II. VÝVOJ CIEN AKCIÍ, CUDZEJ MENY A ÚROKU

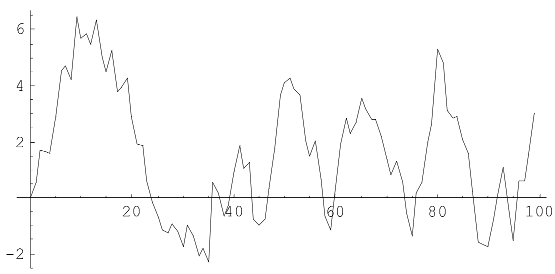
Keďže deriváty sú v podstate stávky na cenu underlying instrumentu v budúcnosti, nemá zmysel používať ako underlying instrument niečo, čoho budúcu cenu vieme deterministicky určiť. Keď si pozrieme vývoj cien akcií alebo výšky úrokov, zistíme, že na modelovanie potrebujeme stochastické nástroje.

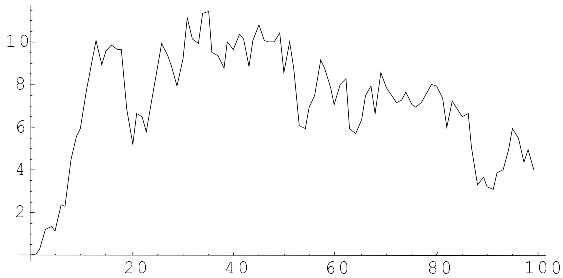
II.1. Ceny akcií

Ceny akcií sa menia v čase tak, že nie sme schopní s istotou vystihnúť pohyb ceny akcie v budúcnosti. O hocakej premennej, ktorej hodnota sa mení v čase náhodne, hovoríme, že je *stochastický proces*. Presnejšie, stochastický proces je definovaný ako postupnosť $\{X(t)\}_{t\in T}$, kde $X(t)$ je náhodná premenná, ktorá môže byť diskrétna alebo spojitá, T je podmnožina R^1. Proces môže byť tiež spojitý (ak T je interval) alebo diskrétny (ak T je spočitateľná množina) v čase. Pre oceňovanie akcií sa používa proces tvorený spojitou náhodnou premennou, ktorý je spojitý v čase (ďalej len spojitý proces). To znamená, že akcia môže v ľubovoľnom čase nadobudnúť ľubovoľnú hodnotu. V praxi sa však ceny akcií (v USA) udávajú v násobkoch osminy dolára a zmeny cien možno zistiť pri otvorení burzy. Napriek tomu sa spojitý proces ukazuje byť najlepším modelom ceny akcie.

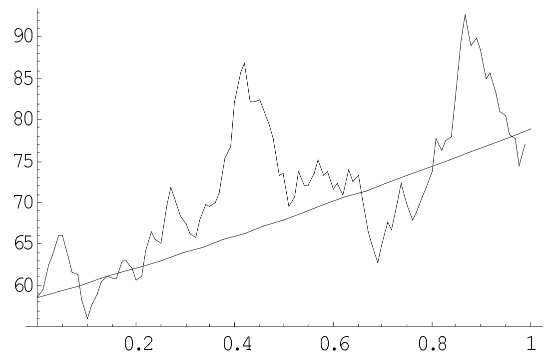
Ceny akcií sa obyčajne modelujú ako tzv. *Markovov proces*, čo je stochastický proces, kde iba súčasná hodnota je relevantná pre odhad budúcnosti. Vývoj hodnôt v minulosti, ako aj spôsob, akým sa dosiahla súčasná hodnota, sú nepodstatné (pre presnú definíciu Markovovho procesu viď prílohu A). Aplikované na akcie to znamená, že pre určenie budúceho pohybu ceny akcie je nepodstatná jej minulosť, ale len súčasná hodnota. Predpoveď budúcej ceny je neistá a je vyjadrená ako rozdelenie pravdepodobnosti. Markovova vlastnosť hovorí, že toto rozdelenie závisí len od súčasnej ceny akcie, nie od ceny pred mesiacom alebo rokom.

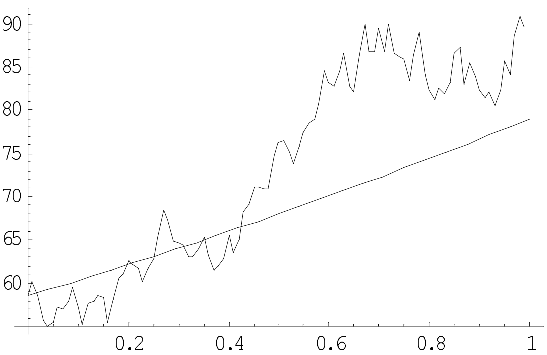
Špeciálnym prípadom Markovovho procesu je tzv. *Wienerov proces*, ktorý je vo fyzike používaný ako model pohybu častice, do ktorej naráža veľa iných častíc. Často sa tento proces nazýva tiež Brownov pohyb (viď prílohu A pre definíciu). Možné priebehy Wienerovho procesu sú znázornené na nasledujúcich obrázkoch:





Takto definovaný proces však nie je vhodný na modelovanie ceny akcie, pretože jeho stredná hodnota je vždy rovná jeho začiatočnej hodnote (ktorá sa niekedy definuje ako 0) a variancia je úmerná času s konštantou 1. Pri pohľade na dlhodobý vývoj cien akcií (napr. za polstoročie) je vidieť rast cien. Taktiež rozptyl cien sa líši pre jednotlivé akcie, čo reprezentuje mieru risku z držania danej akcie. Preto bol Wienerov proces zovšeobecnený na proces *x*, ktorý je definovaný ako: $dx = a\,dt + b\,dW_t$. Zo vzťahu vidno, že proces sa skladá z deterministickej a stochastickej zložky. Ak by napr. $b = 0$, proces by sa dal vyjadriť ako $x = x_0 + at$. Písmeno a reprezentuje tzv. *drift* (v prípade akcie je to očakávaný výnos), písmeno b tzv. *volatilitu* (v prípade akcie smerodajná odchýlka vývoja ceny). Ak predpokladáme, že a alebo b sa môžu v priebehu času meniť, dostaneme *Itôov proces*: $dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dW_t$, kde a aj b sú spojité funkcie oboch argumentov. Na obrázkoch je príklad možných priebehov procesu $dx = 0.3xdt + 0.29xdW_t$ porovnaných s deterministickým priebehom (keď je $b(x, t) = 0$):





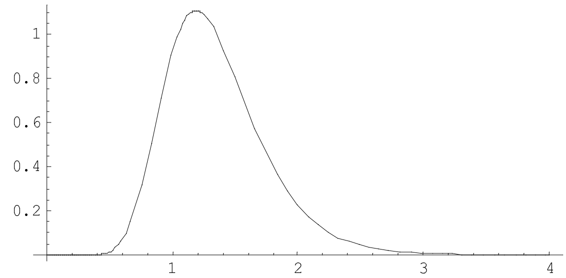
V prípade akcií sa očakávaný výnos aj rozptyl cien udáva v percentách nezávisle od aktuálnej ceny akcie *S*: $dS = \mu(t)Sdt + \sigma(t)SdW_t$, kde $\mu(t)$ je návratnosť akcie v percentách ceny, $\sigma(t)$ je volatilita návratnosti akcie (alebo tiež smerodajná odchýlka) v percentách. Často sa tiež predpokladá, že volatilita aj drift sú konštantné. Podľa vzťahu vidíme, že dS je Itôov proces. Tento zápis sa tiež vyskytuje v tvare:

$$\frac{dS}{S} = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t .$$

Pomocou Itôovej lemy (viď prílohu A) si môžeme ľahko overiť, že:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)t + \sigma(t)W_t} .$$

Ak si označíme $Y_t = \left(\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)t + \sigma(t)W_t$, potom platí, že $S_t = S_0 e^{Y_t}$. Rozdelenie náhodnej premennej Y_t je $N\left(\left(\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)t, \sigma^2(t)t\right)$. Potom S_t má lognormálne rozdelenie. Na obrázku dole je graf hustoty rozdelenia náhodnej premennej s lognormálnym rozdelením pre $\mu = 0.3$ a $\sigma = 0.29$:



II.2. Ceny cudzích mien

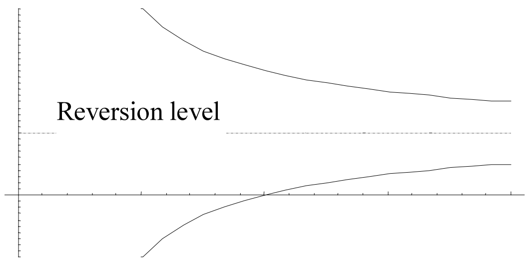
Definujme S_t ako hodnotu vybranej cudzej meny v korunách v čase t (spot exchange rate). Držiteľ cudzej meny ju môže zhodnotiť s bezrizikovým úrokom r_f napr. na devízovom účte. Za predpokladu, že cudziu menu môžeme voľne predávať a nakupovať, sa táto správa presne ako akcia vyplácajúca spojitý dividendový úrok. Okamžitý kurz zvolenej cudzej meny zodpovedá potom aktuálnej cene akcie a úrok r_f dividendám[1]. Preto je model správania sa kurzu cudzej meny zhodný s modelom vývoja ceny akcie.

II.3. Vývoj úrokových mier

Pre krátkodobý úrok, resp. vývoj jeho hodnoty, sa tiež používa rovnaký model ako pre akcie. Vo všeobecnosti $dr = m(r)dt + s(r)dW_t$. Na rozdiel od akcií alebo cudzej meny

[1] Keďže úrok z držania cudzej meny je vyplácaný v danej cudzej mene, hodnota zárobku v korunách je proporcionálna k aktuálnemu kurzu, čo presne zodpovedá proporcionálnemu dividendovému úroku.

má krátkodobý úrok takú vlastnosť, že dlhodobo sa udržiava okolo určitej hodnoty (tzv. reversion level). Tento jav sa nazýva mean reversion:



Teda ak je r príliš malé, má tendenciu rásť, a naopak. Mean reversion zakomponoval do vývoja úroku vo svojom modeli Vasicek:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dW_t \,,$$

kde a je „rýchlosť konvergencie“ a b je reversion level. Fluktuácia je vytváraná stochastickým členom. Nevýhodou tohto modelu je, že úrok môže nadobudnúť aj záporné hodnoty. Preto Cox, Ingersoll a Ross navrhli alternatívu:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma \sqrt{r} dW_t$$

čím znížili volatilitu pre nízke úroky a zvýšili pre vysoké. Na obrázku dole sú možné realizácie takéhoto vývoja, ak $a = 2$, $b = 1$, $\sigma = 0.2$ a počiatočný úrok je 1.3: