I. DERIVÁTY AKCIÍ

I.1. Forwardy a futures

Pri stanovovaní ceny forward a futures kontraktov predpokladajme, že

- transakčné výdavky sú nulové
- všetky zisky podliehajú rovnakej dani
- účastníci obchodovania si môžu požičiavať peniaze na rovnaký bezrizikový úrok, na ktorý môžu požičať peniaze iným
- účastníci obchodovania využívajú všetky arbitrážne príležitosti, ktoré sa vyskytnú
- časové úseky sú merané v rokoch
- používame spojité úročenie; teda ak je výška úroku p. a. r, potom jedna koruna sa zhodnotí za obdobie τ na $e^{r\tau}$.

Najjednoduchší typ forward kontraktu je taký, ktorý je uzavretý na akcie neposkytujúce dividendy. Ukážme, že potom forwardová cena v čase t je daná vzťahom:

$$F = Se^{r(T-t)},$$

kde S je aktuálna cena akcie a T čas splatnosti kontraktu. Predpokladajme dve portfólia: portfólio A pozostáva z long forward kontraktu a hotovosti vo výške $Ke^{-r(T-t)}$, kde K je delivery price; portfólio B pozostáva z jednej akcie, ktorá je predmetom kontraktu. V čase T má portfólio A payoff $S_T - K + K = S_T$. Portfólio B má takú istú hodnotu. To znamená, že v súčasnosti sa musia hodnoty oboch portfólií rovnať (inak by vznikla arbitráž). Teda platí:

$$f + Ke^{-r(T-t)} = S,$$

$$f = S - Ke^{-r(T-t)},$$

kde f je súčasná hodnota forward kontraktu pre long pozíciu (pozor, nie forwardová cena). Forwardová cena je definovaná ako taká delivery price, ktorá nuluje súčasnú hodnotu forward kontraktu pre obe strany. Z toho dostávame $F = Se^{r(T-t)}$. Ak akcia vypláca presne predpovedateľné dividendy, forward price je daná vzťahom:

$$F = (S - I)e^{r(T-t)},$$

kde *I* je súčasná hodnota dividend (diskontovaná bezrizikovým úrokom *r*). Tento vzťah dostaneme, ak k portfóliu B pridáme ešte dlh vo výške *I* na úrok rovný *r*. Forwardová cena je teda rovná budúcej cene akcie, ak by sa táto vyvíjala deterministicky, čiže by rástla s bezrizikovým úrokom *r*.

Futures sú vlastne forward kontrakty obchodované na burzách, ktoré majú určité špeciálne vlastnosti. Jednou z najdôležitejších je, že sa denne vykonáva tzv. marking to market, t.j. sa denne počítajú zisky a straty účastníkov kontraktu a tí si uvedené čiastky „vymieňajú". Teda ak držiteľ long pozície stratil v priebehu dňa, znamená to, že držiteľ short pozície presne toľko získal a teda na konci obchodného dňa obdrží od držiteľa long pozície danú čiastku a naopak. Ukážme, že forward cena sa rovná futures cene za predpokladu konštantnosti bezrizikového úroku. Predpokladajme, že futures kontrakt trvá *n* dní a F_i je futures cena na konci *i*–teho dňa $(0 \le i \le n)$. Nech δ je bezrizikový úrok na deň (konštantný). Zoberme do úvahy nasledujúcu stratégiu:

1. vstúpiť do long pozície e^{δ} futures kontraktov na akciu na konci dňa 0
2. zvýšiť pozíciu na $e^{2\delta}$ kontraktov na konci dňa 1
3. zvýšiť pozíciu na $e^{3\delta}$ kontraktov na konci dňa 2

Potom zisk a strata v *i*–tom dni je:

$$(F_i - F_{i-1})e^{i\delta},$$

akumulovaná do dňa *n*:

$$(F_i - F_{i-1})e^{i\delta}e^{(n-i)\delta} = (F_i - F_{i-1})e^{n\delta}.$$

Teda celkový zisk/strata na konci *n*–tého dňa je:

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i - F_{i-1})e^{n\delta} = (F_n - F_0)e^{n\delta}.$$

Keď túto stratégiu skombinujeme s uložením hotovosti vo výške F_0 na denný úrok δ, na konci *n*–tého dňa máme:

$$F_0e^{n\delta} + (S_T - F_o)e^{n\delta} = S_Te^{n\delta},$$

pretože $F_T = S_T$. Predpokladajme ďalej, že forwardová cena na konci dňa 0 je rovná G_0. Uložením hotovosti G_0.na denný úrok δ a vstupom do long pozície $e^{n\delta}$ forward kontraktov dostaneme na konci *n*–tého dňa tiež payoff $S_Te^{n\delta}$. Keďže máme dve stratégie, ktorých payoff na konci je zhodný, aby nenastala arbitráž, musia sa prvotné náklady týchto stratégií rovnať. To znamená, že $F_0 = G_0$.

V praxi však úrokové miery sú pohyblivé a preto sa futures ceny nemusia nutne rovnať forwardovým. Futures ceny zohľadňujú taktiež dane, transakčné výdavky a podobne. Väčšinou sú však cenové rozdiely zanedbateľné.