C^o-SEMIGRUPY

Nech je X B-priestor a nech je A lineárne zobrazenie v priestore X. Ak je $x(t)$ $(t \geq 0)$ riešenie Cauchyovej úlohy $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_o$, a pre túto úlohu vieme dokázať existenciu a jednoznačnosť riešenia pre ľubovoľné $x_o \in \mathcal{D}(A)$, potom je zrejme $T(t) : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A) : x_o \mapsto x(t)$ lineárny operátor s nasledujúcou vlastnosťou: $T(t+s) = T(t)T(s)$. Ak pre uvedenú úlohu vieme dokázať tiež spojitú závislosť riešenia na počiatočnej podmienke x_o, potom je zrejme zobrazenie $T(t)$ spojité. Naviac funkcia $x = T(\cdot)x_o : [0, \infty) \to \mathcal{D}(A)$ je spojitá. Pomocou uvedených vlastností zobrazení $T(t)$ sa definuje C^o-semigrupa T (viď ďalej).

Základnym problémom je otázka, pre ktoré zobrazenia A môžeme robiť takéto úvahy, t.j. ktoré zobrazenia A generujú semigrupu T. Odpoveď nám dáva tzv. Hille-Yosidova veta. V tejto kapitole uvedieme okrem tejto vety len niektoré základné vlastnosti a príklady C^o-semigrúp. Aplikácie teórie C^o-semigrúp možno nájsť napr. v [RS] (teória rozptylu) alebo v [He] (teória semilineárnych parabolických rovníc).

1. ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI

Nech je X B-priestor, $J = \mathbb{R}^+$ alebo $J = \mathbb{R}$, $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ pre $t \in J$. Systém $T = \{T(t)\}_{t \in J}$ sa nazýva **C^o-semigrupa** (pre $J = \mathbb{R}$ tiež **C^o-grupa**), ak platí

(i) $T(0) = I$

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ pre každé $t, s \in J$

(iii) Zobrazenie $J \to X : t \mapsto T(t)x$ je spojité pre každé $x \in X$.

Nech je T C^o-semigrupa. *Ak definujeme* $Ax := \lim\limits_{t \in J,\, t \to 0} \dfrac{T(t)x - x}{t}$ (pre tie x, pre ktoré táto limita existuje), *potom je A uzavreté zobrazenie s hustým definičným oborom* a nazýva sa (infinitezimálny) **generátor** semigrupy T. Ak je T semigrupa s generátorom A, potom sa zobrazenie $T(t)$ tiež symbolicky označuje e^{tA}.

C^o-semigrupa je svojím generátorom jednoznačne určená, t.j. ak sú T, S dve C^o-semigrupy s tým istým generátorom, potom $T = S$. Pre ľubovoľné $x \in \mathcal{D}(A)$ a $t > 0$ ďalej platí $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$, $\dfrac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.

Vzťah ku Cauchyovej úlohe

Ak je A lineárne zobrazenie v X s hustým definičným oborom, potom riešením Cauchyovej úlohy $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_o \in \mathcal{D}(A)$ rozumieme diferencovateľnú funkciu $x : \mathbb{R}^+ \to X$ takú, že $x(0) = x_o$, $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h} = Ax(t)$ pre každé $t \geq 0$ (pre $t = 0$ ide o limitu sprava). Uvedená Cauchyova úloha sa nazýva korektná, ak pre každé $x_o \in \mathcal{D}(A)$ existuje jediné jej riešenie $x(t, x_o)$ a naviac platí: ak $x_n, x_o \in \mathcal{D}(A)$, $x_n \to x_o$, potom $x(t, x_n) \to x(t, x_o)$ lokálne rovnomerne v $\mathbb{R}^+$. Platí:

(i) Ak je Cauchyova úloha pre A korektná, potom je $T(t) = x(t, \cdot)$ (po spojitom rozšírení na X) C^o-semigrupa s generátorom $\overline{A}$.

(ii) Ak je T C^o-semigrupa s generátorom A, potom je Cauchyova úloha pre A korektná. Riešením tejto úlohy (pre $x_o \in \mathcal{D}(A)$) je funkcia $x(t, x_o) = T(t)x_o$ a platí $x(\cdot, x_o) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, X)$. Funkcia $x(t, x_o) = T(t)x_o$ pre $x_o \notin \mathcal{D}(A)$ sa nazýva zovšeobecneným riešením.

(iii) Nech je A uzavreté zobrazenie, $\varrho(A) \neq \emptyset$. Ak pre každé $x_o \in \mathcal{D}(A)$ existuje jediné riešenie Cauchyovej úlohy v triede $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, X)$, potom je Cauchyova úloha korektná.

Ak je T C^o-semigrupa s generátorom A, potom existujú $M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}$ tak, že $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ pre každé $t \in \mathbb{R}^+$. Ak označíme $\omega(A)$ infimum takých ω, potom platí $\omega(A) = \inf\limits_{t>0} \dfrac{\log\|T(t)\|}{t} = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\log\|T(t)\|}{t}$. Ak je T C^o-grupa, potom existujú $M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}^+$ tak, že $\|T(t)\| \leq Me^{\omega|t|}$ pre každé $t \in \mathbb{R}$.

Budeme písať $A \in G(M, \omega)$, ak je A generátor C^o-semigrupy T, pre ktorú platí $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$. Ak pre semigrupu T platí $\|T(t)\| \le 1$ pre každé $t \in J$, potom sa nazýva **kontrahujúca** semigrupa.

Pre generátor A C^o-semigrupy T platí tzv. veta o jadre: *Ak je $D \subset \mathcal{D}(A)$ hustý podpriestor X, ktorý je $T(t)$-invariantný pre každé $t \ge 0$, potom je to jadro zobrazenia A.*

$\boxed{1}$ Nech je A generátor C^o-semigrupy, $\lambda \in \mathbb{R}$, $B = A - \lambda$. Ukážte, že B je tiež generátor C^o-semigrupy, $\omega(B) = \omega(A) - \lambda$.

$\boxed{2}$ Nech je $A \in G(M, \omega)$. Ukážte, že v X existuje ekvivalentná norma $\|\cdot\|_1$ tak, že vzhľadom k tejto novej norme platí $\|e^{tA}\| \le e^{\omega t}$. (Návod: Voľte $\|x\|_1 = \sup\{e^{-\omega t}\|e^{tA}x\|\,;\ t \ge 0\}$.)

$\boxed{3}$ Nech je T C^o-semigrupa s generátorom A. Ukážte, že pre spektrálny polomer zobrazenia $T(t)$ platí $r(T(t)) = e^{t\omega(A)}$.

(Návod: $r(T(t)) = \lim \|T(t)^k\|^{1/k} = \left(\lim \|T(kt)\|^{1/kt}\right)^t = e^{t\omega(A)}$.)

$\boxed{4}$ *Translačné semigrupy v* $\mathbb{R}^n$. Nech je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená množina a $\varphi : J \times \Omega \to \Omega$ globálny (polo)tok na Ω, t.j. $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ pre každé $t, s \in J$, $x \in \Omega$. Ak je f funkcia definovaná na Ω, $t \in J$, položme $T(t)f = f(\varphi(t, \cdot))$.

(i) Ak je $X = \mathcal{BUC}(\Omega)$, $\varphi(t, \cdot)$ je rovnomerne spojitá na Ω a $\varphi(t, x) \to x$ pre $t \to 0$ rovnomerne v Ω, potom je T kontrahujúca C^o-semigrupa na X.

(ii) Ak je $X = L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, a tok φ je indukovaný vektorovým polom $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, pričom $\sup_\Omega |\operatorname{div} F(x)| \le \omega$, potom je T C^o-grupa v X, $\|T(t)\| \le e^{\omega|t|/p}$. Pre $u \in \mathcal{C}^1_c(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^1(\Omega)\,;\ u$ má kompaktný nosič v $\Omega\}$ platí $Au = \langle F, \nabla u\rangle$, pričom $\mathcal{C}^1_c(\Omega)$ je jadro zobrazenia A.

(iii) Nech je X jeden z priestorov $\mathcal{BUC}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C}_o(\mathbb{R}^n)$, $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. Nech $\varphi(t, x) = x + ta$, kde $a \in \mathbb{R}^n$ je pevné. Potom je T kontrahujúca C^o-grupa v X a jej generátor A je X-realizácia diferenciálneho operátora $\partial/\partial a$.

$\boxed{5}$ Nech $A \in \mathcal{L}(X)$ a $T(t) = e^{tA}$ v zmysle funkčného kalkulu v §III.2, t.j.

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\ .$$

Ukážte, že T je C^o-grupa s generátorom A.

C^o-semigrupa T sa nazýva **rovnomerne spojitá**, ak je zobrazenie $J \to \mathcal{L}(X) : t \mapsto T(t)$ spojité. Platí nasledujúce tvrdenie:
T je rovnomerne spojitá $\iff \mathcal{D}(A) = X \iff A \in \mathcal{L}(X)$.

Ak je $X = L^\infty(\Omega)$, kde Ω je priestor so σ-konečnou mierou, potom je každá C^o-semigrupa v X rovnomerne spojitá.

$\boxed{6}$ Nech $\lambda > 0$, $t \geq 0$, $p_t(k) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (Poissonovo rozdelenie s parametrom λt). Ak označíme δ_k Diracovu mieru s nosičom $\{k\}$, potom je $p_t = \sum_{k=0}^{\infty} p_t(k)\delta_k$ konečná Radonova miera v $\mathbb{R}$ s normou 1 (viď dodatok I alebo II). Ukážte, že predpisom

$$U(t)u = p_t * u = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} u(\cdot - k)$$

je definovaná rovnomerne spojitá C^o-semigrupa v priestore $\mathcal{BC}(\mathbb{R})$ s generátorom $Au(x) = \lambda\big(u(x) - u(x-1)\big)$.

Nech je A generátor C^o-semigrupy T, $\lambda > \omega(A)$. Pre $k \geq 1$ označme X_k priestor $\mathcal{D}(A^k)$ s normou $\|x\|_k = \|(\lambda{+}A)^k x\|$ a nech A_k je X_k-realizácia operátora A. Potom je X_k B-priestor, je to jadro A_l ak $l < k$, $X_{k+1} \hookrightarrow X_k$, pričom ide o husté vnorenie; $X_{k+1} \subset\hookrightarrow X_k$, ak má A kompaktnú rezolventu. Ďalej $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$, X_k je invariantný pre e^{tA} $(t \geq 0)$ a A_k je generátor C^o-semigrupy $e^{tA}/_{X_k}$.

Ak $x_o \in X_k$, $l < k$, potom pre $x(t) = T(t)x_o$ platí $x \in \bigcap\limits_{j=0}^{k-l} \mathcal{C}^j(\mathbb{R}^+, X_{k-j})$.

$\boxed{7}$ Nech je A generátor C^o-semigrupy T, nech $X_k = \mathcal{D}(A^k)$ a A_k je príslušná X_k-realizácia A (viď vyššie). Položme $X_\infty = \bigcap\limits_{k\geq 0} X_k$ s projektívnou topológiou, t.j. $x_n \to x$ v $X_\infty \iff x_n \to x$ v X_k pre každé k. Ukážte, že platí: X_∞ je F-priestor (viď dodatok I), $X_\infty \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} X_k$ pre každé k, A_∞ ($= X_\infty$-realizácia A) je spojité lineárne zobrazenie v X_∞ a generuje v X_∞ C^o-semigrupu, ktorá je reštrikciou semigrupy e^{tA} na priestor X_∞. (Nezabudnite pritom definovať C^o-semigrupu v F-priestore.)

$\boxed{8}$ Nech je A generátor C^o-semigrupy. Ukážte, že pre $x \in \mathcal{D}(A^{m+1})$ a $t > 0$ platí „ Taylorova formula"

$$e^{tA}x - \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k x = \frac{1}{m!} \int_0^t (t-s)^m e^{sA} A^{m+1} x \, ds \; .$$

$\boxed{9}$ Nech $A \in G(M, 0)$, $x \in \mathcal{D}(A^2)$. Potom platí $\|Ax\|^2 \leq 4M^2 \|A^2 x\| \cdot \|x\|$. Dokážte. (Návod: Integrovaním per partes dostaneme $T(t)x - x = \int_0^t T(\tau)Ax \, d\tau =$

$tAx + \int_0^t (t-s)T(s)A^2x\,ds$, odkiaľ $\|Ax\| \leq \dfrac{2M}{t}\|x\| + \dfrac{Mt}{2}\|A^2x\|$. Pre $A^2x \neq 0$ položte $t = 2\sqrt{\|x\|/\|A^2x\|}$.)

Ak toto tvrdenie použijeme pre $Af = f'$ v priestore $X = \mathcal{BUC}(\mathbb{R})$ alebo $X = L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < \infty)$, dostávame nerovnosť $\|f'\| \leq 4\|f''\| \cdot \|f\|$.

$\boxed{10}$ *Gauss-Weierstrassova semigrupa.* Nech $X^{(1)} = \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^n)$, $X^{(2)} = \mathcal{C}_o^k(\mathbb{R}^n)$ $(=\{f \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^n)\,;\, D^\alpha f(x) \to 0$ pre $|x| \to \infty$ a $|\alpha| \leq k\})$, $X^{(3)} = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $T(t)f = w_t * f$, kde $w_t(x) = (4\pi t)^{-n/2}\exp(-|x|^2/4t)$. Potom je T kontrahujúca C^o-semigrupa na $X^{(i)}$ s generátorom A rovným $X^{(i)}$-realizácii diferenciálneho operátora $\triangle$. $\mathcal{BUC}^{k+2+m}(\mathbb{R}^n)$ $(m \geq 0)$ je jadro A v prípade $i = 1$; priestor $\mathcal{S}$ (viď § DI.2) je jadro A v prípade $i = 2, 3$. Ďalej $X_m^{(3)} = W^{k+2m,p}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{BUC}^{k+2m}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow X_m^{(1)}$, $\mathcal{C}_o^{k+2m}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow X_m^{(2)}$.

C^o-semigrupa T je naviac **pozitívna**, t.j. $T(t)f \geq 0$ pre každé $f \geq 0$ a $t \geq 0$. Ak $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$, potom dokonca platí $(T(t)f)(x) > 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}^n$ a každé $t > 0$. V obecnom usporiadanom B-priestore platí, že C^o-semigrupa T s generátorom A je pozitívna práve vtedy, keď je $R(\lambda, A)$ pozitívny operátor (t.j. $R(\lambda, A)x \geq 0$ pre $x \geq 0$) pre dostatočne veľké $\lambda > 0$.

Gauss-Weierstrassova semigrupa sa dá definovať aj v priestoroch $X = \mathcal{S}$ a $X = \mathcal{S}'$, v tom prípade je jej generátor $\triangle \in \mathcal{L}(X)$. Táto semigrupa má nasledujúcu zhladzujúcu vlastnosť: pre ľubovoľné $u_o \in \mathcal{S}'$ a $t > 0$ platí $e^{t\triangle}u_o \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Z vlastností C^o-semigrupy T plynie existencia a jednoznačnosť riešenia úlohy

$$\begin{aligned} u_t - \triangle u &= 0 \qquad \text{v } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= u_o(x) \qquad \text{v } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Treba si však uvedomiť, že ide vždy o jednoznačnosť v istej triede funkcií, pretože napr. existuje funkcia $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$, ktorá je riešením tejto úlohy pre $n = 1$ a $u_o \equiv 0$, a pritom $u \not\equiv 0$.

2. HILLE–YOSIDOVA VETA

Hille–Yosidova veta charakterizuje generátory C^o-semigrúp: Nech je A lineárne zobrazenie v X. *$A \in G(M,\omega)$ práve vtedy, keď je uzavreté, má hustý definičný obor, $(\omega,\infty) \subset \varrho(A)$ a $\|R(\lambda, A)^n\| \leq M/(\lambda-\omega)^n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda > \omega$.*

Ak $A \in G(M,\omega)$, potom tiež $\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\lambda > \omega\} \subset \varrho(A)$ a pre $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ platí $\|R(\lambda, A)^n\| \leq M/(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^n$, $R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt = \int_0^\infty e^{-t(\lambda - A)}x\,dt$.

Ďalej pre každé $x \in X$ platí $(1-\dfrac{t}{n}A)^{-n}x \to e^{tA}x$ (pre $n \to \infty$) lokálne rovnomerne v $\mathbb{R}^+$ a pre $x \in \mathcal{D}(A^2)$, $\gamma > \max(0,\omega)$ platí tiež $T(t)x = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda, A)x\,d\lambda$.

$\boxed{11}$ Nech je X reflexívny B-priestor a nech je A generátor C^o-semigrupy T. Ukážte, že potom je A' generátor C^o-semigrupy T'. (Návod: Podľa §II.1 je A' uzavreté zobrazenie s hustým definičným oborom. Z §III.1 a §II.1 zase plynie $\varrho(A') = \varrho(A)$, $\|R(\lambda, A')\| = \|R(\lambda, A)'\| = \|R(\lambda, A)\|$, takže A' je generátor C^o-semigrupy. Ďalej platí

$$e^{t(A')}x = \lim\Big(1-\frac{t}{n}A'\Big)^{-n}x = \lim\Big[\Big(1-\frac{t}{n}A\Big)^{-n}\Big]'x = \big(e^{tA}\big)'x\ .)$$

$\boxed{12}$ Nech je A generátor C^o-semigrupy T, nech je σ_1 spektrálna množina A a $X = X_1 \oplus X_2$ je príslušný A-invariantný rozklad X, t.j. $A = A_1 \oplus A_2$. Potom platí tiež $e^{tA} = e^{tA_1} \oplus e^{tA_2}$. Dokážte.

$\boxed{13}$ Nech sú A, B generátory C^o-semigrúp v priestore X. Ak sú $C, D \in \mathcal{L}(X)$, položme $[C, D] = CD - DC$ (komutátor). Ukážte, že nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

- $e^{tB}A \subset Ae^{tB}$ pre každé $t \geq 0$
- $R(\mu, B)A \subset AR(\mu, B)$ pre každé $\mu > \omega(B)$
- existuje $\mu > \omega(B)$ tak, že $R(\mu, B)A \subset AR(\mu, B)$
- existujú $\lambda > \omega(A)$, $\mu > \omega(B)$ tak, že $[R(\lambda, A), R(\mu, B)] = 0$
- $[R(\lambda, A), R(\mu, B)] = 0$ pre každé $\lambda > \omega(A)$, $\mu > \omega(B)$
- $[R(\lambda, A), e^{tB}] = 0$ pre každé $\lambda > \omega(A)$ a každé $t \geq 0$
- existuje $\lambda > \omega(A)$ tak, že $[R(\lambda, A), e^{tB}] = 0$ pre každé $t \geq 0$
- $[e^{sA}, e^{tB}] = 0$ pre každé $s, t \geq 0$

Pri dôkaze využite a dokážte toto tvrdenie: Ak $C \in \mathcal{L}(X)$, potom $CA \subset AC \iff [C, e^{sA}]$ $=0$ pre každé $s \geq 0$. (Návod pre dôkaz pomocného tvrdenia: Ak $CA \subset AC$, potom pre $x \in \mathcal{D}(A)$ platí $\frac{d}{dt}(e^{(s-t)A}Ce^{tA}x) = 0$, integrovaním pre $t \in (0, s)$ dostávame $Ce^{sA}x = e^{sA}Cx$, odkiaľ plynie $[C, e^{sA}] = 0$. Opačná implikácia je jednoduchá.)

$\boxed{14}$ Nech je T **nilpotentná** C^o-semigrupa, t.j. $T(t) = 0$ pre dostatočne veľké t. Potom pre jej generátor musí platiť $\omega(A) = -\infty$, takže $\sigma(A) = \emptyset$. Ak napr. $X = \{f \in \mathcal{BUC}((0,1))\,;\, f(1) = 0\}$ a A je X-realizácia diferenciálneho operátora $f \mapsto f'$, potom $e^{tA}f = f(\cdot + t)$ je nilpotentná C^o-semigrupa, takže $\sigma(A) = \emptyset$.

$\boxed{15}$ Pre spektrum zobrazenia e^{tA} $(t > 0)$ platia nasledujúce tvrdenia:

- $\exp(t\sigma(A)) \subset \sigma(e^{tA})$
- $\exp(t\sigma_{\mathrm{ess}}(A)) \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(e^{tA})$
- $\exp(t\sigma_{\mathrm{p}}(A)) \subset \sigma_{\mathrm{p}}(e^{tA}) \subset \exp(t\sigma_{\mathrm{p}}(A)) \cup \{0\}$

- $\exp(t\sigma_{\mathrm{r}}(A)) \setminus \exp(t\sigma_{\mathrm{p}}(A)) \subset \sigma_{\mathrm{r}}(e^{tA})$
- $\exp(t\sigma_{\mathrm{c}}(A)) \setminus \big(\exp(t\sigma_{\mathrm{p}}(A)) \cup \exp(t\sigma_{\mathrm{r}}(A))\big) \subset \sigma_{\mathrm{c}}(e^{tA})$

  Uvedomte si, že v predošlom príklade platí $\sigma(A) = \emptyset$, ale $\sigma(e^{tA}) \neq \emptyset$.

3. KONTRAHUJÚCE SEMIGRUPY

Podľa Hille–Yosidovej vety je uzavreté zobrazenie A s hustým $\mathcal{D}(A)$ generátorom kontrahujúcej C^o-semigrupy práve vtedy, keď $(0,\infty) \subset \varrho(A)$ a $\|R(\lambda, A)\| \leq 1/\lambda$ pre každé $\lambda > 0$. Generátory kontrahujúcich semigrúp sa dajú tiež charakterizovať pomocou tzv. m-disipatívnych zobrazení (Lumer–Phillips):

Lineárne zobrazenie A sa nazýva **disipatívne**, ak pre každé $x \in \mathcal{D}(A)$ existuje $\vartheta_x \in X'$ tak, že $\|x\|^2 = \|\vartheta_x\|^2 = \vartheta_x(x)$ a $\operatorname{Re}\vartheta_x(Ax) \leq 0$. Ak je A disipatívne a existuje $\lambda > 0$ tak, že $\mathcal{R}(\lambda - A) = X$, potom sa A nazýva m-**disipatívne** (a zobrazenie $-A$ m-akretívne). *Lineárne zobrazenie A je generátor kontrahujúcej C^o-semigrupy práve vtedy, keď má hustý definičný obor a je m-disipatívne.* Predpoklad hustého definičného oboru je pritom automaticky splnený, ak je priestor X reflexívny.

Ekvivalentnou podmienkou disipativity je podmienka $\|(\lambda - A)x\| \geq \operatorname{Re}\lambda\|x\|$ pre každé $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ alebo tiež $\|(1-\varepsilon A)x\| \geq \|x\|$ pre každé $\varepsilon > 0$. Príkladom m-disipatívneho zobrazenia je zobrazenie $-A$, kde A je nezáporné samoadjungované zobrazenie v H-priestore. Ak je $X = L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, (kde Ω je priestor so σ-konečnou mierou), potom je A disipatívne práve vtedy, keď pre každé $u \in \mathcal{D}(A)$ platí $\operatorname{Re}\int_\Omega |u|^{p-2}\overline{u}\, Au\, d\mu \leq 0$.

Pre m-disipatívne zobrazenia platí podobná perturbačná veta ako pre samoadjungované zobrazenia: *ak je A m-disipatívne zobrazenie s hustým definičným oborom, zobrazenie B je disipatívne, $B \prec_1 A$, potom je $A{+}B$ m-disipatívne.* Ak je X reflexívny priestor a miesto predpokladu $B \prec_1 A$ predpokladáme len, $B \preceq_1 A$, potom je zobrazenie $\overline{A{+}B}$ m-disipatívne.

$\boxed{16}$ Nech je A generátor C^o-semigrupy a nech $B \in \mathcal{L}(X)$. Potom je $A{+}B$ generátor C^o-semigrupy. Dokážte. (Návod: Vzhľadom k cvičeniam 1 a 2 môžeme predpokladať, že

A generuje kontrahujúcu semigrupu, t.j. že A je m-disipatívne. Ďalej zobrazenie $(B-\|B\|)$ je disipatívne, takže $(A+B-\|B\|)$ je m-disipatívne.)

4. GRUPY UNITÁRNYCH ZOBRAZENÍ

Charakterizáciu generátorov C^o-grúp unitárnych zobrazení dáva Stoneova veta: *ak je X H-priestor, potom A je generátor C^o-grupy unitárnych zobrazení práve vtedy, keď je zobrazenie iA samoadjungované (t.j. $A^* = -A$).*

$\boxed{17}$ Nech je A samoadjungované, nech $T(t) = f_t(A)$, kde $f_t(\lambda) = e^{it\lambda}$ a zobrazenie $f_t(A)$ chápeme v zmysle funkčného kalkulu z §III.5. Ukážte, že $T(t)$ je C^o-semigrupa s generátorom iA. (Návod: Z vlastností funkčného kalkulu pre samoadjungované zobrazenia plynie, že $\{f_t(A)\}$ je C^o-semigrupa. Označme B jej generátor a položme $g_t(\lambda) = \dfrac{f_t(\lambda)-1}{t}$. Potom platí $g_t(\lambda) \to i\lambda$ pre $t \to 0$, $|g_t(\lambda)| = |\lambda|$, takže pre $x \in \mathcal{D}(A)$ platí $\|g_t(A)x - iAx\|^2 = \int |g_t(\lambda) - i\lambda|^2 \, d\mu_x(\lambda) \to 0$, odkiaľ plynie $iA \subset B$. Ak je P_n spektrálna projekcia príslušná zobrazeniu A a množine $(-n,n)$, potom z vlastností funkčného kalkulu plynie, že $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X)$ je podpriestor $\mathcal{D}(A)$, ktorý je hustý v X a $f_t(A)$-invariantný, takže podľa vety o jadre je $B = \overline{B/_{\mathrm{D}}} = \overline{iA/_{\mathrm{D}}} = iA$.)

Z §III.5 teraz plynie $\exp(t\sigma(iA)) = \overline{\sigma(e^{itA})}$ (porovnajte s cvičením 15). Vyslovte a dokážte tiež analogické tvrdenie pre semigrupu e^{-tA}, kde A je nezáporné samoadjungované zobrazenie.

Ak špeciálne zvolíme $A = \triangle$ v $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, dostávame, že spektrum operátora $e^{it\triangle}$ je jednotková kružnica v $\mathbb{C}$. S využitím cvičenia 15 dostávame, že ide o spojité spektrum.

Nech ďalej $X = \ell^2$, $Ax = \big((2\pi+1)x_1, (4\pi+\frac{1}{2})x_3, (6\pi+\frac{1}{3})x_3, \dots\big)$. Ukážte, že A je samoadjungované zobrazenie s kompaktnou rezolventou, $\sigma_{\mathrm{P}}(e^{itA}) = \exp(it\sigma_{\mathrm{P}}(A))$, $\sigma_{\mathrm{C}}(e^{itA}) = \{1\}$, $\sigma_{\mathrm{C}}(A) = \emptyset$.

$\boxed{18}$ Nech je H samoadjungovaný Schrödingerov operátor v $L^2(\mathbb{R}^n)$ s definičným oborom $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(-\triangle)$. Ukážte, že potom pre každé $\varphi_o \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ existuje jediné riešenie Schrödingerovej rovnice $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = iH\varphi$, $\varphi(0) = \varphi_o$ v $L^2(\mathbb{R}^n)$ a platí $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, W^{2,2}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$.

$\boxed{19}$ Nech je $T(t) = e^{it\triangle}$ C^o-grupa generovaná operátorom $i\triangle$ v $L^2(\mathbb{R}^n)$. Potom sa dá ukázať

$$e^{it\triangle}u = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|y|<R} k_{it}(\cdot - y)u(y)\,dy\ ,$$

kde $k_z(x) = (4\pi z)^{-n/2}e^{-|x|^2/(4z)}$ (porovnajte s Gauss–Weierstrassovou semigrupou).

C^o-semigrupa $\{e^{it\triangle}\,;\ t\ge 0\}$ má nasledujúcu „ zhladzujúcu" vlastnosť: ak $1\le p\le 2$, $t>0$, potom $\|e^{it\triangle}\|_{(p,p')}\le (4\pi t)^{-nq}$, kde $q = 1/p - 1/2$ a $\|\cdot\|_{(p,p')}$ je norma v priestore $\mathcal{L}(L^p, L^{p'})$. Dokážte. (Návod: Ukážte, že $\|T(t)\|_{(2,2)} = 1$, $\|T(t)\|_{(1,\infty)}\le (4\pi t)^{-n/2}$ a použite Riesz–Thorinovu interpolačnú vetu: *Ak* $\|A\|_{(p_i,q_i)} = M_i$ *(*$i=1,2$*),* $0<\theta<1$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_1} + \dfrac{\theta}{p_2}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_1} + \dfrac{\theta}{q_2}$, *potom* $\|A\|_{(p,q)}\le M_1^{1-\theta}M_2^{\theta}$*.*)

$\boxed{20}$ Nech $A_j\in G(M_j,\omega_j)$, $j=1,2,\dots,k$, sú generátory semigrúp T_j, $\bigcap\limits_{j=1}^{k}\mathcal{D}(A_j)$ je hustý v X a $\|\big(T_1(t)\dots T_k(t)\big)^n\|\le Me^{n\omega t}$, $n=1,2,\dots$, ($M\ge 1$, $\omega\ge 0$). Nech ďalej pre $A = A_1+\dots+A_k$ platí $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = X$ pre vhodné $\operatorname{Re}\lambda>\omega$. Potom $\overline{A}\in G(M,\omega)$ generuje semigrupu T, pre ktorú platí

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty}\left(T_1\left(\frac{t}{n}\right)\dots T_k\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n x \qquad \forall x\in X$$

(lokálne rovnomerne v t).

Špeciálne, ak sú A,B samoadjungované zobrazenia a $\overline{A+B}$ je samoadjungované, potom

$$e^{it\overline{(A+B)}}x = \lim_{n\to\infty}\left(e^{itA/n}e^{itB/n}\right)^n x\ .$$

Použite toto tvrdenie spolu s predošlým príkladom na dôkaz nasledujúcej formuly: ak $V\in L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $Hu = -\triangle u + Vu$ v $X = L^2(\mathbb{R}^3)$, potom

$$\big(e^{-itH}u\big)(x_o) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\pi it}{n}\right)^{-3n/2}\tilde{\int\limits_{\mathbb{R}^3}}\dots\tilde{\int\limits_{\mathbb{R}^3}}\exp(iS_n(x_o,\dots,x_n,t)f(x_n)\,dx_n\dots dx_1\ ,$$

kde $S_n(x_o,\dots,x_n,t) = \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{t}{n}\left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{|x_j-x_{j-1}|}{t/n}\right)^2 - V(x_j)\right]$, $\tilde{\int\limits_{\mathbb{R}^3}} = \lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_{|x|\le m}$ a všetky limity sa chápu v L^2 zmysle.

Poznámka: Pre semigrupu e^{-tH} sa dá dokázať vyjadrenie v tvare

$$\big(e^{-tH}u\big)(x) = \int\limits_{\Omega_\alpha} u(\omega(t))\exp\big(-\int\limits_0^t V(\omega(s))\,ds\big)\,d\mu_x(\omega)\ ,$$

kde $\alpha \in (0.1/2)$, Ω_α je priestor všetkých α-hölderovských funkcií $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ a μ_x je konečná miera v Ω_α (μ_x je reštrikcia konečnej Radonovej miery z priestoru $\prod\limits_{t\geq 0} \dot{\mathbb{R}}^3$, kde $\dot{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ je jednobodová kompaktifikácia priestoru $\mathbb{R}^3$).

$\boxed{21}$ Uvažujme Maxwellove rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathcal{H} &= - \mathcal{J} \\ \operatorname{div} \mathcal{D} &= \varrho \\ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathcal{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathcal{B} &= 0 \end{aligned}$$

v časovom valci $\Omega \times \mathbb{R}$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je otvorená množina s kompaktnou hranicou triedy C^1, na ktorej uvažujeme okrajové podmienky $\nu \times \mathcal{E} = 0$, $\mathcal{B} \cdot \nu = 0$, kde ν je vektor vonkajšej normály k $\partial\Omega$ (toto modeluje napr. prípad, keď oblasť $\mathbb{R}^3 \backslash \Omega$ je perfektný vodič, t.j. $\mathcal{D} = \mathcal{E} = \mathcal{B} = \mathcal{H} = \mathcal{J} = 0$, $\varrho = 0$ v $\mathbb{R}^3 \backslash \Omega$). Ďalej predpokladajme nasledujúce materiálové vzťahy a Ohmov zákon: $\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E}$, $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$, $\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$, kde $\varepsilon, \mu, \sigma \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^3))$, pričom predpokladáme, že $\varepsilon(x), \mu(x), \sigma(x)$ sú symetrické, rovnomerne pozitívne definitné matice (v prípade σ stačí pozitívna semidefinitnosť).

Ak pre počiatočnú podmienku $\mathcal{B}_o$ platí $\operatorname{div} \mathcal{B}_o = 0$ v Ω, $\mathcal{B}_o \cdot \nu = 0$ na $\partial\Omega$, potom sa heuristickými úvahami dá ukázať $\operatorname{div} \mathcal{B} = 0$ v $\Omega \times \mathbb{R}$, $\mathcal{B} \cdot \nu = 0$ na $\partial\Omega \times \mathbb{R}$. Podobne za predpokladu $\operatorname{div} \mathcal{D}_o = \varrho_o$ môžeme vylúčiť rovnicu $\operatorname{div} \mathcal{D} = \varrho$, takže dostaneme systém

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{H} &= - \varepsilon^{-1} \mathcal{J} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{E} &= 0 \end{aligned}$$

s okrajovou podmienkou $\nu \times \mathcal{E} = 0$.

Definujme teraz pre $m \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^3))$, kde $m(x)$ je symetrická, rovnomerne pozitívne definitná matica, H-priestor $H(\Omega, m)$ ako priestor $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ so skalárnym súčinom $\langle u, v\rangle_m = \langle mu, v\rangle_{L^2}$ a položme

$$H(\operatorname{rot}, \Omega, m) = \{u \in H(\Omega, m)\,;\, \operatorname{rot} u \in H(\Omega, m)\}$$

so skalárnym súčinom $\langle u, v\rangle_{rot} = \langle u, v\rangle_m + \langle \operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v\rangle_m$ (ide o H-priestor). Potom platí $\mathcal{D}(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^3) \overset{d}{\hookrightarrow} H(\operatorname{rot}, \Omega, m) \overset{d}{\hookrightarrow} H(\Omega, m)$ a zobrazenie $\gamma_\tau : \mathcal{D}(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^3) \to \mathcal{C}(\partial\Omega, \mathbb{C}^3) : u \mapsto \nu \times u/_{\partial\Omega}$ má jednoznačné spojité rozšírenie $\tilde{\gamma}_\tau \in \mathcal{L}(H(\operatorname{rot}, \Omega, m), W^{-1/2,2}(\partial\Omega, \mathbb{C}^3))$, kde Sobolevov priestor $W^{-1/2,2}$ je definovaný napr. v [KJF].

Položme $H = H(\Omega,\varepsilon)\times H(\Omega,\mu)$, $\mathcal{D}(A) = \{(\mathcal{E},\mathcal{H})\in H\,;\,\mathrm{rot}\,\mathcal{E},\mathrm{rot}\,\mathcal{H}\in L^2(\Omega,\mathbb{C}),\ \tilde{\gamma}_\tau\mathcal{E}=0\}$ a pre $u=(\mathcal{E},\mathcal{H})\in\mathcal{D}(A)$ definujme zobrazenie $Au = (-\varepsilon^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{H},\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{E})$. Potom sa dá nami skúmaný systém rovníc (za predpokladu $\mathcal{J}=0$) písať v tvare $\dfrac{\partial u}{\partial t}+Au=0$. Ďalej sa dá ukázať, že platí $A^* = -A$, takže pre každé $(\mathcal{E}_o,\mathcal{H}_o)\in\mathcal{D}(A)$ existuje jediné riešenie $(\mathcal{E},\mathcal{H})\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},L^2(\Omega,\mathbb{C}^6))\cap\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathcal{D}(A))$ systému

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}-\mathrm{rot}\,\mathcal{H} &=0 \qquad \text{v } \Omega\times\mathbb{R}\\
\mu\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\,\mathcal{E} &=0 \qquad \text{v } \Omega\times\mathbb{R}\\
\nu\times\mathcal{E} &=0 \qquad \text{na } \partial\Omega\times\mathbb{R}\\
(\mathcal{E},\mathcal{H})(0) &=(\mathcal{E}_o,\mathcal{H}_o)\ .
\end{aligned}
$$

Ďalej platí, že $2E_\Omega(t) = \int_\Omega\big((\varepsilon\mathcal{E}(t))\cdot\mathcal{E}(t)+(\mu\mathcal{H}(t))\cdot\mathcal{H}(t)\big)\,dx$ je konštanta (zákon zachovania energie), pretože $E_\Omega(t)=\|u(t)\|_H^2$.

Využite cvičenie 16 na dôkaz existencie riešenia $(\mathcal{E},\mathcal{H})$ systému

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}-\mathrm{rot}\,\mathcal{H} &=-\mathcal{J} \qquad \text{v } \Omega\times\mathbb{R}\\
\mu\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\,\mathcal{E} &=0 \qquad \text{v } \Omega\times\mathbb{R}\\
\nu\times\mathcal{E} &=0 \qquad \text{na } \partial\Omega\times\mathbb{R}\\
(\mathcal{E},\mathcal{H})(0) &=(\mathcal{E}_o,\mathcal{H}_o)\ ,
\end{aligned}
$$

kde $\mathcal{J}=\sigma\mathcal{E}$, $\sigma\in L^\infty(\Omega,\mathcal{L}(\mathbb{R}^3))$, a ukážte tiež, že $\dfrac{d}{dt}E_\Omega(t) = -\displaystyle\int_\Omega(\sigma\mathcal{E})\cdot\mathcal{E}\,dx\le 0$, ak $\sigma\ge 0$. (Návod: Položte $B(\mathcal{E},\mathcal{H}) = (\varepsilon^{-1}\sigma\mathcal{E},0)$.)

$\boxed{22}$ (*Exkurzia do teórie rozptylu*) V tomto cvičení budeme predpokladať, že A, B sú samoadjungované zobrazenia v H-priestore X, takže zobrazenia iA, iB generujú C^o-semigrupy unitárnych zobrazení e^{iAt}, e^{iBt}. Symbolom $P_{\mathrm{ac}}(A)$ budeme značiť projekciu na podpriestor $X_{\mathrm{ac}}(A)$ tvorený všetkými prvkami x, ktorých spektrálne miery μ_x (vzhľadom k zobrazeniu A) sú absolútne spojité voči Lebesgueovej miere. Analogicky sa definuje $P_{\mathrm{ac}}(B)$. **Vlnové operátory** $\Omega^\pm(A,B)$ sú definované predpisom

$$\Omega^\pm(A,B)x = \lim_{t\to\mp\infty} e^{iAt}e^{-iBt}P_{\mathrm{ac}}(B)x$$

za predpokladu, že uvedené limity existujú pre každé $x\in X$.

Ďalej kladieme $X_\pm = \mathcal{R}(\Omega^\pm)$. Ľahko sa overí, že priestory $X_\pm$ sú A-invariantné, $\Omega^\pm(\mathcal{D}(B))\subset\mathcal{D}(A)$, $A\Omega^\pm(A,B) = \Omega^\pm(A,B)B$ a $X_\pm\subset X_{\mathrm{ac}}(A)$. Operátory

$\Omega^{\pm}(A,B)$ sa nazývajú **úplné**, ak $X_{\pm} = X_{\mathrm{ac}}(A)$. Za predpokladu $\sigma_{\mathrm{S}}(A) = \emptyset$ potom platí $X_{\pm} = \big(X_{\mathrm{p}}(A)\big)^{\perp}$ (**asymptotická úplnosť**).

- Ak $A = -\triangle$ v priestore $X = L^2(\mathbb{R}^3)$, $B = -\triangle + V$, kde $V \in L^1 \cap L^2$, potom sa dá ukázať, že vlnové operátory $\Omega^{\pm}(A,B)$ existujú a sú úplné.

Ak existujú vlnové operátory, definujeme **operátor rozptylu** (S-maticu) predpisom $S = (\Omega^-)^*\Omega^+$. Ukážte, že platí:

- $Se^{-iAt} = e^{-iBt}S$, $\mathcal{D}(A)$ je S-invariantný, $S(A\varphi) = A(S\varphi)$
- S je unitárny $\iff$ $X_+ = X_-$

5. ANALYTICKÉ A KOMPAKTNÉ SEMIGRUPY

C^o-semigrupa T sa nazýva **analytická** (holomorfná), ak je zobrazenie $(0,\infty) \to X : t \mapsto T(t)x$ (reálno-) analytické pre každé $x \in X$. Analytické semigrupy majú tzv. zhladzujúcu vlastnosť, t.j. $T(t)X \subset \mathcal{D}(A^k)$ pre každé $t > 0$ a $k \in \mathbb{N}$.

Uzavreté zobrazenie A s hustým $\mathcal{D}(A)$ je generátor analytickej semigrupy práve vtedy, keď existujú $M, \beta \in \mathbb{R}$ tak, že

(i) $\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\lambda \geq \beta\} \subset \varrho(A)$

(ii) $\|R(\lambda, A)\| \leq M/(1 + |\lambda|)$ pre každé $\mathrm{Re}\lambda > \beta$.

Pre generátor analytickej semigrupy platí $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, |\arg(\lambda - \gamma)| \geq \alpha + \pi/2\}$ pre vhodné $\alpha, \gamma > 0$. Ďalej $\omega(A) = \sup\{\mathrm{Re}\lambda\,;\, \lambda \in \sigma(A)\}$. Ak $\omega(A) < a$, potom $\|A^k e^{tA}\| \leq Ce^{at}/t^k$ pre každé $k \geq 0$.

Ak je A generátor analytickej semigrupy a $B \prec_{\varepsilon} A$ alebo B je A-kompaktné, potom je tiež $(A + B)$ generátor analytickej semigrupy.

$\boxed{23}$ Jednoduchou postačujúcou podmienkou pre analytičnosť semigrupy je napr. podmienka $\limsup\limits_{t\to 0+} \|I - T(t)\| < 2$. Ukážte pomocou tohto kritéria, že semigrupa $T(t) = e^{-tA}$, kde A je nezáporné samoadjungované zobrazenie, je analytická. (Návod: $\|T(t)x - x\|^2 = \int_{\mathbb{R}^+} |e^{-t\lambda} - 1|^2\, d\mu_x(\lambda) \leq \int_{\mathbb{R}^+} 1\, d\mu_x(\lambda) = \|x\|^2$.)

$\boxed{24}$ Pre veľmi obecné okrajové úlohy pre systémy eliptických diferenciálnych rovníc sa dajú dokázať tzv. L^p-odhady (Agmon-Douglis-Nirenberg) zaručujúce, že príslušný diferenciálny operátor (spolu s okrajovými podmienkami) je generátorom analytickej C^o-semigrupy v priestore L^p. Obecnosť $p(\neq 2)$ je dôležitá kvôli možnosti skúmania semilineárnych parabolických rovníc s ľubovoľným rastom nelinearity.

Nech je napr. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvorená, ohraničená množina s hranicou triedy C^2, nech je A diferenciálny operátor $Au = -\triangle u + \sum a_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j} + cu$, kde $a_j \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, a nech je $A^\# u = -\triangle u - \sum \dfrac{\partial}{\partial x_j}(a_j u) + cu$ k nemu formálne adjungovaný operátor. Nech $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, a položme $A_p u = Au$ pre $u \in \mathcal{D}(A_p)$, kde $\mathcal{D}(A_p)$ je uzáver množiny $\{u \in \mathcal{BUC}^2(\Omega)\,;\, u = 0 \text{ na } \partial\Omega\}$ v priestore $W^{2,p}(\Omega)$. Potom existuje $\lambda_o \geq 0$ a $C > 0$ tak, že pre $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_o$ a $u \in \mathcal{D}(A_p)$ platí $|\lambda|\,\|u\|_p + \|u\|_{2,p} \leq C\|(\lambda + A_p)u\|_p$ a súčasne $\mathcal{R}(\lambda + A_p) = X$ (kde $\|\cdot\|_p$ resp. $\|\cdot\|_{2,p}$ je norma v L^p resp. vo $W^{2,p}$). Použite tieto všeobecné výsledky k dôkazu nasledujúcich tvrdení:

- A_p je uzavreté fredholmovské zobrazenie v $L^p(\Omega)$ s kompaktnou rezolventou
- $(A_p)' = A^\#_{p'}$
- existuje $\omega \geq 0$ tak, že $-(\omega + A_p)$ je m-disipatívne
- pre každé $u_o \in \mathcal{D}(A_p)$ existuje jediné riešenie $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(A_p)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, L^p(\Omega))$ (kde v $\mathcal{D}(A_p)$ uvažujeme normu z priestoru $W^{2,p}(\Omega)$) úlohy

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= 0 && \text{v } \Omega \times (0,\infty) \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(\cdot, 0) &= u_o && \text{v } \Omega \end{aligned}$$

Semigrupa T sa nazýva **kompaktná**, ak je $T(t) \in \mathcal{K}(X)$ pre každé $t > 0$. To platí práve vtedy, keď je $T : (0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ spojité zobrazenie a generátor A semigrupy T má kompaktnú rezolventu. Potom tiež pre každé $\sigma \in \mathbb{R}$ platí $\sigma + i\tau \in \varrho(A)$ pre dostatočne veľké $|\tau|$ a $\|R(\sigma + i\tau, A)\| \to 0$ pre $|\tau| \to \infty$ (lokálne rovnomerne v σ).

Ak je A generátor kompaktnej semigrupy a $B \in \mathcal{L}(X)$, potom je tiež $(A + B)$ generátor kompaktnej semigrupy.

$\boxed{25}$ Nech je A nezáporné samoadjungované zobrazenie s kompaktnou rezolventou. Ukážte, že $-A$ generuje kompaktnú semigrupu. (Návod: Pri dôkaze spojitosti zobrazenia $t \mapsto T(t)$ postupujte ako v príklade 23.)