I.1.1 Opcie na futures

Futures opcie boli spomenuté v kapitole I. Sú vypisované na futures na komodity aj na finančné futures. Vieme (viď kapitolu I), že futures cena nejakej akcie je daná výrazom tvaru $F = Se^{r(T-t)}$, kde o r sa predpokladá, že je konštantný. Predpokladajme tiež, že cena akcie S sa správa podľa vzťahu:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t,$$

kde volatilita je konštantná. Aplikovaním Itôovej lemy ľahko zistíme, že potom

$$dF = (\mu - r)F dt + \sigma F dW_t,$$

čo je správanie sa, akoby F bola cena danej akcie, ale vyplácajúcej spojitý konštantný dividendový výnos vo výške r. Preto na ocenenie futures opcie môžeme aplikovať Black–Scholesov model pre akciu vyplácajúcu spojitý dividendový výnos.

Tieto predpoklady sú akceptovateľné pre futures na akcie, akciové indexy a cudziu menu a taktiež pre futures na väčšinu tovarov.

I.1.2 Zovšeobecnenie Black–Scholesovho modelu

Predpokladajme teraz, že r a σ sú deterministické funkcie času $r(t)$ a $\sigma(t)$. Keďže Itôova lema je dostatočne všeobecná, aby pokryla aj tento prípad, odvodenie Black–Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice je analogické, ako v štandardnom modeli. Koncové a okrajové podmienky ostanú taktiež nezmenené s výnimkou ľavej okrajovej podmienky pre európsku put opciu, ktorá bude mať tvar:

$$V_{ep}(0,t) = Ee^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}.$$

Našou úlohou je teda vyriešiť parciálnu diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + \left(r(t) - \overline{D}(t)\right)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} - r(t)V = 0$$

s relevantnými okrajovými a expiračnými podmienkami. Zaveďme substitúciu premenných:

$$\overline{S} = Se^{2\alpha(t)},$$

$$\overline{V} = Ve^{\beta(t)},$$

$$\overline{t} = 2\gamma(t).$$

Potom dostaneme nové vyjadrenia pre jednotlivé parciálne derivácie:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left[\frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{t}}\dot{\gamma}(t) + \frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{S}}\overline{S}\dot{\alpha}(t)\right]e^{-\beta(t)} - \overline{V}e^{-b(t)}\dot{\beta}(t),$$

pričom tu sa využil trik, že parciálna derivácia sa rozdelila na sumu dvoch polovíc,

$$\frac{\partial V}{\partial S}=\frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{S}}e^{-\beta(t)}e^{2\alpha(t)},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial \overline{S}^2}e^{-\beta(t)}e^{4\alpha(t)}.$$

Dosadením do parciálnej diferenciálnej rovnice dostaneme výslednú rovnicu v tvare:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{t}}\dot{\gamma}(t)+\left(r(t)-\overline{D}(t)+\dot{\alpha}(t)\right)\overline{S}\frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{S}}+\frac{1}{2}\sigma^2(t)\overline{S}^2\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial \overline{S}^2}-\left(r(t)+\dot{\beta}(t)\right)\overline{V}=0,$$

kde $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$. Teraz môžeme presne špecifikovať $\alpha(t)$, $\beta(t)$ a $\gamma(t)$:

$$\alpha(t)=-\int_T^t\left(r(\tau)-\overline{D}(\tau)\right)d\tau,$$

$$\beta(t)=\int_T^t-r(\tau)d\tau,$$

$$\gamma(t)=\int_T^t-\sigma^2(\tau)d\tau.$$

Potom sa rovnica zredukuje na konečný tvar:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{t}}=\frac{1}{2}\overline{S}^2\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial \overline{S}^2}.$$

Táto rovnica už neobsahuje žiadne koeficienty závislé od času t a teda ani jej riešenie ich nebude obsahovať. Čiže ak máme $\overline{V}\left(\overline{S},\overline{t}\right)$ ľubovoľné riešenie tejto rovnice, potom zodpovedajúce riešenie pôvodnej rovnice s pôvodnými premennými dostaneme ako:

$$V(S,t)=e^{-\beta(t)}\overline{V}\left(Se^{2\alpha(t)},2\gamma(t)\right).$$

Pre Black–Scholesov prípad, teda keď úrok aj volatilita sú konštantné a dividendy sa nevyplácajú, máme tvar:

$$V(S,t)=e^{-r(T-t)}\overline{V}\left(Se^{2r(T-t)},2\sigma^2(T-t)\right).$$

Porovnaním posledných dvoch výsledkov dostaneme postup na prechod z explicitného riešenia Black–Scholesovho modelu na riešenie zovšeobecneného modelu:

- r zameníme za $\frac{1}{T-t}\int_t^T r(\tau)d\tau$,
- σ^2 zameníme za $\frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(\tau)d\tau$,

- S zameníme za $Se^{-\int_t^T \overline{D}(\tau)d\tau}$.

Treba spomenúť, že tento model je stále limitovaný deterministickosťou úroku a volatility ako funkcií času. Čo sa týka volatility, jej budúcu hodnotu vieme odhadnúť len pre krátku budúcnosť. Môžeme si tiež pomôcť implikovanými volatilitami (viď ďalej). Čo sa týka úroku, veľa závisí od dĺžky času do expirácie. Krátkodobé spot rates sa totiž tiež správajú ako stochastický proces, z dlhodobejších sa „stochastičnosť" vytráca. Ak však poznáme term structure, pomocou zovšeobecneného Black–Scholesovho modelu máme možnosť presnejšie oceniť daný derivát.