rangle=\langle Ax_1,x_2\rangle=\langle x_1,Ax_2\rangle=\langle x_1,\lambda_2x_2\rangle=\lambda_2\langle x_1,x_2\rangle\ ,$$

takže $\langle x_1,x_2\rangle=0$.

Rieszov index všetkých vlastných čísel je 1 (t.j. algebraická násobnosť = geometrická násobnosť). Ak je λ_o izolovaný bod $\sigma(A)$, potom $\lambda_o\in\sigma_{\mathrm{p}}(A)$. Ďalej platí $\inf\sigma(A)=\inf\{\langle Ax,x\rangle\,;\,x\in\mathcal{D}(A),\ \|x\|=1\}$, podobne pre supremum.

Ak je zobrazenie A naviac zdola ohraničené a položíme

$$\lambda_k = \sup \inf \{\langle Ax, x\rangle \,;\, x \in \mathcal{D}(A),\ \|x\| = 1,\ x \perp \{y_1, \ldots, y_{k-1}\}\},$$

kde supremum berieme cez všetky možné $y_1, \ldots, y_{k-1} \in X$, potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí práve jedno z nasledujúcich dvoch tvrdení

- existuje n vlastných čísel $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n < \inf \sigma_{\text{ess}}(A)$
- $\inf \sigma_{\text{ess}}(A) = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \ldots$ a existuje maximálne $(n-1)$ vlastných čísel A menších než λ_n.

$\boxed{52}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R}^3)$, $H\varphi = -\triangle\varphi + V\varphi$ pre $\varphi \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$, kde $V(x) = -1/|x|$. Ukážte, že existuje nekonečne veľa vlastných čísel H menších než 0. (Návod: Podľa príkladu 47 je $\sigma_{\text{ess}}(H) = [0, \infty)$, takže vzhľadom k vyššie uvedenému tvrdeniu stačí dokázať, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ existujú $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X$ lineárne nezávislé tak, že $\langle Hf, f\rangle < 0$ pre ľubovoľné nenulové f z lineárneho obalu funkcií $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Zvoľme $\varphi \in X$ s nosičom v množine $\{x\,;\, 1 < |x| < 2\}$, $\varphi \not\equiv 0$, a položme $\varphi_R(x) = \varphi(x/R)$. Ukážte, že $\langle H\varphi_R, \varphi_R\rangle \leq R\int |\nabla\varphi|^2 - (R^2/2)\int |\varphi|^2 < 0$ pre $R > R_o$ a zvoľte $f_i = \varphi_{R_i}$, kde $R_i = 2^i R_o$.)

V ďalšom vyslovíme tvrdenie, podľa ktorého možno každej borelovskej množine v $\mathbb{R}$ priradiť istú spektrálnu projekciu, pričom v prípade spektrálnej množiny zobrazenia A pôjde o spektrálnu projekciu zavedenú v prvom § tejto kapitoly. Označme si preto písmenom $\mathcal{B}$ systém všetkých borelovských množín v $\mathbb{R}$ (viď dodatok II).

Ortogonálna projekcia v X je zobrazenie $P \in \mathcal{L}(X)$ s vlastnosťami $P^2 = P$, $P(X) \perp (I - P)(X)$. **Rozkladom jednotky** nazývame systém ortogonálnych projekcií $(P(\Omega))_{\Omega \in \mathcal{B}}$ v X s vlastnosťami

(i) $P(\emptyset) = 0,\ P(\mathbb{R}) = I$

(ii) $P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\Omega_1)P(\Omega_2)$

(iii) $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ (disj. zjednotenie) $\ \Rightarrow\ P(\Omega)x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(\Omega_n)x \ \ \forall x \in X.$

Medzi samoadjungovanými zobrazeniami v X a rozkladmi jednotky existuje vzájomne jednoznačný vzťah:

Ak je $(P(\Omega))_{\Omega \in \mathcal{B}}$ *rozklad jednotky a* $x \in X$, *označme* $\mu_x(\Omega) = \langle P(\Omega)x, x\rangle$ (μ_x je tzv. spektrálna miera). *Potom existuje jediné samoadjungované zobrazenie* A *s vlastnosťou* $\langle Ax, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_x(\lambda)$ *pre každé* $x \in \mathcal{D}(A) =$

$\{x \in X\,;\, \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\mu_x < \infty\}$. Symbolicky píšeme $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dP_\lambda$ (kde $P_\lambda = P((-\infty, \lambda]))$.

Pre ľubovoľné samoadjungované zobrazenie A zase existuje jediný rozklad jednotky $(P(\Omega))_{\Omega\in\mathcal{B}}$, pre ktorý $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dP_\lambda$. Pre $\Omega = (a, b]$ je pritom projekcia $P(\Omega)$ daná vzorcom

$$P(\Omega)x = \lim_{\delta\to 0+} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b+\delta} (R(s - i\varepsilon, A) - R(s + i\varepsilon, A))x\, ds.$$

Spojitým samoadjungovaným zobrazeniam zodpovedajú ohraničené rozklady jednotky (t.j. rozklady, pre ktoré existuje ohraničená $\Omega \in \mathcal{B}$ s vlastnosťou $P(\Omega) = I$).

Spektrum $\sigma(A)$ sa dá charakterizovať pomocou spektrálnych projekcií $P(\Omega)$ nasledujúcim spôsobom:

- $\lambda \in \sigma(A) \iff P((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) \neq 0$ pre každé $\varepsilon > 0$
- $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \iff P(\{\lambda\}) \neq 0$. Potom $\mathcal{N}(\lambda - A) = \mathcal{R}(P(\{\lambda\}))$.
- $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A) \iff \dim \mathcal{R}(P((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon))) = \infty$ pre každé $\varepsilon > 0$

Pomocou uvedeného priradenia sa dá tiež definovať pre borelovskú funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uzavreté zobrazenie $f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dP_\lambda$ s hustým definičným oborom $\mathcal{D}(f(A)) = \{x \in X\,;\, \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu_x < \infty\}$. Zobrazenie $f(A)$ závisí len od reštrikcie f na množinu $\sigma(A)$ a má nasledujúce vlastnosti:

- f je reálna $\Rightarrow$ $f(A)$ je samoadjungované
- $f \geq 0$ $\Rightarrow$ $f(A)$ je nezáporné
- f je ohraničená $\Rightarrow$ $f(A) \in \mathcal{L}(X)$
- $f \neq 0$ $\Rightarrow$ $f(A)$ je prosté, $f(A)^{-1} = \dfrac{1}{f}(A)$
- $f(A) + g(A) \subset (f + g)(A)$
- $f(A)g(A) \subset (fg)(A)$, $\mathcal{D}(f(A)g(A)) = \mathcal{D}(fg(A)) \cap \mathcal{D}(g(A))$
- $f(A)^* = \overline{f}(A)$
- $\mathcal{R}(P(\Omega))$ je $f(A)$-invariantný pre každú $\Omega \in \mathcal{B}$
- $\sigma(f(A)) = \bigcap \overline{f(\Omega)}$, kde prienik sa berie cez všetky $\Omega \subset \sigma(A)$ s vlastnosťou $P(\Omega) = I$. Ak je f spojitá, potom $\sigma(f(A)) = \overline{f(\sigma(A))}$. Ak

naviac $A \in \mathcal{L}(X)$, potom $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

- $Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad f(A)x = f(\lambda)x$
- $\alpha \in \varrho(A) \quad \Rightarrow \quad R(\alpha, A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{1}{\alpha - \lambda}\, dP_\lambda$
- f_n, f sú rovnako ohraničené, $f_n \to f$ (bodove) $\quad \Rightarrow \quad f_n(A)x \to f(A)x$
- ak je f spojitá, potom pre $\Omega = (a, b]$ platí

$$f(A)P(\Omega)x = \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a+\delta}^{b+\delta} f(s)(R(s - i\varepsilon, A) - R(s + i\varepsilon, A))x\, ds$$

Pomocou spektrálnych mier sa dá tiež dokázať nasledujúce tvrdenie (tzv. spektrálna veta v tvare operátora násobenia): *Nech je X separabilný H-priestor a A samoadjungované zobrazenie v X. Potom existuje priestor M s konečnou mierou μ, merateľná funkcia $F : M \to \mathbb{R}$ a unitárne zobrazenie $U : X \to L^2(M)$ tak, že $UAU^{-1}f = F \cdot f$ pre každé $f \in U(\mathcal{D}(A))$.* Ak je $A \in \mathcal{L}(X)$, potom $F \in L^\infty(M)$.

$\boxed{53}$ Ukážte, že $f(A)$ je normálne zobrazenie pre ľubovoľnú $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ borelovskú.

$\boxed{54}$ Ukážte, že pre $x, y \in \mathcal{D}(A)$ platí $\langle Ax, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\mu_{x,y}(\lambda)$, kde $\mu_{x,y}(\Omega) = \langle P(\Omega)x, y\rangle$. (Návod: Ak označíme $a(x) = \langle Ax, x\rangle$, potom platí $4\langle Ax, y\rangle = a(x+y) - a(x-y) + ia(x+iy) - ia(x-iy)$.)

$\boxed{55}$ Pre A nezáporné, $s \in \mathbb{R}^+$ môžeme definovať nezáporné zobrazenie A^s a pre A kladné môžeme definovať zobrazenie A^z pre ľubovoľné $z \in \mathbb{C}$ ($f(s) = \exp(z \log(s))$). Pritom platí $A^{z_1}A^{z_2} \subset A^{z_1+z_2}$. Dokážte.

$\boxed{56}$ Nech je A kladné, $\alpha \in (0, 1)$. Potom $A^{-\alpha} = \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi} \displaystyle\int\limits_0^\infty \lambda^{-\alpha}(A + \lambda)^{-1}\, d\lambda$.

(Návod: $\int\limits_0^\infty \lambda^{-\alpha}\, dP_\lambda = c \int\limits_0^\infty \lambda^{-\alpha} \int\limits_0^\infty \dfrac{z^{-\alpha}}{1+z}\, dz\, dP_\lambda = c \displaystyle\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{\mu^{-\alpha}}{\lambda + \mu}\, dP_\lambda\, d\mu = c \int\limits_0^\infty \mu^{-\alpha}(A + \mu)^{-1}\, d\mu$, kde $z = \mu/\lambda$, $c = \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi}$.)

$\boxed{57}$ Nech je A kladné, $A^{-1} \in \mathcal{K}(X)$, $\alpha \in (0, 1)$. Potom $A^{-\alpha} \in \mathcal{K}(X)$. Dokážte. (Návod: Použite predošlé cvičenie alebo postupujte takto: platí $\|A^{-\alpha}x\|^2 = \langle A^{-2\alpha}x, x\rangle =$

$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{-2\alpha}\, d\mu_x \le \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda^{-2}\, d\mu_x\right)^{\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}} 1\, d\mu_x\right)^{1-\alpha} = \|A^{-1}x\|^{2\alpha} \cdot \|x\|^{2-2\alpha}$. Ak je $\{x_n\}$ ohraničená postupnosť v X, potom pre vhodnú podpostupnosť je $\{A^{-1}x_{n_k}\}$ cauchyovská, a teda tiež $\{A^{-\alpha}x_{n_k}\}$ je cauchyovská.)

$\boxed{58}$ Ak $A \in \mathcal{K}(X)$ alebo má A kompaktnú rezolventu, potom $Ax = \sum_k \lambda_k P_k x$, kde λ_k sú vlastné čísla A a P_k je spektrálna projekcia príslušná množine $\{\lambda_k\}$. Ďalej $f(A)x = \sum_k f(\lambda_k) P_k x$.

$\boxed{59}$ Ukážte, že množina analytických vektorov zobrazenia A je hustá v X. (Návod: Pre $x \in X$ uvažujte prvky $x_n = f_n(A)x$, kde $f_n = \chi_{[-n,n]}$.)

$\boxed{60}$ Nech sú A, B samoadjungované zobrazenia. Povieme, že zobrazenia A, B **komutujú**, ak komutujú všetky ich spektrálne projekcie. Dokážte, že A, B komutujú práve vtedy, keď komutujú zobrazenia $R(\alpha, A)$ a $R(\beta, B)$ pre každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Poznámka: Ak je D hustý podpriestor X, pre zobrazenia $A : D \to D$, $B : D \to D$ platí $AB\varphi = BA\varphi$ pre každé $\varphi \in D$ a zobrazenia $\overline{A}$, $\overline{B}$ sú samoadjungované, potom sa ešte môže stať, že zobrazenia $\overline{A}, \overline{B}$ nekomutujú v zmysle vyššie uvedenej definície (viď [RS,VIII.5]).

$\boxed{61}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R})$, $A\varphi = i\varphi'$ pre $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R})$. Nech $f_1(t) = \dfrac{\sin at}{ia}$, $f_2(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}$ $(a > 0)$. Pomocou Fourierovej transformácie ukážte, že platí

$$f_1(A) : \varphi \mapsto \frac{\varphi(\cdot + a) - \varphi(\cdot - a)}{2a}, \qquad f_2(A) : \varphi \mapsto \frac{1}{2a} \int_{\mathbb{R}} e^{-a|\cdot - y|} \varphi(y)\, dy.$$

$\boxed{62}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R}^+)$, $(Af)(x) = \int_0^\infty \dfrac{f(y)}{x+y}\, dy$. Ukážte, že $\sigma(A) = [0, \pi]$ a A je ekvivalentný operátoru násobenia funkciou $F(\xi) = \dfrac{\pi}{\cosh(\pi\xi)}$ v $L^2(\mathbb{R})$. (Návod: Zámenou premenných $x = e^t$, $y = e^s$, $f(x) = e^{-t/2}\varphi(t)$ získa A tvar $\tilde{A} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) : \varphi \mapsto G*\varphi$, kde $G(t) = \dfrac{1}{2\cosh(t/2)}$. Ďalej použite Fourierovu transformáciu.)

$\boxed{63}$ Nech je $A \in \mathcal{L}(X)$ samoadjungované a nech existuje $w \in X$ tak, že množina $\{P(A)w\,;\, P \text{ je polynóm}\}$ je hustá v X. Prvok w sa potom nazýva **cyklický vektor** zobrazenia A a o zobrazení A hovoríme, že má **jednoduché spektrum**. Ukážte, že takéto zobrazenie je unitárne ekvivalentné s operátorom $\tilde{A} : L^2(\sigma(A), \mu_w) \to L^2(\sigma(A), \mu_w) : f \mapsto Ff$, kde $F(\lambda) = \lambda$. (Návod: Položte $U(P(A)w) = P$, ukážte korektnosť tejto definície a potom rozšírte U na celé X.)

Ukážte ďalej, že v nasledujúcich príkladoch je w cyklický vektor zobrazenia A:

- $\dim X = n < \infty$, A má n jednoduchých vlastných čísel so zodpovedajúcimi vlastnými vektormi $e_1, \ldots, e_n$; $w = \sum_{i=1}^{n} e_i$.
- $X = L^2((-1,1))$, $(Af)(x) = xf(x)$, $w(x) \equiv 1$.
- $X = L^2((0,1))$, $(Af)(x) = x^2 f(x)$, $w(x) \equiv 1$.

Ďalej ukážte, že zobrazenie $(Af)(x) = x^2 f(x)$ v priestore $L^2((-1,1))$ nemá jednoduché spektrum. (Návod: Pre $u(x) = w(-x) \operatorname{sign} x$ je $u \perp \{P(A)w\}$.)

Nakoniec uvažujte neohraničený operátor $(Af)(x) = xf(x)$ v $L^2(\mathbb{R})$, položte $w(x) = e^{-x}$ a ukážte, že množina $\{P(A)w\}_P$ je hustá v $L^2(\mathbb{R})$.

Nech je ďalej μ Lebesgueova miera v $\mathbb{R}$, nech je A samoadjungované zobrazenie v X, $x \in X$ a nech je μ_x príslušná spektrálna miera. Ak sú miery μ_x, μ navzájom singulárne (viď § DII.5) a funkcia $\varphi_x(t) = \mu_x((-\infty, t))$ je spojitá, povieme, že miera μ_x je singulárna a spojitá voči Lebesgueovej miere. Miera μ_x sa nazýva bodová, ak existuje spočítateľná množina $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ tak, že $\mu_x = \sum \alpha_n \delta(x_n)$, kde $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$ a $\delta(x_n)$ je Diracova miera sústredená v bode x_o. Položme

$$X_{\mathrm{ac}} = \{x \in X\,;\ \mu_x \text{ je absolútne spojitá voči Lebesgueovej miere}\}$$

$$X_{\mathrm{s}} = \{x \in X\,;\ \mu_x \text{ je spojitá a singulárna voči Lebesgueovej miere}\}$$

$$X_{\mathrm{p}} = \{x \in X\,;\ \text{spektrálna miera } \mu_x \text{ je bodová}\}$$

Priestory $X_{\mathrm{p}}, X_{\mathrm{ac}}, X_{\mathrm{s}}$ sú A-invariantné a tvoria rozklad priestoru X. Ak označíme $\sigma_{\mathrm{ac}}(A) = \sigma(A/_{X_{\mathrm{ac}}})$ (absolútne spojité spektrum), $\sigma_{\mathrm{s}}(A) = \sigma(A/_{H_{\mathrm{s}}})$ (singulárne spektrum), potom platí $\sigma(A) = \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(A)} \cup \sigma_{\mathrm{ac}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{s}}(A)$, pričom nemusí ísť o disjunktné zjednotenie. Ďalej kladieme $\sigma_{\mathrm{d}}(A) = \sigma(A) \backslash \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ (diskrétne spektrum).

Vyšetrovanie singulárneho a absolútne spojitého spektra je dôležité napr. pre teóriu rozptylu. Pre tieto dve spektrá (bohužiaľ) neplatia také všeobecné perturbačné tvrdenia ako pre podstatné spektrum; možno však dokázať nasledujúce tvrdenie: *Nech sú A, K samoadjungované zobrazenia v separabilnom H-priestore X, nech $K \in \mathcal{K}(X)$ a nech pre jeho vlastné čísla λ_n platí $\sum_n |\lambda_n| < \infty$. Potom $\sigma_{ac}(A) = \sigma_{ac}(A+K)$ a reštrikcie zobrazení A a $A+K$ na príslušné priestory X_{ac} sú unitárne ekvivalentné.*

Jedným z kritérií pre určovanie uvedených spektier je tiež nasledujúce tvrdenie: *Nech* $-\infty < a < b < +\infty$ *a* $P = P((a,b))$ *je príslušná spektrálna projekcia. Nech* $x \in X$, $p > 1$ *a*

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \int_a^b |\operatorname{Im} \langle R(s+i\varepsilon, A)x, x\rangle|^p \, ds < \infty.$$

Potom $Px \in X_{ac}$.

Idea dôkazu: S použitím rovnosti $\langle R(s-i\varepsilon, A)x, x\rangle = \langle x, R(s+i\varepsilon, A)x\rangle$ a Hölderovej nerovnosti dostávame pre ľubovoľný interval $(c,d) \subset (a,b)$

$$\langle P((c,d))x, x\rangle \le \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_c^d |\operatorname{Im}\langle R(s+i\varepsilon, A)x, x\rangle| \, ds \le C|d-c|^{1/p'},$$

takže $\langle P(\Omega)x, x\rangle \le C\big(\mu(\Omega)\big)^{1/p'}$ pre každú $\Omega \in \mathcal{B}$, $\Omega \subset (a,b)$ (μ je Lebesgueova miera a p' je exponent duálny k p). Odtiaľ plynie absolútna spojitosť μ_x v (a,b).

$\boxed{64}$ Nech $X = L^2(\mathbb{R}^3)$, $A\varphi = -\triangle\varphi$ pre $\varphi \in W^{2,2}$. Ukážte, že $X = X_{\mathrm{ac}}$, takže $\sigma_{\mathrm{S}}(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) = \emptyset$. (Návod: V tomto jednoduchom prípade stačí použiť Fourierovu transformáciu a vyšetriť zodpovedajúci multiplikatívny operátor. Naznačme však dôkaz s využitím vyššie uvedeného tvrdenia, pretože podobný postup sa v spojení s perturbačnými metódami hodí aj pre obecnejšie Schrödingerove operátory. Stačí zrejme dokázať, že pre každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ a $-\infty < a < b < +\infty$ platí $P((a,b))\varphi \in X_{\mathrm{ac}}$. Platí

$$\big(R(\lambda, A)\varphi\big)(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\sqrt{-\lambda}|x-y|}}{4\pi|x-y|}\varphi(y)\, dy,$$

kde $\sqrt{-\lambda}$ je zvolená tak, aby $\operatorname{Im}\sqrt{-\lambda} > 0$. Na odhad $\langle R(\lambda, A)\varphi, \varphi\rangle$ teraz použite Sobolevovu nerovnosť: *pre* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda < n$, $1 < p, q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{\lambda}{n} = 2$, *platí* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)g(y)|}{|x-y|^\lambda}\, dx\, dy \le C\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.)

Poznámka: Rovnaké tvrdenie ($X = X_{\mathrm{ac}}$) platí aj pre zobrazenie $A = -\triangle + V$, kde potenciál V splňuje odhad $\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \dfrac{|V(x)V(y)|}{|x-y|^2}\, dx\, dy < (4\pi)^2$. Pre potenciál $V(x) = \pm\dfrac{e^{-\mu|x|}}{|x|}$, $\mu > 0$, zase platí $\sigma_{\mathrm{ac}}(A) = [0,\infty)$, $\sigma_{\mathrm{S}}(A) = \emptyset$, $\sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset (-\infty, 0]$ je konečná ($= \emptyset$ pre $\mu > 1$).

$\boxed{65}$ Nech $X = L^2(\mathrm{I\!R})$, $A\varphi = -\varphi'' + V\varphi$, kde $V : \mathrm{I\!R} \to \mathrm{I\!R}$ je 2π-periodická, po častiach spojitá, ohraničená funkcia, $\mathcal{D}(A) = W^{2,2}(\mathrm{I\!R})$. Nech sú $E_1^P \le E_2^P \le \ldots$ (resp. $E_1^A \le E_2^A \le \ldots$) vlastné čísla operátora A zúženého na podpriestor $\{f \in W^{2,2}(0,2\pi)\,;\, f(0) = f(2\pi)\}$ (resp. $\{f \in W^{2,2}(0,2\pi)\,;\, f(0) = -f(2\pi)\}$). Položme $\alpha_{2k-1} = E_{2k-1}^P$, $\alpha_{2k} = E_{2k}^A$, $\beta_{2k-1} = E_{2k-1}^A$, $\beta_{2k} = E_{2k}^P$. Potom platí $\alpha_n < \beta_n \le \alpha_{n+1}$, $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{ac}}(A) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$, $\sigma_{\mathrm{p}}(A) = \sigma_{\mathrm{s}}(A) = \emptyset$ (pričom tvrdenie o absolútnej spojitosti spektra možno dokázať aj pre periodické potenciály v $\mathrm{I\!R}^n$).

Predpokladajte len, že $V : \mathrm{I\!R} \to \mathrm{I\!R}$ je 2π-periodická, $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathrm{I\!R})$ a ukážte, že A je samoadjungovaný operátor s definičným oborom $W^{2,2}(\mathrm{I\!R})$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(A) = \emptyset$. (Návod: K dôkazu samoadjungovanosti použite Kato-Rellichovu vetu. Keby $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, potom pre $N = \mathcal{N}(\lambda - A)$ musí platiť $\dim N = \infty$, pretože $\varphi(\cdot + 2\pi) \in N$ pre každé $\varphi \in N$, avšak z teórie diferenciálnych rovníc plynie $\dim N \le 2$, čo vedie k sporu.)

V [RS] je spojité spektrum samoadjungovaného zobrazenia A definované ako zjednotenie $\sigma_{\mathrm{ac}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{s}}(A)$. Nasledujúce dva príklady ukazujú, že táto definícia je odlišná od našej.

$\boxed{66}$ Nech je $\{e_n\}$ ortonormálna báza v X, $Ae_n = \dfrac{1}{n} e_n$. Potom $X = X_p$, takže $\sigma_{\mathrm{ac}}(A) = \sigma_{\mathrm{s}}(A) = \emptyset$, ale $0 \in \sigma_{\mathrm{c}}(A)$. Dokážte.

$\boxed{67}$ Nech $X = L^2((0,1))$, $Af = \varphi \cdot f$, kde $\varphi(x) = x$ pre $x \le 1/2$, $\varphi(x) = 1/2$ pre $x \ge 1/2$. Potom $1/2 \in \sigma_{\mathrm{ac}}(A) \setminus \sigma_{\mathrm{c}}(A)$. Dokážte a určte tiež priestory $X_{\mathrm{p}}, X_{\mathrm{ac}}, X_{\mathrm{s}}$ a projekcie $P([0,\lambda))$.