I.1.1 Analýza parametrov Black–Scholesovho modelu

Pre ocenenie európskej put alebo call opcie s dividendami alebo bez sú presne zistiteľné všetky parametre okrem volatility akcie. Ak definujeme η ako spojito úročený výnos akcie p. a., potom z modelu správania sa ceny akcie vyplýva, že:

$$S_T = S_0 e^{\eta T} \text{, a teda } \eta = \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}.$$

Z toho istého modelu tiež dostávame rozdelenie náhodnej premennej Y_t:

$$Y_t = \ln\frac{S_t}{S_0} \approx \mathrm{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right).$$

Z vlastností normálneho rozdelenia môžeme potom zistiť rozdelenie náhodnej premennej η:

$$\eta \approx \mathrm{N}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2\frac{1}{T}\right).$$

Tento fakt môžeme využiť pri hľadaní odhadu volatility ceny akcie z historických údajov. Predpokladajme, že máme n+1 údajov o cene akcie $S_i, i = 0,\dots,n,$ pričom S_i znamená cenu akcie na konci i–teho intervalu, ktorého dĺžka vyjadrená v rokoch je τ (často jeden deň). Definujme $u_i = \ln\frac{S_i}{S_{i-1}}$ pre $i = 1,\dots,n$. Keďže $S_i = S_{i-1}e^{u_i}$, u_i je spojito úročený výnos akcie v i–tom intervale, ale nie je to výnos p. a. Analogicky ako pre η môžeme ukázať, že disperzia u_i je rovná $\sigma^2\tau$. Odhad disperzie náhodnej premennej s normálnym rozdelením je:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u}), \text{ kde } \overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i .$$

Teda s^2 je v našom prípade odhad pre $\sigma^2\tau$. Z toho získame konečný odhad pre volatilitu akcie:

$$\overline{s}^2 = \frac{s^2}{\tau}.$$

Zistiť, aký počet údajov S_i je vhodný pre odhad volatility, nie je jednoduchá záležitosť. Všeobecne v štatistike platí, že čím viac údajov, tým presnejší odhad. Volatilita sa však s časom mení a preto príliš staré údaje nemusia byť relevantné pre odhad aktuálnej volatility. V praxi sa ukázal ako vhodný interval 90 až 180 posledných dní.

Ďalšou komplikáciou pri odhadovaní volatility je, či brať do úvahy kalendárne dni alebo len obchodné dni, t.j. dni, keď je burza otvorená. Sú dve skupiny obchodníkov: jedni tvrdia, že na volatilitu vplýva výhradne prísun nových informácií o budúcich výnosoch akcie, druhí tvrdia, že najviac na volatilitu vplýva obchodovanie na burze. E. E. Fama a K. French sa v šesťdesiatych a osemdesiatych rokoch zaoberali touto otázkou. Zhromaždili údaje o cenách akcií na konci obchodných dní za dlhé obdobie a spočítali:

- varianciu výnosov akcie medzi koncami dvoch nasledujúcich obchodných dní, medzi ktorými sa nenachádzal neobchodný deň
- varianciu výnosov akcie medzi koncami piatkov a koncami pondelkov

Ak by obchodné a neobchodné dni boli ekvivalentné, variancia medzi piatkami a pondelkami by mala byť trikrát väčšia ako variancia medzi obchodnými dňami, medzi ktorými nebol neobchodný. Famove výsledky však ukázali nárast iba o 22%, Frenchove o 19%. To ukazuje, že volatilita je väčšia, keď je burza otvorená, ako keď nie je. Zástancovia prvého názoru argumentovali, že nové informácie o výnose akcií sa objavujú najmä v čase, keď je burza otvorená. Študovaním cien futures na poľnohospodárske produkty, kde výnos závisí vo veľkej miere od počasia, sa zistilo, že volatilita sa správa veľmi podobne, ako pri akciách. A to aj napriek tomu, že predpoveď počasia je dostupná každý deň. Pre Black–Scholesov model z toho vyplýva, že neobchodné dni by sa mali ignorovať pri odhade volatility výnosu akcie.

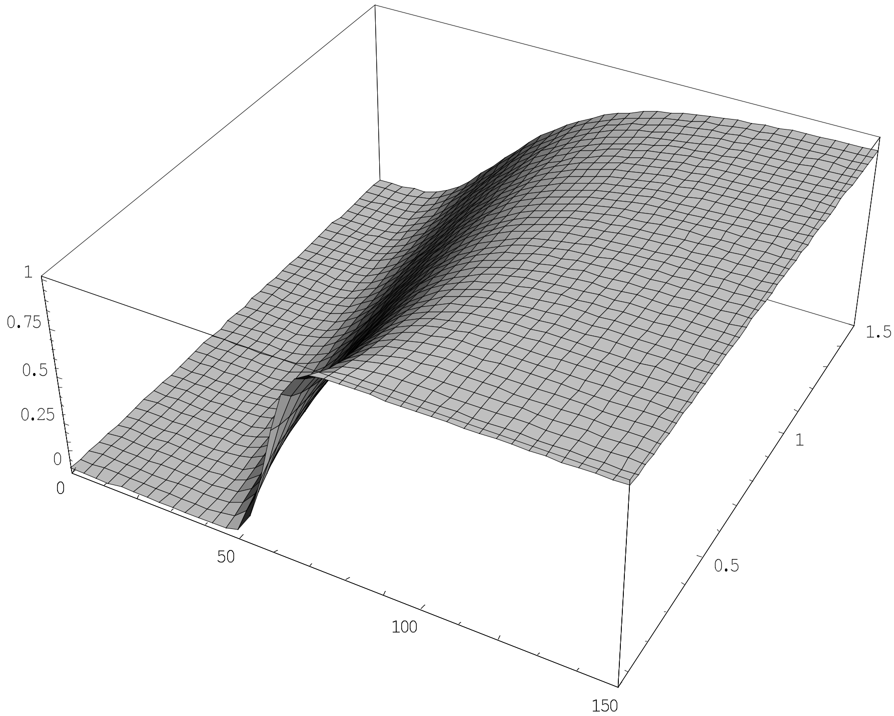
Ďalšia možnosť je použiť implikovanú volatilitu. Ak máme na burze kótované ceny opcií, môžeme z nich určiť implikovanú volatilitu. Keďže explicitné riešenie Black–Scholesovho modelu sa nedá invertovať, aby sme dostali volatilitu ako funkciu ceny opcie, môžeme využiť fakt, že derivácia ceny opcie vzhľadom na volatilitu (tzv. *vega*, viď ďalšiu kapitolu) je kladná a použiť napríklad Newtonovu metódu. Implikovaná volatilita nám hovorí, čo si trh „myslí“ o volatilite danej akcie. V praxi tieto volatility vypočítané z cien rôznych opcií na danú akciu vyjdú často rôzne. Vtedy sa dá skutočná volatilita vyjadriť napríklad ako vážený priemer týchto implikovaných volatilít s vhodne zvolenými váhami. Pri voľbe váh treba brať do úvahy, v akom stave sa nachádza opcia. Napríklad cena opcie hlboko out–of–money je ďaleko menej citlivá na zmenu volatility, ako cena opcie at–the–money. Teda cena druhej opcie v sebe nesie viac informácie o skutočnej volatilite akcie. S. Beckers v roku 1981 ukázal, že najvýhodnejšie je zobrať implikovanú volatilitu vypočítanú z opcie, ktorej citlivosť ceny na zmenu volatility je najvyššia a ostatné ignorovať.

I.1.2 Hedging portfólia derivátov

Ak nejaká spoločnosť vypíše povedzme call opciu s expiračnou cenou X na nejakú akciu a predá ju, stretáva sa s problémom minimalizovania rizika straty v prípade uplatnenia opcie v čase expirácie. Jedna z možných stratégií sa nazýva *nekrytá pozícia* (naked position). Vtedy firma nerobí nič. Ak cena akcie v dobe expirácie klesne pod expiračnú cenu, firma vyhrala a má zisk z predaja opcie. Ak však cena akcie dostatočne stúpne, môže zaznamenať výraznú stratu. Druhou možnosťou je *krytá pozícia* (covered position). Znamená to, že firma okamžite po predaji opcie kúpi akciu, na ktorú bola opcia vypísaná. V tomto prípade zarobí, ak cena akcie vzrastie. V opačnom prípade ju to môže vyjsť dosť draho. Teda žiadna z týchto stratégií nie je jednoznačne výhodná pre hedging.

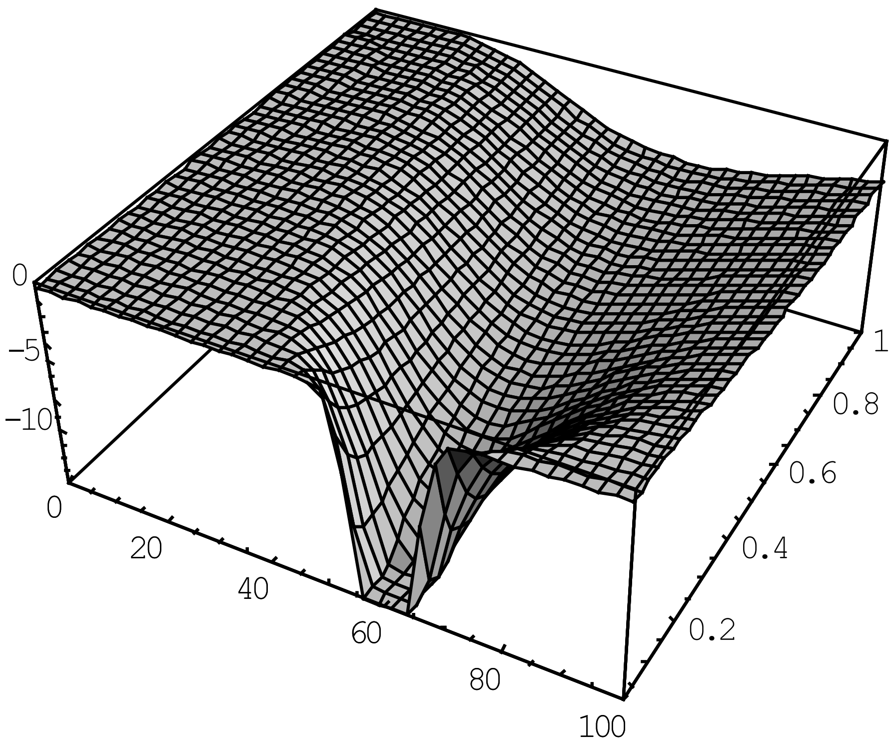
Ďalšia stratégia sa nazýva *stop–loss* stratégia. Pozostáva z nákupu akcie akonáhle jej cena vystúpi nad X a predaja akonáhle klesne pod X. Cieľom je držať nekrytú pozíciu, ak je cena akcie pod X a krytú, ak je cena akcie nad X. V teoretickom prípade (keď by sme cenu akcií zisťovali spojito a teda kupovali a predávali presne za X a neexistovali by transakčné výdavky) by to bola dobrá stratégia. V skutočnosti však zo stochastičnosti vývoja ceny akcie nevieme povedať, ak je aktuálna cena presne X, či cena vzrastie alebo klesne. Preto nákupy robíme za cenu $X+\delta$ a predaje za $X-\delta$, $\delta > 0$. Teda nákup a následný predaj znamenajú stratu 2δ. Naším cieľom by mohlo byť minimalizovať túto stratu, čo znamená častejšie zisťovať pohyb ceny akcie na burze. To však vo všeobecnosti znamená aj častejšie nákupy a predaje, čo vlastne zruší efekt minimalizovania δ.

Prepracovanejšou stratégiou je *Δ–hedging*. Delta derivátu je definované ako $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ (viď prílohu B pre odvodenie explicitného tvaru). Teda Δ vyjadruje určitú mieru citlivosti ceny opcie na zmenu ceny akcie, *ceteris paribus*. Na nasledujúcom obrázku je priebeh $\Delta(S)$ pre európsku call opciu na akciu vyplácajúcu dividendy v závislosti od času do expirácie a ceny akcie:



V Black–Scholesovom modeli bolo portfólio zložené z 1 opcie a –Δ akcií, na ktoré bola opcia vypísaná, bezrizikové. Portfólio, ktorého Δ = 0 (delta portfólia je vážený priemer delt jednotlivých komponentov portfólia), sa nazýva delta–neutrálne. Problém je však v tom, že Δ sa s časom mení, a teda delta–neutrálnosť takto hedgovaného portfólia trvá len relatívne krátku dobu, po ktorej je potrebné Δ portfólia zasa upraviť (tzv. *rebalancing*). Stratégie vyžadujúce častú úpravu pomerných zastúpení komponentov portfólia sa nazývajú *dynamické hedgovacie schémy*. V praxi je kvôli transakčným výdavkom aj Δ–hedging príliš nákladný.

Ďalším ukazovateľom citlivosti derivátu alebo portfólia, ktorý zaujíma hedgerov, je *theta*. Theta je definované ako $\Theta = \frac{\partial \pi}{\partial t}$, kde π je hodnota portfólia. Niekedy sa tiež nazýva *časový úpadok* (time decay) portfólia. Na obrázku vidno priebeh funkcie theta európskej call opcie na akciu vyplácajúcu spojitý dividendový úrok v závislosti od času do expirácie a ceny akcie:

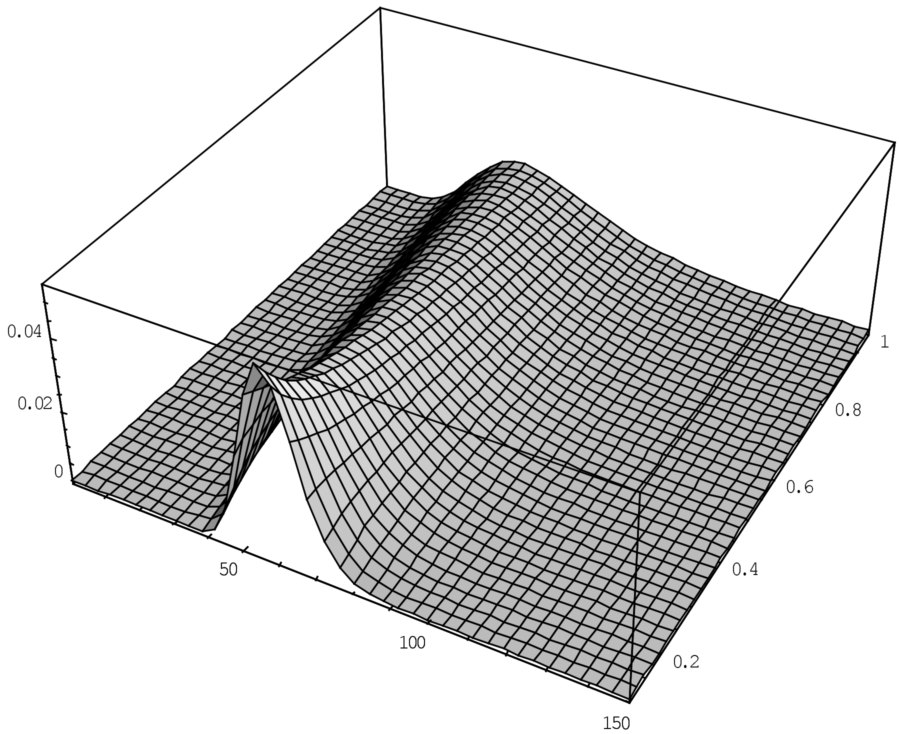


Theta pre opciu je skoro vždy záporné, čo znamená, že hodnota opcie klesá s krátiacim sa časom do expirácie – stráca svoj časový bonus.

Gama portfólia derivátov a akcií, na ktoré sú deriváty vypísané, je definované ako $\Gamma = \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}$, alebo ekvivalentne $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$. To znamená, že určuje mieru zmeny Δ vzhľadom na zmenu ceny akcie. Tiež sa nazýva *krivosť* opcie, lebo $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ pre opciu. Ak je Γ nízke, delta sa mení pomaly a teda delta–neutrálne portfólio môžeme dlhší čas nechať bez zmeny, čo šetrí transakčné výdavky. Z Taylorovho rozvoja sa dá ukázať, že pre delta–neutrálne portfólio platí:

$$\delta\Pi \cong \Theta\delta t + \frac{1}{2}\Gamma\delta S^2$$

pre krátky časový interval δt, kde Θ je theta portfólia. Spôsob, ako zmeniť gamu portfólia, je napríklad kúpou vhodných opcií. To však môže pokaziť delta–neutralitu. Preto je treba vziať do úvahy oba parametre pri konštruovaní takého portfólia. Na nasledujúcom obrázku je zobrazený priebeh funkcie gama pre európsku call opciu na akciu vyplácajúcu spojitý dividendový úrok v závislosti od ceny akcie a času do expirácie:

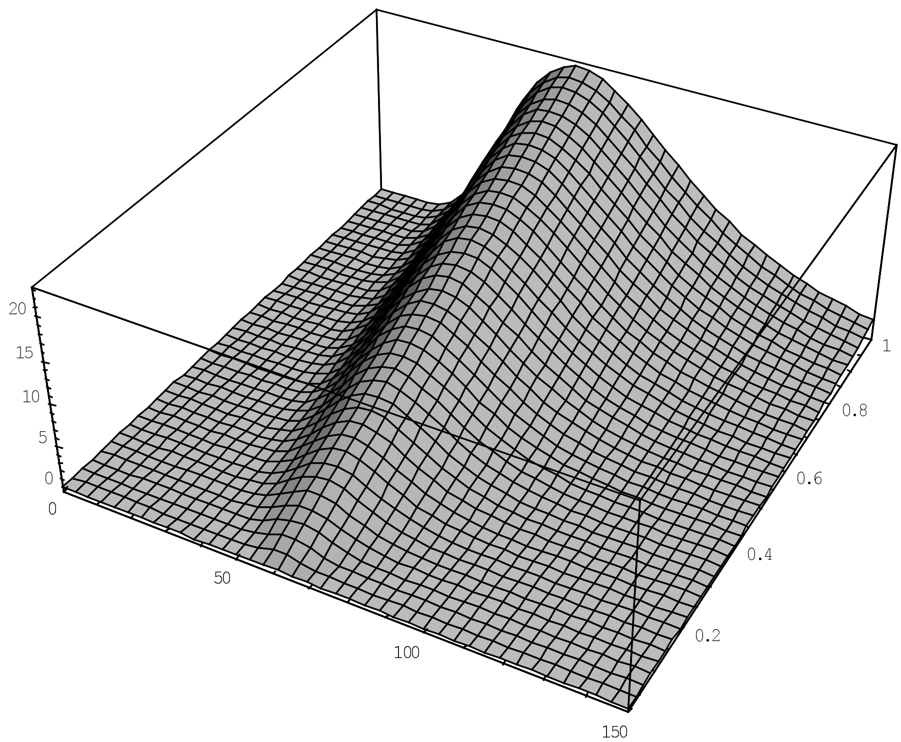


Z Black–Scholesovej rovnice sa dá tiež triviálne vyjadriť vzťah medzi deltou, thetou a gamou derivátu:

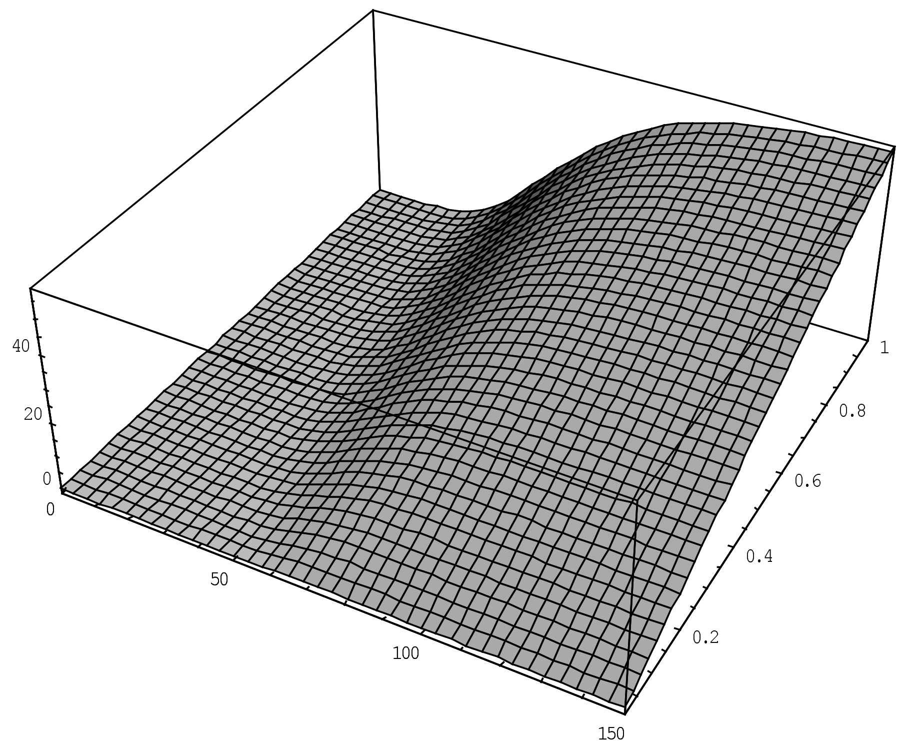
$$\Theta + \left(rS - D(S,t)\right)\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rV .$$

Ďalšie dve vlastnosti – *vega* a *rho* určujú citlivosť na volatilitu a úrok. V Black–Scholesovom modeli sa predpokladá ich konštantnosť, čo v praxi nie je pravda. Preto minimalizovanie vegy a rho portfólia umožňuje hedgerovi znížiť citlivosť na volatilitu a úrok. Vega je definovaná ako $\Lambda = \frac{\partial \pi}{\partial \sigma}$, rho ako $\rho = \frac{\partial \pi}{\partial r}$. Ak máme akcie vyplácajúce spojitý dividendový úrok D, môžeme definovať $\rho_D = \frac{\partial \pi}{\partial D}$. Nasledujúce obrázky zobrazujú priebehy funkcií vega a rho v závislosti od ceny akcie a času do expirácie:

Vega:



Rho:



Je zavádzajúce myslieť si, že obchodníci s derivátmi priebežne menia štruktúru portfólia, aby zabezpečili delta–neutralitu, gama–neutralitu a pod. Skôr, ako elimináciu všetkých rizík, sa rozhodujú, ktoré riziká sú akceptovateľné a ktoré nie. Pritom berú do úvahy práve hodnoty rôznych ukazovateľov, ktoré špecifikujú miery konkrétnych druhov rizík.