MATEMATICKO FYZIKÁLNA FAKULTA
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
v Bratislave
Ekonomická a finančná matematika

Analýza voľnej hranice amerických opcií

Diplomová práca

Autor: Janka Horváthová
Vedúci Diplomovej práce: RNDr. Daniel Ševčovič, CSc
Bratislava 1999

Obsah

Úvod **2**

1 Matematické výsledky v oceňovaní amerických call opcií. **3**

1.1 Základné pojmy a definície. 3

1.2 Black-Scholesov model. 3

1.2.1 Počiatočné a okrajové podmienky pre Európsku call opciu. 6

1.2.2 Počiatočné a okrajové podmienky pre Americkú call opciu. 7

1.3 Matematická analýza oceňovania amerických call opcií. 9

1.3.1 Transformácia voľnej hranice na pevný obor. 9

1.3.2 Redukcia na nelineárnu integrálnu rovnicu. 11

2 Matematická analýza oceňovania amerických put opcií **15**

2.1 Explicitná formula pre európske put opcie. 15

2.2 Formulácia úlohy ocenenia amerických put opcií. 16

2.3 Transformácia voľnej hranice na pevný obor. 18

2.4 Redukcia na nelineárnu integrálnu rovnicu. 20

2.4.1 Rovnica voľnej hranice americkej put opcie, na akciu vyplácajúcu dividendy. 21

2.4.2 Rovnica voľnej hranice put opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy. 22

2.5 Aproximácia voľnej hranice americkej put opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy. 22

2.6 Pozície voľnej hranice. 24

3 Numerické experimenty. **26**

3.1 Analýza citlivosti nájdeného vzorca. 26

Záver. **30**

Literatúra **32**

Úvod.

Oceňovanie finančných derivátov je v praxi veľmi skúmaným problémom. Existuje viacero prístupov k ich riešeniu. Základom pre väčšinu takýchto metód je Black-Scholesova PDR pre oceňovanie opcií. Táto rovnica bude východiskom aj v našej práci. Jej odvodenie a niektoré výsledky v ocenení európskych call opcií priblížime v prvej kapitole. Našim cieľom je skúmať americké opcie. Zovšeobecníme Black-Scholesovu analýzu pre americké call opcie a ukážeme, ako oceňovanie amerických opcií vedie na úlohu s voľnou hranicou. Ďalej priblížime riešenie tejto úlohy pre americké call opcie navrhnuté D. Ševčovičom v práci [1].

V druhej kapitole nadviažeme na spomínanú prácu [1] a aplikujeme podobný postup riešenia na problém ocenenia amerických put opcií. Tu nastáva zvláštna situácia pre americké put opcie na akciu, ktorá nevypláca dividendy. Na rozdiel od call opcií, kde hodnoty amerických a európskych opcií na akcie nevyplácajúce dividendy sú totožné. Túto možnosť sa pokúsime riešiť aspoň na malom časovom intervale, blízkom času expirácie. Na záver porovnáme nami získanú aproximáciu s voľnou hranicou vypočítanou z numerických riešení oceňovania amerických put opcií.

Zvlášť chcem poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce Danielovi Ševčovičovi za odborné rady a cenné podnety, ktorými mi pomohol k napísaniu tejto práce.

1 Matematické výsledky v oceňovaní amerických call opcií.

Najskôr pripomenieme niektoré základné definície, predpoklady a vzťahy medzi nimi, potrebné na ďalšiu analýzu oceňovania amerických opcií.

1.1 Základné pojmy a definície.

Základným pojmom v teórii finančných trhov je opcia. *Európska call opcia* je kontrakt, v ktorom jedna strana získava právo, nie povinnosť, kúpiť akciu v presne určenom čase za vopred dohodnutú cenu. Podobne *put opcia* dáva svojmu držiteľovi právo predať akciu za dohodnutých podmienok. Čas, kedy sa môže opcia uplatniť, nazývame *expiračný čas* a dohonutú cenu *expiračná cena.* Toto právo má určitú hodnotu, preto zaň treba v čase uzatvárania kontraktu zaplatiť určitú prémiu. Majiteľ call opcie získava rastom ceny akcie, jeho strata je limitovaná prémiou, ktorú zaplatil za opciu. Ak cena akcie klesne pod expiračnú cenu, opcia nebude uplatnená. Podobne držanie put opcie prináša zisk, ak cena akcie klesne pod expiračnú cenu. Našim záujmom je skúmať *americké opcie*, ktoré sú rovnaké ako európske, líšia sa len časom expirácie. Americké opcie môžu byť uplatnené v ľubovoľnom čase pred časom expirácie.

Našou úlohou je stanoviť cenu opcie tak, aby v čase uzatvárania kontraktu nebola zvýhodnená ani jedna strana. Inak by vznikol priestor pre *arbitrage* t.j. bezrizikový zisk, ktorý síce môže nastať, ale trvá len veľmi krátko. V kapitole 1.2 opíšeme Black-Scholesov model oceňovania opcií. Zvláštnu pozornosť venujeme okrajovým a koncovým podmienkam pre call opcie. Ukážeme, ako oceňovanie amerických opcií vedie na úlohu s voľnou hranicou.

1.2 Black-Scholesov model.

Na odhad vývoja ceny akcie sa používa model náhodnej prechádzky. Zvlášť predpokladáme, že cena akcie sa vyvíja podľa stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \tag{1.1}$$

kde S je cena akcie, t je čas, μ je očakávaná návratnosť akcie, σ je volatalita časového vývoja akcie a dS je zmena ceny akcie za malý časový krok dt. Znakom dw sme označili zmenu tzv. Wienerovho procesu. *Štandardný Wienerov proces* je parametrický systém náhodných veličín $\{w(t), t \geq 0\}$ pre ktorý platí:

1. $w(0) = 0$,
2. $dw = \epsilon\sqrt{dt}$, kde dw je prírastok w za malý časový interval dt a ϵ je náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti so strednou hodnotou 0 a rozptylom 1,
3. prírastky dw pre rôzne malé (po sebe nasledujúce) časové intervaly dt sú nezávislé.

Poznamenajme, že vzťah (1.1) sa dá napísať v tvare

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dw.$$

Z tohto zápisu je jasnejšie, že stochastická rovnica (1.1) vyjadruje relatívnu zmenu $\frac{dS}{S}$, nie absolútnu dS.

V rovnici (1.1) sme definovali σ ako štandartnú odchýlku ceny akcie. Ak položíme $\sigma = 0$, z rovnice vylúčime náhodnú časť, potom cena akcie rastie exponenciálne z časom. Keďže cena akcie je nepredvídateľná, rovnako môže klesať ako aj stúpať, vidíme, že náhodné správanie hrá dôležitú rolu v ďalšej analýze. Podrobnejšiu diskusiu o náhodných procesoch nájdete v skriptách [3] .

Označíme $V(S,t)$ ako cenu opcie. Budeme predpokladať, že $V(S,t)$ je hladká funkcia premenných S a t. Na základe Itôovej lemy prvý diferenciál funkcie V je daný vzťahom,

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS, \tag{1.2}$$

dôsledkom čoho dostávame ďaľšiu stochastiskú diferenciálnu rovnicu, teraz pre V

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw. \tag{1.3}$$

Presné znenie a náznak dôkazu Itôovej lemy sa dá nájsť v spomínaných skriptách [3].

Stratégiou Blacka a Scholesa bolo lineárne skombinovať difúzne rovnice (1.1) a (1.3) tak, aby eliminovali náhodnú časť. Jediný nepredvídateľný člen v obidvoch rovniciach je dw. Jeho vylúčením získame bezrizikové portfólio. Konštrukcia bezrizikového portfólia sa nazýva *hedging*. Zostrojíme takéto portfólio obsahujúce jednu opciu a Δ akcií. Takýto postup sa nazýva Δ *hedging*. Potom hodnota portfólia P je

$$P = V + \Delta S. \tag{1.4}$$

Zmena hodnoty tohto portfólia za malý časový interval dt, pri fixovanom Δ je

$$dP = dV + \Delta dS. \tag{1.5}$$

Dosadením (1.1), (1.3) do (1.5) dostávame stochastickú rovnicu pre P,

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \Delta \mu S \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \Delta \sigma S \right) dw. \tag{1.6}$$

Pomer Δ volíme tak, aby koeficient pred náhodným členom dw bol anulovaný. To sa podarí, ak položíme

$$\Delta = -\frac{\partial V}{\partial S}. \tag{1.7}$$

Výsledkom je diferenciálna rovnica pre cenu portfólia, ktorá už neobsahuje žiadny náhodný element,

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \tag{1.8}$$

Aby nevznikol priestor pre arbitrage, musí sa zmena hodnoty bezrizikového portfólia (1.8) rovnať výnosu získaného v banke spojitím úrokovaním depozitu hodnoty P za rovnaký časový krok dt. Pre bankové úročenie platí $dP = rPdt$, kde r je spojitá bezriziková úroková miera. Potom platí

$$rPdt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \tag{1.9}$$

Po dosadení (1.4) do (1.9) a skrátení dt dostávame rovnosť

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \tag{1.10}$$

ktorá je známa ako Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica na oceňovanie finančných derivátov. Všimnime si, že očakávaná cena akcie μ, v rovnici nevystupuje. Hodnota opcie závisí iba od volatality ceny akcie σ. To znamená, že dvaja investori sa môžu dohodnúť na cene opcie, bez ohľadu na ich očakávania vývoja ceny akcie.

Táto analýza predpokladá nulové transakčné poplatky, čo v praxi môže zabrániť bezrizikovým ziskom. Preto sa aj trhová cena opcie môže odlišovať od teoretickej hodnoty.

Na záver urobíme ešte jeden zovšeobecňujúci predpoklad. Nech sú na akciu vyplácané spojité dividendy, $DSdt$, kde $D > 0$ je konštantná dividendová miera. V našom prípade držíme Δ akcií v portfóliu, takže dostávame za každý časový krok čiastku $\Delta DSdt$. Potom (1.5) nahradíme

$$dP = dV + \Delta dS + \Delta DSdt$$

a rovnica (1.6) sa zmení nasledovne

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - DS\frac{\partial V}{\partial S} \right) dt$$

Odtiaľ použitím arbitrage argumentu $dP = rPdt$ dostávame

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - DS\frac{\partial V}{\partial S} = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S} \right). \tag{1.11}$$

Ľavá strana (1.11) reprezentuje výnos z bezrizikového, Δ hedgovaného portfólia a pravá strana výnos z ekvivalentného bankového depozitu. Môžeme písať v tvare

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0. \tag{1.12}$$

V ďalších úvahách sa budeme zaoberať iba opciami na akcie vyplácajuce spojité dividendy. Pripomenieme, že obidve rovnice (1.10) a (1.12) sú parabolické parciálne diferenciálne rovnice.

1.2.1 Počiatočné a okrajové podmienky pre Európsku call opciu.

Na chvíľu zameriame našu pozornosť na európsku call opciu, jej cenu označíme V_{ec}. Počiatočné podmienky pre V_{ec} sa vzťahujú k času expirácie, takže v podstate sú podmienkami koncovými. Označili sme E, expiračnú cenu opcie. Ak cena akcie S bude v čase expirácie menšia ako expiračná cena, opcia nebude uplatnená, a teda má nulovú hodnotu. Ak bude $S > E$, cena opcie musí byť rovná $S - E$, aby nenastala možnosť bezrizikového zisku. To znamená, že hodnota call opcie v čase $t = T$ je

$$V_{ec}(S,T) = \max(S - E, 0). \tag{1.13}$$

Hodnoty opcie v expiračnom čase sa tiež nazývajú *payoff funkcia*, táto funkcia je vyobrazená na obr. 1.1 , prerušovanou čiarou. Priestorové ohraničenia stanovíme pre $S = 0$ a $S \to \infty$. Z (1.1) vidíme, že ak cena akcie je raz rovná nule, potom je rovná nule už stále a opcia je preto bezcenná, takže

$$V_{ec}(0,t) = 0. \tag{1.14}$$

Ak cena akcie rastie nad všetky ohraničenia, cena call opcie je rovná cene akcie, zníženej o expiračnú cenu a zredukovanej o príjmy z dividend, môžme písať

$$V_{ec}(S,t) = Se^{-D(T-t)} - Ee^{-r(T-t)} \text{ ak } S \to \infty. \tag{1.15}$$

Pre európsku call opciu majú (1.12) - (1.15) explicitné riešenie, známe ako Black-Scholesov vzorec pre oceňovanie európskej call opcie

$$V_{ec}(S,t) = e^{-D(T-t)}SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{1.16}$$

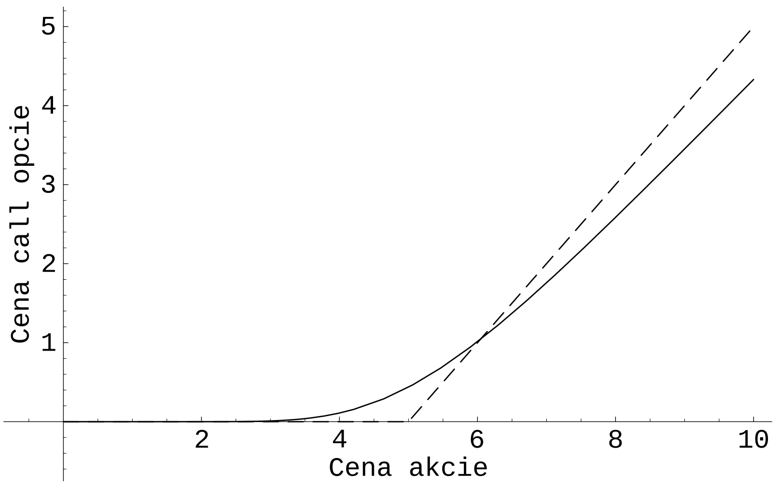
$$\text{kde} \qquad d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r - D + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\text{a} \qquad N(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2/2}dx$$

je distribučná funkcia normálneho rozdelenia pravdepodobnosti N(0,1). Presné odvodenie formule nájdete v skriptách [4].

1.2.2 Počiatočné a okrajové podmienky pre Americkú call opciu.

Je dobre známe, že hodnoty amerických a európskych call opcií sú identicky rovné ak $D = 0$. Vyplýva to z (1.16), $V_{ec} > \max(S - E, 0)$. Problém amerických opcií vzniká možnosťou skoršej expirácie. Na obr. 1.1 je načrtnutá $V_{ec}(S,t)$, vo



Obr. 1.1: Funkcia V_{ec} pre fixované t (—) a call-payoff funkcia (---).

fixovanom čase $t < T$, vypočítaná podľa (1.16) pre $D > 0$. Vidíme, že pre $S > S_f$ platí $V_{ec} < \max(S - E, 0)$. Ak by hodnota americkej opcie V_{ac} bola nižšia ako expiračná cena, niekto by kúpil opciu, okamžite ju uplatnil a jeho bezrizikový zisk by bol rovný $S - E - V_{ac}(S, t) > 0$. Takáto situácia nemôže trvať dlho, lebo sa ju všetci snažia využiť a tým ju zlikvidujú. Ďalej budeme predpokladať

$$V_{ac}(S, t) \geq \max(S - E, 0). \tag{1.17}$$

Preto môžme oceňovanie amerických opcií klasifikovať ako problém s voľnou hranicou. Voľnou hranicou budeme nazývať množinu bodov $(S_f(t), t)$, kde hodnota opcie V_{ac} prvý krát pretne payoff funkciu: $V_{ac}(S_f(t), t) = \max(S_f - E, 0)$. Pre $S < S_f$ platí, $V_{ac} > \max(S - E, 0)$ a Black-Scholsova rovnica (1.12) ostáva v platnosti. Ak $S > S_f$ Black-Scholesova analýza zlyháva. Pre $S > S_f$ hodnotu opcie jednoducho položíme rovnú payoff funkcii.

Keďže my apriori nepoznáme voľnú hranicu, kladieme na ňu isté podmienky. Budeme požadovať spojitosť V_{ac} a $\partial V / \partial S$ na voľnej hranici. Podmienky zapíšeme v tvare

$$V_{ac}(S_f(t), t) = S_f(t) - E, \qquad \frac{\partial V_{ac}}{\partial S}(S_f(t), t) = 1, \tag{1.18}$$

za predpokladu $S_f(t) \geq E$.

Rovnicou (1.12), vzťahujúcou sa ku koncovým podmienkam (1.13), okrajovej podmienke (1.14) a podmienkam na voľnej hranici (1.18) sme opísali problém voľnej hranice pre americké opcie.

1.3 Matematická analýza oceňovania amerických call opcií.

V tejto časti ukážeme spôsob riešenia problému ocenenia americkej call opcie ako úlohy s voľnou hranicou, navrhnutý D. Ševčovičom, [1] . Najskôr zhrňme formuláciu úlohy. Časový vývoj ceny americkej call opcie $V(S,t)$ je opísaný nasledujúcou parabolickou PDR:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r-D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \tag{1.19a}$$

$$V(0,t) = 0, \quad V(S_f(t),t) = S_f(t) - E, \quad \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = 1, \tag{1.19b}$$

$$V(S,T) = \begin{cases} S-E & \text{pre} \quad S \geq E \\ 0 & \text{pre} \quad 0 < S < E, \end{cases} , \tag{1.19c}$$

definovanou na časovo závislom intervale $S \in (0, S_f(t))$, kde $t \in (0,T)$. Konštanty majú nasledujúci význam: $E > 0$ je expiračná cena, $r > 0$ je úroková miera, $D > 0$ sú dividendy vyplácané na akciu. Naším cieľom je vyšetriť správanie voľnej hranice v Black-Scholesom modely oceňovania amerických call opcií. Ukážeme, ako sa dá problém voľnej hranice pre PDR previesť na nelineárnu integrálnu rovnicu.

1.3.1 Transformácia voľnej hranice na pevný obor.

Zámenou premenných prejdeme od problému voľnej hranice k PDR s fixovaným definičným oborom priestorovej premennej. Ako ukážeme, výsledkom bude PDR s časovo závislým koeficientom.

Zavedieme nasledujúcu zámenu premenných:

$$\tau = T - t, \quad x = \ln\left(\frac{\rho(\tau)}{S}\right), \quad \text{kde} \quad \rho(\tau) = S_f(T-\tau) \tag{1.20}$$

Vidíme, že $\tau \in (0,T)$, $x \in (0,\infty)$, keď $S \in (0, S_f(t))$. Ďalej definujeme pomocnú funkciu $\Pi = \Pi(x,\tau)$ nasledovne,

$$\Pi(x,\tau) = V(S,t) - S\frac{\partial V}{\partial S}(S,t). \tag{1.21}$$

Pripomeňme, že Π je portfólio pozostávajúce z jednej opcie a $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ zodpovedajúcich akcií. Jednoducho sa dá overiť, že platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x} = S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -S^3 \frac{\partial^3 V}{\partial S^3} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial x} = S\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} - \frac{\partial V}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.22}$$

kde $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\tau}$. Predpokladajme, že $V = V(S,t)$ je hladké riešenie (1.19), potom môžme (1.19a) derivovať podľa S. Dosadením výrazov (1.22) do derivovanej rovnice (1.19a), dostaneme parabolickú PDR pre $\Pi = \Pi(x,\tau)$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} + a(\tau)\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + r\Pi = 0 \tag{1.23}$$

s koeficientom závislým od času

$$a(t) = \frac{\dot{\rho}(\tau)}{\rho(\tau)} + (r - D - \frac{\sigma^2}{2})$$

Podmienky na voľnej hranici $V(S_f(t)) = S_f(t) - E$ a $\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = 1$ sa zmenia nasledovne:

$$\Pi(0,\tau) = -E, \qquad \Pi(+\infty,\tau) = 0. \tag{1.24}$$

Počiatočné podmienky určíme z payoff funkcie $V(S,T) = \max(S-E,0)$,

$$\Pi(x,0) = \begin{cases} -E & \text{pre } x < \ln\left(\frac{\rho(0)}{E}\right) \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \tag{1.25}$$

Poznamenajme, že $a(\tau)$ je závislé od riešenia $\Pi(x,\tau)$. A naviac začiatočný stav voľnej hranice $\rho(0)$ vystupuje v počiatočnej podmienke $\Pi(x,0)$. Preto najprv determinujeme vzťah medzi $\Pi(x,\tau)$ a funkciou voľnej hranice $\rho(\tau)$. Za predpokladu regularity Π a Π_x na hranici $x = 0$ a použitím (1.19b), (1.21) a (1.22) ľahko nahliadneme, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(S_f(t),t) = 0, \qquad S_f(t)\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = \rho(\tau), \\ S_f^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_f(t),t) = \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0,\tau). \end{aligned}$$

Dosadením vyššie uvedených rovností do (1.19a) získame,

$$\rho(\tau) = \frac{rE}{D} + \frac{\sigma^2}{2D}\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0,\tau). \tag{1.26}$$

Ostáva nám určiť počiatočný stav voľnej hranice $\rho(0)$. Znova predpokladáme, že riešenie Π je hladkou funkciou x na hranici $x = 0$, pre $\tau \to 0^+$. Presnejšie zapísané

$$\lim_{\tau \to 0^+} \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau) = \lim_{\tau \to 0^+,\ x \to 0^+} \frac{\partial \Pi}{\partial x}(x, \tau) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\partial \Pi}{\partial x}(x, 0) = 0. \tag{1.27}$$

Pretože $\Pi(x, 0) = -E$ pre x blízko 0, z (1.26) vyplýva, že

$$\rho(0) = \frac{rE}{D}. \tag{1.28}$$

Ukázali sme, ako sa dá za podmienok vhodnej regularity problém voľnej hranice (1.19) pretransformovať na pevné okrajové podmienky parabolickej PDR

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} + a(\tau)\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + r\Pi = 0 \tag{1.29a}$$

$$\Pi(0, \tau) = -E, \qquad \Pi(x, \tau) = 0, \text{ pre } x \to \infty, \quad \tau \in (0, T) \tag{1.29b}$$

$$\Pi(x, 0) = \begin{cases} -E & \text{pre} \quad 0 < x \leq \ln(\frac{r}{D}) \\ 0 & \qquad \text{inak} \end{cases} \tag{1.29c}$$

kde $a(\tau) = \frac{\dot\rho(\tau)}{\rho(\tau)} + (r - D - \frac{\sigma^2}{2})$ a

$$\rho(\tau) = \frac{rD}{E} + \frac{\sigma^2}{2D}\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau). \tag{1.30}$$

Pripomeňme, že úloha (1.29) spolu s (1.30) je nelineárna nelokálna parabolická rovnica. Treba pripomenúť, že ak $r < D$, potom $\rho(0) = E$ a koncová podmienka má tvar

$$\Pi(x, 0) = \begin{cases} -E & \text{ak} \quad x = 0 \\ 0 & \qquad \text{inak} \end{cases}$$

Tento fakt analyzujeme v kapitile 2.6, pre put opcie. Pre call opcie je táto úvaha rovnaká.

1.3.2 Redukcia na nelineárnu integrálnu rovnicu.

Cieľom tejto kapitoly je ukázať, ako sa úloha (1.29) - (1.30) zúži na nelineárnu integrálnu rovnicu pre $\rho(\tau)$ a explicitnú formulu pre $\Pi(x, \tau)$. Aplikujeme Fourierovu sínusovú a kosínusovú transformáciu na diferenciálnu rovnicu

(1.29). Pripomeňme definície týchto transformácií. Pre L^1 integrovateľné funkcie $f(x) \in L^1(R^+)$:

$$F_s(f)(\omega) = \int_0^\infty f(x) \sin \omega x \; dx \;, \qquad F_c(f)(\omega) = \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \; dx.$$

Inverzné transformácie sú dané takto,

$$F_s^{-1}(g)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x \; d\omega \;, \qquad F_c^{-1}(g)(x) = \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \; d\omega.$$

Jednoducho si každý môže overiť, že pre každú f, takú $f, f', f'' \in L^1(R^+)$ a $f(+\infty) = f'(+\infty) = 0$ platí

$$\begin{aligned} F_s(f') &= -\omega F_c(f), & F_c(f') &= -f(0^+) + \omega F_s(f), \\ F_s(f'') &= \omega f(0^+) - \omega^2 F_s(f), & F_c(f'') &= -f'(0^+) - \omega^2 F_c(f). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Na chvíľu predpokladajme,že $\rho(\tau)$ a následne aj $a(\tau)$ sú známe funkcie. Označme

$$p(\omega, \tau) = F_s(\Pi(., \tau))(\omega), \qquad q(\omega, \tau) = F_c(\Pi(., \tau))(\omega), \tag{1.32}$$

kde $\omega \in R^+, \tau \in (0, T)$. Aplikovanie sínusovej a kosínusovej intagrálnej transformácie na rovnicu (1.29a) a dosadenie (1.30) vedie na lineárny, autonómny systém ODR s parametrom ω

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} p(\omega, \tau) &= a(\tau)\omega q(\omega, \tau) - \alpha(\omega) p(\omega, \tau) - E\omega \frac{\sigma^2}{2}, \\ \frac{d}{d\tau} q(\omega, \tau) &= -\, a(\tau)\omega p(\omega, \tau) - \alpha(\omega) q(\omega, \tau) - Ea(\tau) - D\rho(\tau) + rE, \end{aligned} \tag{1.33}$$

kde

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2}(\sigma^2\omega^2 + 2r).$$

Systém rovníc (1.33) sa viaže k počiatočným podmienkam v $\tau = 0$, $p(\omega, 0) = F_s(\Pi(., 0))(\omega)$, $q(\omega, 0) = F_c(\Pi(., 0))(\omega)$. Z (1.29c) pre call opciu dostávame

$$p(\omega, 0) = \frac{E}{\omega}\left(\cos\left(\omega \ln \frac{r}{D}\right) - 1\right), \quad q(\omega, 0) = -\frac{E}{\omega} \sin\left(\omega \ln \frac{r}{D}\right) \tag{1.34}$$

Metódou variácie konštánt získame riešenie (1.33), (1.34),

$$\begin{aligned} p(\omega,\tau) &= -\frac{E}{\omega} + \tilde{p}(\omega,\tau) \quad \text{kde} \quad \tilde{p}(\omega,\tau) = \frac{E}{\omega} e^{-\alpha(\omega)\tau} \cos\left(\omega(A(\tau,0) + \ln(r/D))\right) \\ &\quad + \int_0^\tau e^{-\alpha(\omega)(\tau-s)} \left(\frac{Er}{\omega}\cos\omega A(\tau,s) + (Er - D\rho(s))\sin\omega A(\tau,s)\right) ds \\ q(\omega,\tau) &= -\frac{E}{\omega} e^{-\alpha(\omega)\tau} \sin\left(\omega(A(\tau,0) + \ln(r/D))\right) \\ &\quad + \int_0^\tau e^{-\alpha(\omega)(\tau-s)} \left(-\frac{Er}{\omega}\sin\omega A(\tau,s) + (rE - D\rho(s))\cos\omega A(\tau,s)\right) ds, \end{aligned} \tag{1.35}$$

kde

$$A(\tau,s) = \int_s^\tau a(\xi)d\xi = \ln\frac{\rho(\tau)}{\rho(s)} + (r - D - \frac{\sigma^2}{2})(\tau - s). \tag{1.36}$$

Z $F_s^{-1}(\omega^{-1}) = 1$ vyplýva,

$$\Pi(x,\tau) = F_s^{-1}(p(\omega,\tau)) = -E + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{p}(\omega,\tau)\sin\omega x \; d\omega. \tag{1.37}$$

Preto môžme (1.30) písať v tvare

$$\rho(\tau) = \frac{Er}{D} + \frac{\sigma^2}{D\pi}\int_0^\infty \omega\tilde{p}(\omega,\tau)\; d\omega. \tag{1.38}$$

Na výpočet pravej strany rovnosti využijeme,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha(\omega)\tau}\cos\omega A \; d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2\tau}}\exp\left(-r\tau - \frac{A^2}{2\sigma^2\tau}\right), \tag{1.39}$$

kde $A \in R$, $\tau > 0$ a $\alpha(\omega) = (\sigma^2\omega^2 + 2r)/2$. Každý si môže ľahko overiť,

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \frac{rE}{D}\Bigg[1 + \frac{\sigma}{r\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-r\tau - \frac{(A(\tau,0) + \ln(D/r)^2}{2\sigma^2\tau}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\tau \left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{D\rho(s)}{rE}\right)\frac{A(\tau,s)}{(\tau-s)}\right)\frac{\exp\left(-r(\tau-s) - \frac{A(\tau,s)^2}{2\sigma^2(\tau-s)}\right)}{\sqrt{\tau-s}} ds\Bigg], \end{aligned} \tag{1.40}$$

kde A je funkciou ρ opísanou (1.36).

Na zjednodušenie tejto integrálnej rovnice zavedieme pomocnú funkciu $H : [0,\sqrt{T}] \to R$ nasledovne

$$\rho(\tau) = \frac{rE}{D}\left(1 + \sigma\sqrt{2}H(\sqrt{\tau})\right). \tag{1.41}$$

Zámenou premenných $\tau = \xi^2,\ s = \xi^2 \cos^2\theta$ v rovnici (1.40) môžme H prepísať do tvaru

$$H(\xi) = flat_H(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\xi \cos\theta - 2\mathrm{cotg}\theta H(\xi\cos\theta) q_H(\xi,\theta)) e^{-r\xi^2 \sin^2\theta - g_H^2(\xi,\theta)} d\theta, \tag{1.42}$$

kde

$$flat_H(\xi) = \frac{1}{2r\sqrt{\pi}\xi} e^{-r\xi^2 - \left(g_H(\xi,\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2}\xi}\ln(r/D)\right)^2}$$

a

$$g_H(\xi,\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}\xi\sin\theta} \ln\left(\frac{1+\sigma\sqrt{2}H(\xi)}{1+\sigma\sqrt{2}H(\xi\cos\theta)}\right) + \frac{r-D-\sigma^2/2}{\sigma\sqrt{2}}\xi\sin\theta,$$

pre $\xi \in [0,\sqrt{T}],\ \theta \in (0,\frac{\pi}{2})$. Funkcia $H(\sqrt{\tau})$ sa dá numericky rozvinúť do Taylorovho radu okolo $\xi = 0$. Táto aproximácia je urobená v článku [1], paragraf 6. Pre numericky vyčíslenú funkciu $\rho(\tau)$ vieme urobiť spätnú zámenu premenných a vyjadriť $V(S, T-t)$ ako funkciu $\rho(\tau)$. Tento postup je tiež opísaný v [1], paragraf 5. V spomínanom článku sa nachádzajú aj numerické experimenty a porovnanie našej metódy s niektorými inými známymi postupmi.

2 Matematická analýza oceňovania amerických put opcií

V tejto časti sformulujeme úlohu oceňovania amerických put opcií ako úlohu na voľnej hranici a pokúsime sa aplikovať podobný postup riešenia, ako pre oceňovanie amerických call opcií. Zvlášť venujeme pozornosť polohám voľnej hranice a americkým put opciám nevyplácajúcim dividendy.

Pripomeňme, že put opcia je kontrakt, ktorý dáva svojmu držiteľovi právo, predať akciu v dohodnutom čase za dohodnutú cenu. Americké put opcie môžu byť uplatnené v ľubovoľnom čase pred časom expirácie. Rovnako ako call opcia aj put opcia spĺňa Black-Scholesovu rovnicu (1.12), líšia sa len hodnotami v čase expirácie.

2.1 Explicitná formula pre európske put opcie.

V skratke pripomeňme ako sa dá určiť hodnota európskej put opcie. Ako sme už spomenuli put opcia spĺňa Black Scholesovu analýzu, viď. kap. 1.2, čiže aj PDR (1.12). Ostáva stanoviť okrajové a koncové podmienky. Ak v čase expirácie $t = T$, bude $S > E$ opcia nebude uplatnená, teda je bezcenná. Aby nenastala možnosť bezrizikového zisku pre $S \leq E$, musí byť cena opcie rovná $E - S$. Hodnota put opcie v čase expirácie je opísaná nasledovne,

$$V_{ep}(S,T) = \max(E - S, 0). \tag{2.1}$$

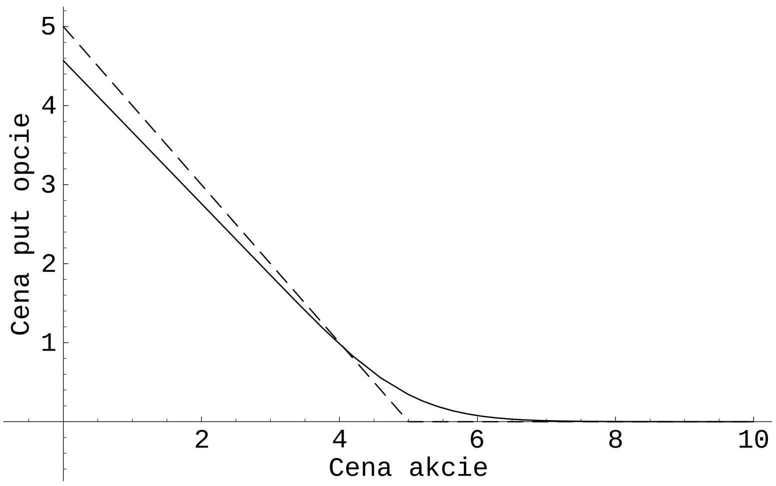
Put-payoff funkcia je načrtnutá na obr. 2.1 prerušovanou čiarou. Okrajové podmienky pre put opciu stanovíme takto,

$$V_{ep}(0,t) = Ee^{-r(T-t)}, \qquad V_{ep}(S,t) = 0 \quad \text{pre } S \to \infty \tag{2.2}$$

Úloha opísaná PDR (1.12) s (2.1), (2.2) má explicitné riešenie. Toto riešenie vieme vyjadriť pomocou tzv. *put-call parity*, čo znamená $V_{ec}(S,t) - V_{ep}(S,t) = Se^{-D(T-t)} - Ee^{-r(T-t)}$. Rovnosť ľahko overíme dosadením oboch strán rovnosti do Black Scholesovej rovnice (1.12).

Ak za V_{ec} v rovnici put-call parity dosadíme (1.16) máme

$$V_{ep}(S,t) = e^{-D(T-t)}SN(d_1) + Ee^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) - Se^{-D(T-t)}, \tag{2.3}$$



Obr. 2.1: Funkcia V_{ec} pre fixované t (—) a put-payoff funkcia (---).

kde d_1 a d_2 sú definované ako v rovnici (1.16) v kapitole 1.2. Pripomeňme, že úlohu sme opísali pre put opcie, na akcie vyplácajúce dividendy. Pre oceňenie opcie na akciu, ktorá navypláca dividendy si jednoducho položíme $D = 0$.

2.2 Formulácia úlohy ocenenia amerických put opcií.

Na obr. 2.1 je vykreslená $V_{ep}(S,t)$ v čase $t < T$, vypočítaná podľa (2.3) a payoff funkcia put opcie. Vidíme, že pre hodnoty $S < S_f$ je $V_{ep} < \max(E-S,0)$. Ak by sa hodnota americkej put opcie rovnala cene európskej put opcie, možnosť skoršieho uplatnenia americkej opcie by dala príležitosť vzniku bezrizikového zisku. Preto musíme predpokladať

$$V_{ap} \geq \max(E-S,0). \tag{2.4}$$

Táto vlastnosť je splnená, ak položíme $V_{ap}(S,t) = \max(E-S,0)$, pre $S < S_f$, inak ostáva v platnosti Black-Scholesova rovnica (1.12). Predovšetkým treba spomenúť, že na rozdiel od call opcií pre put opcie táto situácia nastáva aj pre $D = 0$. Množinu bodov $(S_f(t),t)$, kde $V_{ep}(S,t) = \max(E-S,0)$, pre $t < T$ nazývame voľná hranica. Hľadáme C^1 hladké riešenie V_{ap}, preto kladieme na voľnú hranicu podmienky:

$$V_{ap}(S_f(t),t) = E - S, \qquad \frac{\partial V_{ap}}{\partial S}(S_f(t),t) = -1 \tag{2.5a}$$

ak predpokladáme $S_f(t) < E$ a

$$V_{ap}(S_f(t), t) = 0, \qquad \frac{\partial V_{ap}}{\partial S}(S_f(t), t) = 0 \tag{2.5b}$$

pre $S_f(t) > E$. Vlastnosťami (2.5) sme pre V_{ap} nahradili počiatočnú podmienku $V_{ap}(0, t)$.

Časový vývoj ceny americkej put opcie vyplácajúcej dividendy $V(S,t)$ je opísaný nasledujúcou parabolickou PDR

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \tag{2.6a}$$

$$V(S_f(t), t) = E - S_f(t), \quad \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = -1, \quad V(S,t) = 0 \text{ pre } S \to \infty, \tag{2.6b}$$

$$V(S,T) = \begin{cases} E - S & \text{pre} \quad 0 < S \le E \\ 0 & \text{pre} \quad S > E. \end{cases} \tag{2.6c}$$

Podmienku na voľnej hranici sme zúžili na prípad $S_f(t) \le E$. Situácia $S_f(t) > E$ v praxi nemôže nastať, pozri paragraf 2.6. Konštanty r, D, E, T, σ majú rovnaký význam ako pre call opcie. Všimnime si, že úloha je definovaná na časovo závislom intervale $S \in (S_f(t), \infty)$, kde $t \in (0, T)$.

Uvedomme si niektoré užitočné vlastnosti amerických put opcií. Nižšie opísané úvahy výplývajú z čiste ekonomickej argumentácie.

1. $V_{ap}(S,t)$ je klesajúcou funkciou času, resp. rastúcou funkciou času expirácie. Vyplýva to z toho, že americké opcie môžu byť uplatnené v ľubovoľnom čase pred časom expirácie, čiže čím dlhšia životnosť opcie, tým väčšie riziko znáša vypisovateľ opcie.

2. Cena put opcie $V(S,t,D)$ je rastúcou funkciou dividendovej miery. Vyplýva to z výhody držať akciu, ktorá vypláca dividendy.

3. Voľná hranica $S_f(t, D)$ je klesajúcou funkciou dividendovej miery, čo plynie z predchádzajúceho bodu.

4. $S_f(t)$ je rastúcou funkciu času, pretože hodnota americkej put opcie je klesajúcou funkciou času.

2.3 Transformácia voľnej hranice na pevný obor.

Podobnou zámenou premenných ako pre americké call opcie prevedieme úlohu (2.6) na úlohu definovanú na pevnom intervale, ale s časovo závislým koeficientom v Black-Scholesovej PDR.

Použijeme nasledujúcu zámenu premenných

$$\tau = T - t, \quad x = -\ln\frac{\rho(\tau)}{S}, \quad \text{kde } \rho(\tau) = S_f(t). \tag{2.7}$$

Dostávame $\tau \in (0,T)$, $x \in (0,\infty)$ práve vtedy, ak $S \in (S_f(t),\infty)$. Zavedieme pomocnú funkciu

$$\Pi(x,\tau) = V(S,t) - S\frac{\partial V}{\partial S}(S,t). \tag{2.8}$$

Derivovaním (2.8) sa ľahko presvedčíme, že platí

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -S^3\frac{\partial^3 V}{\partial S^3} \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} - \frac{\dot\rho}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial x} = S\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} - \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dosadením výrazov (2.9) do rovnice (2.6a) derivovanej podľa S dostávame

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} + a(\tau)\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + r\Pi = 0, \tag{2.10}$$

kde

$$a(\tau) = -\frac{\dot\rho(\tau)}{\rho(\tau)} + (D - r + \frac{1}{2}\sigma^2)$$

Z okrajovej podmienky a vlastností $V(S,t)$ na voľnej hranici dostaneme,

$$\Pi(0,\tau) = E \qquad \Pi(x,\tau) = 0 \quad \text{pre } x \to \infty. \tag{2.11}$$

Druhá podmienka priamo nevyplýva z predchádzajúcich úvah, jej platnosť treba zdôvodniť. Derivovaním funkcie $\frac{V}{S}$ podľa S dostaneme $\Pi(x,\tau) = -S^2\frac{\partial V}{\partial S}\frac{V}{S}$. $\Pi(x,\tau)$ je klesajúcou funkciou premennej x. Nech by pre nejaké $S > \widetilde{S}$, $\widetilde{S} \gg 1$ platilo, $\Pi(x,\tau) \geq \alpha > 0$. Potom platí $-\frac{\partial}{\partial S}\frac{V}{S} \geq \frac{\alpha}{S^2}$. Integrovaním tejto rovnice od $\widetilde{S}$ do ∞, cez S dostávame $\frac{V(\widetilde{S},t)}{\widetilde{S}} \geq \frac{\alpha}{\widetilde{S}}$. To je spor s predpokladom $V(\widetilde{S},t) \to 0$.

Transformáciou koncových podmienok $V(S,T)$ dostávame počiatočné podmienky pre $\Pi(x,0)$,

$$\Pi(x,0) = \begin{cases} E & \text{pre } 0 < x \le \ln \frac{E}{\rho(0)} \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \tag{2.12}$$

Vidíme, že riešenie $\Pi(x,\tau)$ závisí od koeficientu $a(\tau)$, v ďalšom ukážeme ako samo $a(\tau)$ závisí na $\Pi(x,\tau)$. Keďže $a(\tau)$ je funkciou $\rho(\tau)$ objasníme najskôr závisloť $\rho(\tau)$ a $\Pi(x,\tau)$. Z $\rho(0) < E$ môžme predpokladať regularitu Π a Π_x na hranici $x = 0$. Derivovaním prvej podmienky na voľnej hranici (2.6b) podľa času na hranici $S = S_f(t)$ a dosadením $S = S_f(t)$ do (2.8) (2.9) dostávame

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S_f(t),t) = 0, \qquad S_f(t)\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = -\rho(\tau),$$
$$S_f^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_f(t),t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0,\tau).$$

Potom z Black-Scholesovej PDR pre $S = S_f(t)$ ľahko ukážeme platnosť rovnosti

$$D\rho(\tau) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0,\tau) + rE \tag{2.13}$$

Vzorec pre ρ je rovnaký ako u call opcií, ale zámerne ho píšeme v tomto tvare, aby sme ľahšie analyzovali úlohu pre $D = 0$. Ostáva nám určiť $\rho(0)$. Aby sme boli presní, budeme predpokladať konvergenciu limít (1.27) z kapitoly 1.3. Ak $D > 0$ jednoducho dosadíme a máme

$$\rho(0) = \frac{rE}{D}. \tag{2.14a}$$

Ak $D = 0$,

$$\rho(0) = E, \tag{2.14b}$$

čo vyplýva z vlastnosti (3) amerických put opcií. Označme D_ϵ dividendovú mieru $D = \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$ a $D_0 = 0$. Z vlastnosti (3) vyplýva: $S_f(t, D_\epsilon) > S_f(t, D_0)$. Táto nerovnosť musí platiť pre každé $\epsilon > 0$. Keďže platí $\rho(0) \le E$, dostávame $\rho(0) = E$.

Na záver zhrňme výsledok celej transformácie. Za podmienok vhodnej regularity sme úlohu na voľnej hranici previedli na

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} + a(\tau)\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + r\Pi = 0 \tag{2.15a}$$

$$\Pi(0,\tau) = E, \qquad \Pi(x,\tau) = 0, \quad \text{pre } x \to \infty,\ \tau \in (0,T) \tag{2.15b}$$

$$\Pi(x,0) = \begin{cases} E & \text{pre} \quad x < -\ln(\frac{\rho(0)}{E}) \\ 0 & \qquad\text{inak} \end{cases} \tag{2.15c}$$

kde $a(\tau) = -\frac{\dot\rho(\tau)}{\rho(\tau)} - (r - D - \frac{\sigma^2}{2})$ a $\rho(0)$ je opísané rovnicami (2.14). Ďalej platí

$$D\rho(\tau) = rE + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0,\tau). \tag{2.16}$$

Ak $D > 0$, systém (2.15) vieme riešiť analogicky ako pre call opcie.

2.4 Redukcia na nelineárnu integrálnu rovnicu.

V tejto časti ukážeme ako sa dá previesť úloha (2.15) na systém integrálnych rovníc. Vidíme že úloha sa delí na dva prípady $D > 0$ a $D = 0$. Spoločne pre obe možnosti budeme predpokladať $\Pi(.,\tau) \in L^1(R^+)$. Potom môžme aplikovať sínusovú a kosínusovú integrálnu transformáciu. Tieto transformácie a relácie medzi nimi sme už opísali v kapitole 1.3. Používame označenie

$$p(\omega,\tau) = F_s(\Pi(.,\tau))(\omega), \qquad q(\omega,\tau) = F_c(\Pi(.,\tau))(\omega), \tag{2.17}$$

kde $\omega \in R^+,\ \tau \in (0,T)$. Použitím týchto transformácií pre rovnicu (2.15a) dostávame systém lineárnych autonómnych rovníc:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}p(\omega,\tau) &= \ \omega a(\tau) q(\omega,\tau) - \alpha(\omega) p(\omega,\tau) + \frac{\sigma^2}{2}\omega E \\ \frac{d}{d\tau}q(\omega,\tau) &= -\omega a(\tau) p(\omega,\tau) - \alpha(\omega) q(\omega,\tau) + E a(\tau) - D\rho(\tau) + Er, \end{aligned} \tag{2.18}$$

kde $\alpha(\omega) = (\sigma^2\omega^2 + 2r)/2$. Rovnosti (2.18) sa vzťahujú k počiatočným podmienkam v $\tau = 0$, $p(\omega,0) = F_s(\Pi(.,0))(\omega)$, $q(\omega,0) = F_c(\Pi(.,0))(\omega)$. V prípade put opcie máme

$$p(\omega,0) = \frac{E}{\omega}\left(1 - \cos\left(-\omega \ln\frac{\rho(0)}{E}\right)\right), \quad q(\omega,0) = \frac{E}{\omega}\sin\left(-\omega\ln\frac{\rho(0)}{E}\right) \tag{2.19}$$

Použitím metódy variácie konštánt pre riešenie systému lineárnych neautonómnych ODR, dostávame riešenie (2.18), (2.19)

$$\begin{aligned} p(\omega,\tau) &= \frac{E}{\omega} + \tilde{p}(\omega,\tau) \quad \text{kde} \quad \tilde{p}(\omega,\tau) = -\frac{E}{\omega}e^{-\alpha(\omega)\tau}\cos\left(\omega(A(\tau,0) - \ln(\rho(0)/E))\right) \\ &+ \int_0^\tau e^{-\alpha(\omega)(\tau-s)}\left(-\frac{Er}{\omega}\cos\omega A(\tau,s) - (D\rho(s) - Er)\sin\omega A(\tau,s)\right) ds \\ q(\omega,\tau) &= \frac{E}{\omega}e^{-\alpha(\omega)\tau}\sin\left(\omega(A(\tau,0) - \ln(\rho(0)/E))\right) \\ &+ \int_0^\tau e^{-\alpha(\omega)(\tau-s)}\left(\frac{Er}{\omega}\sin\omega A(\tau,s) - (D\rho(s) - Er)\cos\omega A(\tau,s)\right) ds \end{aligned} \tag{2.20}$$

kde

$$A(\tau,s) = \int_s^\tau a(\xi)d\xi = -\ln\frac{\rho(\tau)}{\rho(s)} + (D - r + \frac{\sigma^2}{2})(\tau - s). \tag{2.21}$$

Použitím inverznej sínusovej Fourierovej transformácie a vlastnosti $F_s^{-1}(\omega^{-1}) = 1$ dostávame,

$$\Pi(x,\tau) = E + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{p}(\omega,\tau)\sin\omega x \; d\omega. \tag{2.22}$$

Do tohto bodu je analýza rovnaká pre put opciu vyplácajúcu aj nevyplácajúcu dividendy. V ďalšom postupe musíme tieto dva prípady odlíšiť.

2.4.1 Rovnica voľnej hranice americkej put opcie, na akciu vyplácajúcu dividendy.

Pre $D > 0$ v rovnici (2.20) môžme namiesto $\rho(0)$ písať pravú stranu rovnosti (2.14). Dosadením (2.22) do rovnosti (2.16) získame

$$\rho(\tau) = \frac{Er}{D} + \frac{\sigma^2}{D\pi}\int_0^\infty \omega\tilde{p}(\omega,\tau) \; d\omega. \tag{2.23}$$

Na výpočet pravej strany rovnosti využijeme platnosť (1.39) a dostaneme:

$$\begin{aligned} \rho(\tau) = \frac{rE}{D}\Bigg[& 1 - \frac{\sigma}{r\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-r\tau - \frac{(A(\tau,0) + \ln(D/r)^2}{2\sigma^2\tau}\right) \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\tau \left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{D\rho(s)}{rE}\right)\frac{A(\tau,s)}{\tau - s}\right)\frac{\exp\left(-r(\tau-s) - \frac{A(\tau,s)^2}{2\sigma^2(\tau-s)}\right)}{\sqrt{\tau - s}} \, ds\Bigg], \end{aligned} \tag{2.24}$$

kde A je funkciou ρ opísanou (2.21),

$$\rho(0) = \begin{cases} \frac{rE}{D} & \text{ak } r < D \\ E & \text{inak.} \end{cases} \tag{2.25}$$

Tento fakt odôvodníme v kapitole 2.6.

Ďaľej sa dá táto nelineárna integrálna rovnica rozvinúť v okolí $\tau = 0$ a numericky výpočítať $\rho(\tau)$. Spätnou transformáciou dostaneme vyjadrenie pre $V(S, T-t)$. Tieto kroky nie sú jednoduché a nebudeme sa nimi zaoberať. Pre call opcie možno takýto postup nájsť v [1] a aplikovať ho na put opcie.

2.4.2 Rovnica voľnej hranice put opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy.

Pre opciu nevyplácajúcu dividendy môžme vo vzťahoch (2.20) a (2.21) položiť $D = 0$. Potom z rovnosti (2.16) vyplýva

$$0 = Er + \frac{\sigma^2}{\pi}\int_0^\infty \omega\tilde{p}(\omega,\tau)\, d\omega. \tag{2.26}$$

Analogicky ako pre $D > 0$ s využitím $\rho(0) = E$ ľahko nahliadneme, že

$$\begin{aligned} 1 =& \frac{\sigma}{r\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-r\tau - \frac{(A(\tau,0))^2}{2\sigma^2\tau}\right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\tau \left(\sigma - \frac{A(\tau,s)}{\sigma(\tau-s)}\right)\frac{\exp\left(-r(\tau-s) - \frac{A(\tau,s)^2}{2\sigma^2(\tau-s)}\right)}{\sqrt{\tau-s}}\, ds, \end{aligned} \tag{2.27}$$

kde $A(\tau,s) = -\ln\frac{\rho(\tau)}{\rho(s)} + (\frac{\sigma^2}{2} - r)(\tau - s)$. Analýze tejto rovnice venujeme nasledujúcu kapitolu.

2.5 Aproximácia voľnej hranice americkej put opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy.

V čase dokončovania tejto práce, rovnaký problém riešil aj R. Stamicar a J. Chadam, ktorý navrholi aj kroky nasledujúcej analýzy.

Úlohu (2.27) budeme analyzovať v čase blízkom času expirácie. Riešenie navrhneme v tvare:

$$\rho(\tau) = Ee^{k\tau - \sigma x_f(\tau)}, \tag{2.28}$$

kde $k = \frac{\sigma^2}{2} - r$. Ďalej predpokladajme, že $x_f(0) = 0$. Dosadením do rovnice (2.27) dostávame

$$x_f = \sqrt{2\tau}\sqrt{-\ln\left(\frac{r\sqrt{2\pi\tau}}{\sigma}e^{r\tau}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(\tau)\right)\right)}, \tag{2.29}$$

kde

$$f(\tau) = \int_0^\tau \left(\sigma - \frac{x_f(\tau) - x_f(s)}{\tau - s}\right)\frac{\exp\left(-r(\tau - s) - \frac{(x_f(\tau) - x_f(s))^2}{2(\tau - s)}\right)}{\sqrt{t - s}}ds.$$

Substitúciou premenných vo vnútri integrálu $s = \tau\sin^2\theta$ prejdeme na tvar

$$f(\tau) = 2\int_0^{\frac{\Pi}{2}}(\sigma\sqrt{\tau}\sin\theta - \sqrt{2}\tan\theta g(\tau,\theta))e^{-r\tau\cos^2\theta - g^2(\tau,\theta)}d\theta, \tag{2.30}$$

kde

$$g(\tau,\theta) = \frac{x_f(\tau) - x_f(\tau\sin^2\theta)}{\cos\theta\sqrt{2\tau}}. \tag{2.31}$$

Hľadajme funkciu $x_f(\tau)$ v tvare

$$x_f(\tau) = \sqrt{2\tau}\beta(\tau), \tag{2.32}$$

potom

$$g(\tau,\theta) = \frac{1}{\cos\theta}\left(\beta(\tau) - \sin\theta\beta(\tau\sin^2\theta)\right). \tag{2.33}$$

Poznamenajme, že $g(\tau,\theta) \to 0$, ak $\theta \to \frac{\pi}{2}$ a $g(\tau,0) = \beta(\tau)$. Navrhnime funkciu $\beta(\tau)$ v tvare $\beta(\tau) = a(\ln\tau)^p$,

$$g(\tau,\theta) = \frac{a(\ln\tau)^p}{\cos\theta}\left(1 - \sin\theta\left(1 + \frac{\ln(\sin^2\theta)}{\ln\tau}\right)^p\right). \tag{2.34}$$

Ak $\frac{\ln\sin^2\theta}{\ln\tau} \ll 1$, to jest keď $\theta \ll \sqrt{\tau}$, potom platí

$$g(\tau,\theta) \approx \beta(\tau)\frac{(1 - sin)\theta}{\cos\theta} \tag{2.35}$$

Vo vzťahu (2.30) môžme pre $\tau \to 0$ zanedbať členy $\sigma\sqrt{t}\sin\theta e^{-r\tau\cos^2 - g^2(\tau,\theta)}$ a $e^{-r\tau\cos^2\theta}$. Potom platí

$$\frac{f(\tau)}{2} \approx -\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\theta g(\theta,\tau)e^{-g^2(\theta,\tau)}\,d\theta. \tag{2.36}$$

Zavedieme nasledujúcu zámenu premenných $u = \beta(\tau)(1-\sin\theta)/\cos\theta$. Potom platí

$$
\begin{aligned}
\frac{f(\tau)}{2\sqrt{2}} &= \int_0^{\beta(\tau)} e^{-u^2}\frac{\beta^2-u^2}{\beta^2+u^2}\,du \\
&= \int_0^{\beta(\tau)} e^{-u^2}\frac{1}{1+(\frac{u}{\beta})^2}\,du - \frac{1}{\beta(\tau)^2}\int_0^{\beta(\tau)} e^{-u^2}\frac{1}{1+(\frac{u}{\beta})^2}\,du \\
&= \int_0^{\beta(\tau)} e^{-u^2}\left(1-\left(\frac{u}{\beta}\right)^2+\dots\right)du - \frac{1}{\beta^2}\int_0^{\beta(\tau)} u^2e^{-u^2}\left(1-\left(\frac{u}{\beta}\right)^2+\dots\right)du.
\end{aligned}
$$

Využitím vlastnosti $\beta(\tau)\to-\infty$ druhý z integrálou konverguje k 0 a

$$\lim_{\beta(\tau)\to-\infty}\int_{\beta(\tau)}^0 e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

z toho vyplýva $f(\tau) = -\sqrt{2\pi}$. Potom dostávame

$$x_f(\tau) \approx \sqrt{2\tau}\sqrt{-\ln\left(\frac{2r\sqrt{2\pi}}{\sigma}\sqrt{\tau}e^{-rt}\right)}. \tag{2.37}$$

Dosadením do (**??**), získavame aproximáciu voľnej hranice

$$\rho(\tau) \approx Ee^{(\frac{\sigma^2}{2}-r)\tau}e^{-\sigma\sqrt{-\tau\ln(\frac{8r^2\pi}{\sigma^2}\tau e^{2r\tau})}} \tag{2.38}$$

Tento výsledok porovnáme s numerickými výpočtami v poslednej časti tejto práce.

2.6 Pozície voľnej hranice.

Od paragrafu 2.3 počítame s predpokladom $S_f(t)\le E$, resp. $\rho(\tau)\le E$. Ostáva nám určiť, kedy táto situácia nastáva a vylúčiť možnosť, keď $\rho(\tau)>E$.

Najskôr vyšetríme prípad $\rho(\tau)>E$. Nech v nejakom čase $\bar\tau$ nastane situácia $\rho(\bar\tau)>E$. Potom riešením systému (2.6) s podmienkami na voľnej hranici (2.5b), je payoff funkcia. Predpokladáme, že funkcia voľnej hranice $\rho(\tau)$ je spojitá, preto aj v nejakom okolí $o(\bar\tau)$ musí platiť $\rho(\tau)>E$, pre $\tau\in o(\bar\tau)$ a $V(S,T-t)=$ payoff. Z tejto úvahy vyplýva, že medzi dvoma rôznymi časmi je hodnota americkej put opcie rovnaká, čo je spor s 1. vlastnosťou amerických put ocií, že cena americkej opcie je klesajúcou funkciou času.

Takže môže nastať iba situácia $\rho(\tau) = E$, alebo $\rho(0) < E$. Treba určiť, kedy tieto možnosti nastávajú. Keďže $\rho(\tau)$ je klesajúcou fciou τ, (vlastnosť 4), môžme naše úvahy zúžiť na $\rho(0) \leq E$. Zo vzťahu (2.14) vidíme, že $\rho(0) < E$ práve vtedy, keď $r < D$. $\rho(0) = E$, ak $r = D$ a $r > D$, pretože platí $\rho(0) \geq E$.

3 Numerické experimenty.

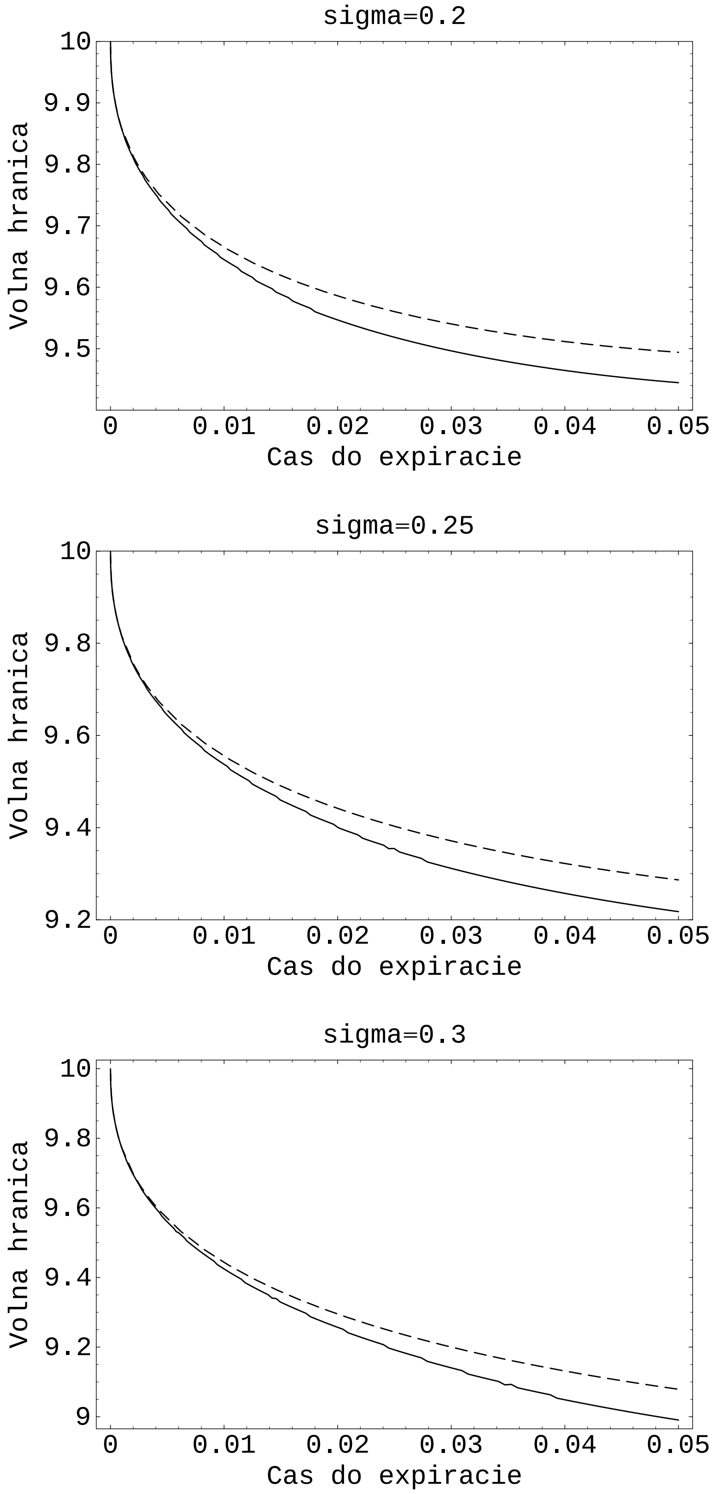
V tejto časti porovnáme nami vypočítané hodnoty voľnej hranice s voľnou hranicou vypočítanou pomocou programu Option tutor, metódou trinomiálneho stromu. Metóda trinomiálneho stromu je založená na aproximácii derivácie pomernými diferenciamy, po osi časovej aj priestorovej. Opäť pripomínam, že naša aproximácia je robená pre veľmi malé časové obdobie. Na obr. 3 je postupne vyobrazená nami získaná funkcia voľnej hranice prerušovanou čiarou a z trinomiálneho stromu odvodené hodnoty voľnej hranice plnou čiarou pre rôzne hodnoty parametra σ a pevné $r = 0.1$, $E = 10$. Z grafov vidíme, že pre väčšie hodnoty parametra σ sa naša aproximácia lepšie zhoduje s numericky získanými hodnotami.

Pre zaujímavosť uvedieme ešte jedno pozorovanie. Ak dáme vykresliť funkcie $\rho(\tau)$ pre $\tau > 0.1$, zistíme, že obe metódy po čase vykazujú opätovný nárast voľnej hranice, čo je spor s vlastnosťou voľnej hranice, viď obr 3.2. Nárast ukazuje na to, že v prípade väčšieho τ naša analyza neplatí. Keďže nárast voľnej hranice nemôže nastať, predpokladáme chybu aj v použitom programe.

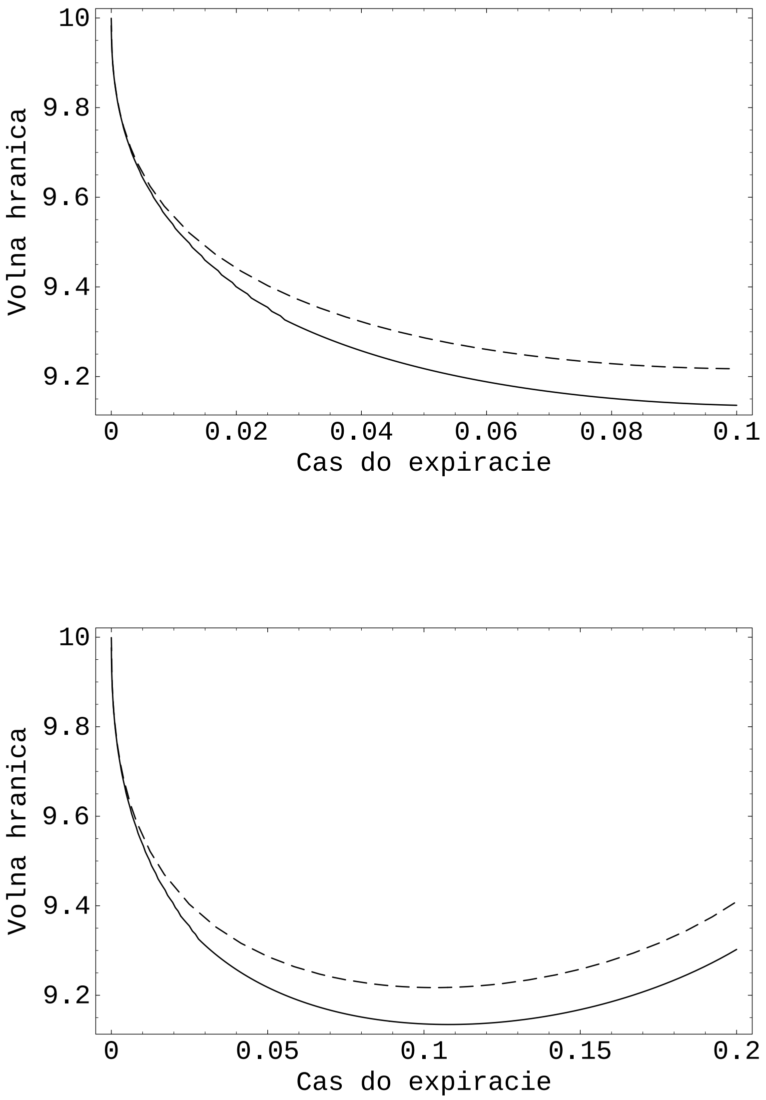
3.1 Analýza citlivosti nájdeného vzorca.

Na záver preskúmame ešte niektoré vlastnosti nami získanej rovnice. Nezabudnime, že aproximácia je najlepšia v čase blízkom času expirácie. Keď fixujeme $\tau = 0.001$, zodpovedá to približne ôsmim hodinám.

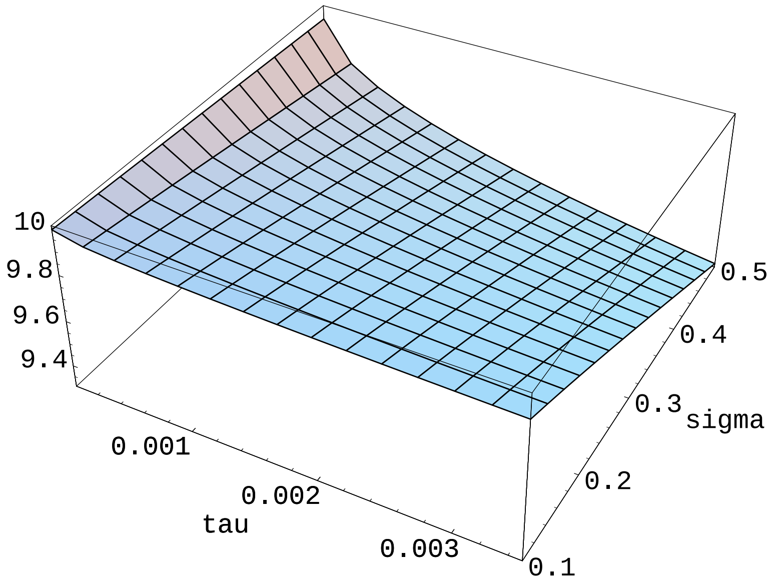
Z obr. 3.3 a 3.4 vidíme, že voľná hranica klesá z rastúcou volatalitou a rastie s úrokovou mierou. Bolo by zaujímavé preskúmať závislosť na pomere týchto dvoch parametrov. Na obrázku 3.1 vidíme, že závislosť voľnej hranice od σ je oveľa silnejšia ako od r.



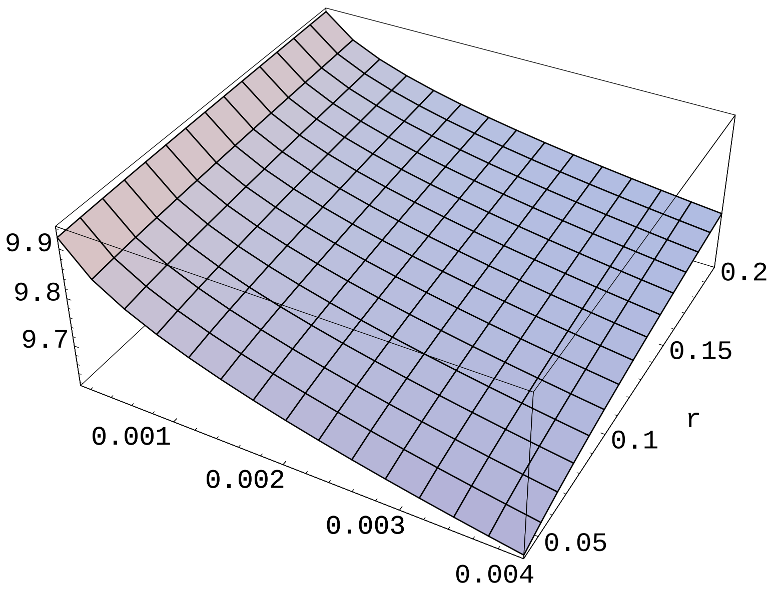
Obr. 3.1: Voľná hranica vypočítaná numericky (—), explicitne (- - -), postupne pre $\sigma = 0.15,\ 0.25,\ 0.3$.



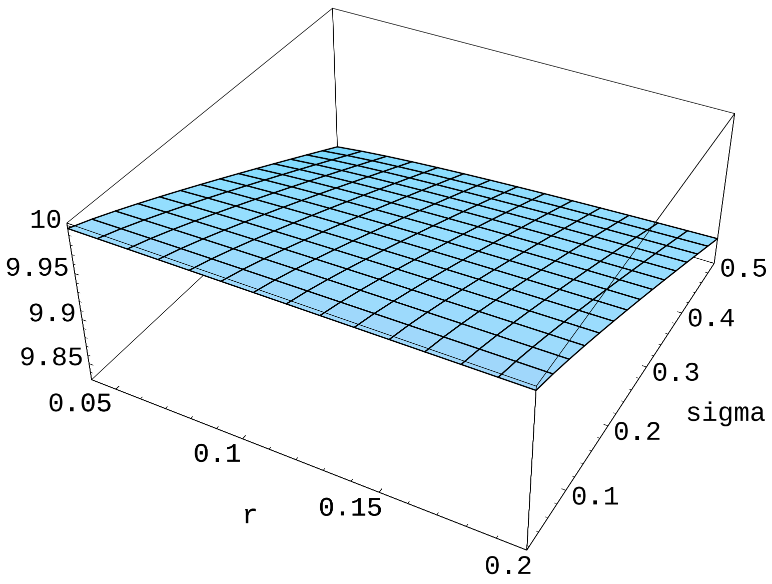
Obr. 3.2: Voľná hranica vypočítaná numericky (—), explicitne (- - -).



Obr. 3.3: Voľná hranica v závislosti od σ.



Obr. 3.4: Voľná hranica v závislosti od r.



Obr. 3.5: Voľná hranica v závislosti od σ a r vo fixovanom čase.

Záver

V tejto práci sme zhrnuli aparát potrebný na analýzu voľnej hranice amerických opcií a rozšírili ho o naše zistenia o správaní sa voľnej hranice put opcií. Prvá časť je venovaná call opciám. Tu sme ukázali, ako sa dá problém ocenenia americkej call opcie previesť na úlohu na voľnej hranici. Tento problém sa dá pomocou Fouriérovej sínusovej a kosínusovej transformácie previesť na integrálnu rovnicu. Takúto rovnicu už vieme numericky riešiť.

V druhej časti sme podobným spôsobom analyzovali voľnú hranicu pre put opcie. Zvlášť sme riešili úlohu pre put opcie na akciu vyplácajúcu dividendy a osobitnú pozornosť sme venovali put opciám na akciu nevyplácajúcu dividendy. Dospeli sme k integrálnej rovnici, ktorej asymptotické správanie sme vyšetrili v čase blýzkom času expirácie. Súčasne sa rovnakou úlohou zaoberali aj R. Stamicar a J. Chadam, ktorý nezávisle dospeli k rovnakej integrálnej rovnici a navrhli niektoré kroky asymptotickej analýzi voľnej hranice. Za ich pomoc pri riešení tohto problému im chcem aj touto cestou poďakovať.

Správnosť nájdeného riešenia sme overili porovnaním s numericky počítanými hodnotami.

Literatúra

[1] D. Ševčovič: Analysis of the free boundary for the Black-Scholes equation. (preprint)

[2] J. N. Dewynne, S.D. Howison, J. Rupf and P. Wilmot: Some mathematical results in pricing of American options. Journal of Applied Mathematics 1993, str. 381-398.

[3] J.Komorník, M. Komorníková, K. Mikula: Modelovanie ekonomických a finančných procesov. Bratislava, UK 1998.

[4] D. Ševčovič: Parciálne diferenciálne rovnice - skripta. www. iam. fmph. uniba. sk / skripta

[5] J. Veit: Integrální transformace. Praha, SNTL 1979

[6] F. Black and M. Scholes: The pricing of options and corporate liabilities. J. Political Economy 1973, 637 - 654.

[7] Ph. Hartman: Ordinary diferential equations. JOHN WILLEY & SONS, New York 1964

[8] R. Stamicar, J. Chadam: Osobné zdelenie, University of Toronto

[9] J. Hull: Options, futures and other derivative securities, Prentice Hall, 1989.