I.1. Európske call a put opcie

Začiatkom sedemdesiatych rokov vyvinuli Black a Scholes revolučný model pre oceňovanie európskych put a call opcií na akcie. Model je založený na eliminácii rizika pomocou portfólia zloženého z jedného derivátu a niekoľkých akcií, na ktoré bol derivát vypísaný. Keďže vývoj ceny opcie je závislý na vývoji ceny akcie, tieto dva cenné papiere sú perfektne korelované a teda je možné eliminovať riziko. Táto technika dostala názov Δ–hedging. Výsledkom analýzy je konkrétna parciálna diferenciálna rovnica, ktorej riešením je funkcia ceny derivátu v čase $t \in (0,T)$, kde T je čas expirácie.

I.1.1 Opcie na akcie nevyplácajúce dividendy

Black–Scholesov model má nasledovné predpoklady:

1. cena akcie sa správa podľa modelu z kapitoly II.1 s konštantným driftom a volatilitou, teda platí: $dS_t = \mu S_t Dt + \sigma S_t dW_t$
2. je dovolené kupovať a predávať ľubovoľné množstvo akcií a akcie sú perfektne deliteľné (teda môžeme mať neceločíselný počet akcií)
3. všetky transakčné náklady a dane sú nulové
4. akcia pred expiráciou opcie nevypláca žiadne dividendy
5. na trhu neexistujú arbitrážne príležitosti
6. obchodovanie cenných papierov je nepretržité
7. spojito vyplácaný bezrizikový úrok r je konštantný a rovnaký pre všetky doby expirácie

Označme $V_{ec}(S,t)$ cenu európskej call opcie v čase t, $V_{ep}(S,t)$ cenu európskej put opcie v čase t a E expiračnú cenu (exercise alebo tiež strike price). Vytvorme portfólio P, ktoré obsahuje jednu európsku opciu a Δ akcií (na ktoré je daná opcia vypísaná). Cena tohto portfólia v čase t je (V bez dolného indexu znamená, že vzťah platí pre call aj put opciu):

$$P(t) = V(S,t) + \Delta S\,,$$

zmena ceny portfólia za infinitesimálny časový interval dt je:

$$dP = dV(S,t) + \Delta dS\,.$$

Aplikovaním Itôovej lemy dostaneme:

$$dP = \left(\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V(S,t)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} + \Delta \mu S \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V(S,t)}{\partial S} + \Delta \sigma S \right) dW_t .$$

Ak položíme $\Delta = -\frac{\partial V(S,t)}{\partial S}$, eliminujeme tým stochastický člen s dW_t a teda naše portfólio sa stane bezrizikovým. Preto aj nárast ceny takéhoto portfólia musí zodpovedať nárastu hodnoty každej inej bezrizikovej investície. Ak by napríklad nárast ceny tohto portfólia bol väčší ako peňazí uložených v banke, požičaním peňazí v banke a nákupom portfólia za ne je možné bezrizikovo zarobiť teoreticky neobmedzenú sumu peňazí – vznikla by arbitráž. Podobne by tomu bolo naopak. Peniaze uložené v banke majú v čase t hodnotu $p(t) = p(0)e^{rt}$ a teda musí platiť, že $dP = rPdt$. Porovnaním a dosadením z Δ dostaneme výsledný tvar Black–Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice:

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + rS \frac{\partial V(S,t)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} - rV = 0 .$$

Expiračná podmienka (alebo tiež payoff) pre európsku call opciu je $V_{ec}(S,T) = \max\{S - E, 0\}$, pre put opciu $V_{ep}(S,T) = \max\{E - S, 0\}$. Z vyjadrenia pre dS vidíme, že ak cena akcie S je v nejakom čase t^* nulová, je tiež nulová pre ľubovoľné $t>t^*$. Expiračná podmienka je pre nulovú cenu akcie tiež nulová a teda opcia nemá v takomto prípade žiadnu cenu aj napriek tomu, že do expirácie ešte môže ostať nejaký čas. Z toho vyplýva ľavá okrajová podmienka $V_{ec}(0,t) = 0$. Pre $S \to \infty$ je uplatnenie opcie isté a zárobok je porovnateľný s cenou akcie. Teda cena opcie tiež ide do nekonečna: $\lim_{S\to\infty} V_{ec}(S,t) = \infty$. Okrajové podmienky pre put opcie sú odlišné. Ak je cena akcie nulová, hodnota expiračnej podmienky pre put opciu je E, teda v čase t je to súčasná hodnota: $V_{ep}(0,t) = Ee^{-r(T-t)}$. Ak cena akcie ide do nekonečna, uplatnenie opcie je nezmysel, pretože akciu je možné predať za omnoho vyššiu cenu, než E. Preto je vtedy put opcia bezcenná: $\lim_{S\to\infty} V_{ep}(S,t) = 0$.

Black–Scholesova parciálna diferenciálna rovnica má pre európske call opcie aj explicitné riešenie, ktoré je však vyjadrené pomocou štatistických integrálov, resp. distribučnej funkcie normálneho *N(0, 1)* rozdelenia:

$$V_{ec}(S,t) = S\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

kde

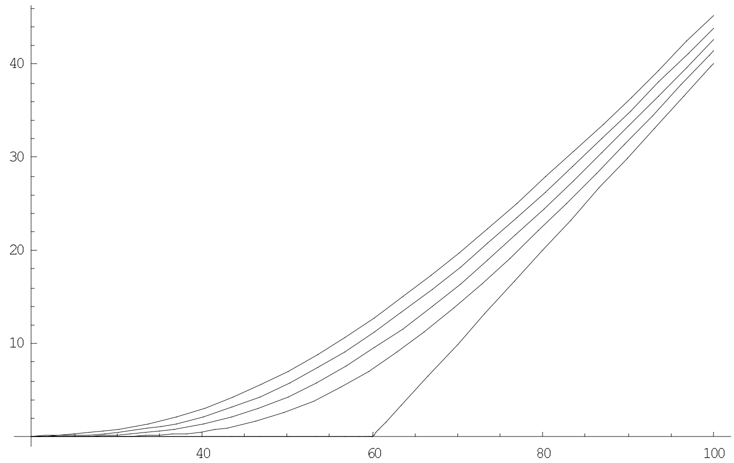
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy ,$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2 = \frac{\ln\frac{S}{E} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

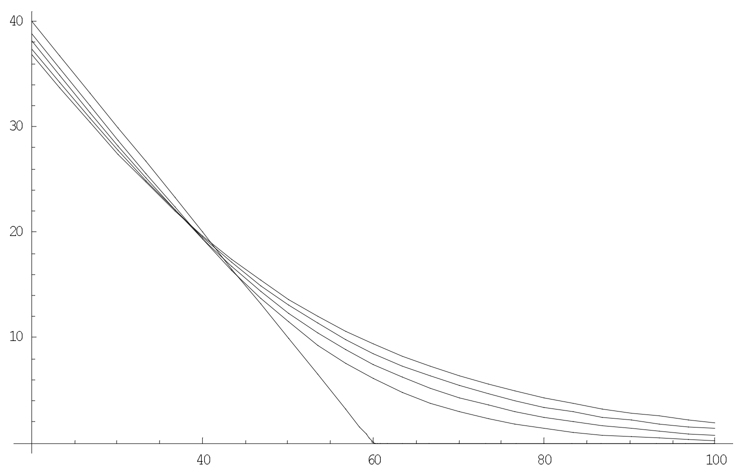
Pre put opciu je explicitné riešenie:

$$V_{ep}(S,t) = Ee^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1),$$

pre ktoré je jednoduché si overiť, že spĺňa put–call paritu. Na nasledujúcom obrázku vidno riešenia pre európsku call opciu s rôznymi časmi do expirácie spolu s expiračnou podmienkou:



Čím kratší čas do expirácie ostáva, tým viac sa riešenie približuje k expiračnej podmienke. Na ďalšom obrázku sú znázornené podobné riešenia pre európsku put opciu:



Z tohto obrázku vidíme, že riešenia sú pre určité ceny akcií menšie, než vnútorná hodnota (intrinsic value, čiže hodnota daná výrazom $E - V_{ep}(S,t)$). Tento fakt má veľký význam pri oceňovaní amerických put opcií.

I.1.2 Opcie na akcie vyplácajúce dividendy

Predpokladajme, že akcia v časovom intervale $(t, t+dt)$ vypláca dividendu $D(S,t)dt$. Ak napríklad $D(S,t) = D^* S$, potom D^* je spojito vyplácaný dividendový úrok (viď analógiu s cudzími menami v kapitole II.2). Po vyplatení dividendy musí nutne cena akcie adekvátne klesnúť, inak by vznikla príležitosť pre arbitráž. Stačilo by tesne pred vyplatením dividendy akciu kúpiť a po vyplatení predať s bezrizikovým potenciálne neobmedzeným ziskom. Teda nové vyjadrenie pre vývoj ceny akcie vyplácajúcej dividendy je:

$$dS = (\mu S - D(S,t))dt + \sigma S dW_t .$$

Odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice je analogické ako v štandardnom Black–Scholesovom modeli, akurát si treba uvedomiť, že zmena ceny portfólia za časový okamih *dt* v sebe zahŕňa aj získanú dividendu $\Delta D(S,t)dt$ (keďže máme v portfóliu Δ akcií). Teda $dP = dV_{ec}(S,t) + \Delta dS + \Delta D(S,t)dt$. Pomocou tejto modifikácie originálneho postupu vznikne výsledná parciálna diferenciálna rovnica:

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + (rS - D(S,t))\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 .$$

Obmedzme teraz skupinu funkcií *D(S,t)* na $\overline{D}(t)S$, teda na dividendy proporcionálne cene akcie. Ak označíme

$$\hat{S}(t) = S(t) e^{\int_T^t \overline{D}(\tau)d\tau} ,$$

z Itôovej lemy vyplýva, že $d\hat{S} = \mu \hat{S} dt + \sigma \hat{S} dW_t$. Teda na $\hat{S}$ platí originálny Black–Scholesov model. Nech jeho riešením je napríklad $\overline{V}_{ec}(\hat{S},t)$ pre európske call opcie. Potom

$$V_{ec}(S,t) = \overline{V}_{ec}\left(S e^{\int_T^t \overline{D}(\tau)d\tau}, t \right),$$

čo znamená, že v explicitnom vyjadrení pre cenu európskej call opcie nahradíme $\hat{S}$ výrazom $S e^{\int_T^t \overline{D}(\tau)d\tau}$. Tým dostaneme explicitné vyjadrenie riešenia pre opciu na akciu vyplácajúcu proporcionálne dividendy $\overline{D}(t)$. Dvoma špecifickými vyjadreniami funkcie $\overline{D}(t)$ používanými vo financiách sú:

- $\overline{D}(t) = D^*$, čo znamená, že akcia vypláca spojitý dividendový úrok D^*
- $\overline{D}(t) = D_\delta^y \delta(t - t_d)$, kde D_δ^y je konštanta, δ je *Diracova δ–funkcia* (viď prílohu A). To znamená, že akcia vypláca v čase t_d konkrétnu dividendu D_δ^y. Z vlastností δ–funkcie vyplýva, že

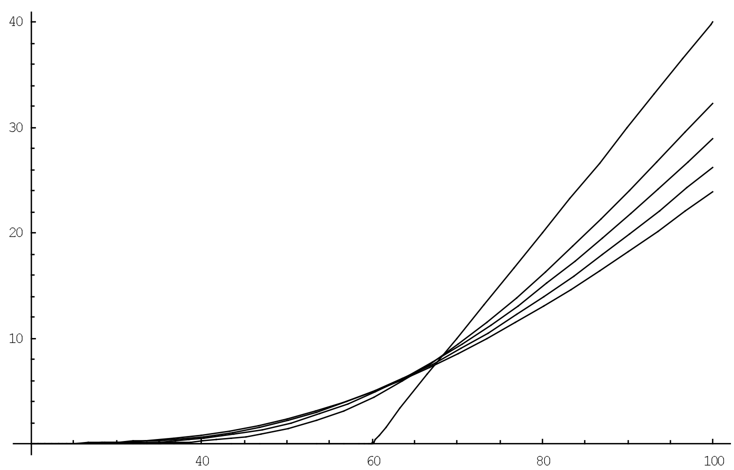
  $\int_0^t D_\delta^y \delta(s - t_d) ds = D_\delta^y \mathrm{H}(t - t_{d0})$, kde H je *Heavisidova funkcia.*

Keď máme diskrétnu dividendu v čase t_d, treba v modeli ošetriť časový úsek od $t_d^- = t_d - dt$ až po $t_d^+ = t_d + dt$. Cena akcie skokovo klesne po vyplatení dividendy, teda platí: $S(t_d^-) = S(t_d^+) e^{-D_\delta^y}$. Keďže cenový skok akcie je presne kompenzovaný dividendou, cena portfólia P „naskočí“ v čase t_d v dôsledku pohybu ceny akcie. Cena opcie tiež musí zostať spojitá, z čoho vyplýva podmienka skoku:

$\lim_{t \to t_d^-} V_{ec}(S(t), t) = \lim_{t \to t_d^+} V_{ec}(S(t), t)$, alebo inak zapísané $V(S(t_d^-), t_d^-) = V(S(t_d^+), t_d^+)$.

Je dôležité všimnúť si, že doteraz sme predpokladali, že cena derivátu je funkcia dvoch nezávislých premenných S a t. Podmienka skoku však vyžaduje v danom časovom okamihu skok ceny akcie, preto cena akcie je uvedená v závislosti od času.

Na nasledujúcom obrázku sú zobrazené riešenia pre európsku call opciu vyplácajúcu konštantný spojitý dividendový úrok, kde tiež vidno, že riešenia „podbehnú“ pre určité ceny akcie expiračnú podmienku, čo má vplyv na oceňovanie amerických opcií:



Ak akcia vypláca spojitý dividendový úrok D^*, explicitné riešenie Black–Scholesovho modelu má tvar:

$$V_{ec}(S,t) = e^{-D^*(T-t)} S\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

$$V_{ep}(S,t) = Ee^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - e^{-D^*(T-t)} S\Phi(-d_1),$$

kde

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + \left(r - D^* + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2 = \frac{\ln\frac{S}{E} + \left(r - D^* - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$