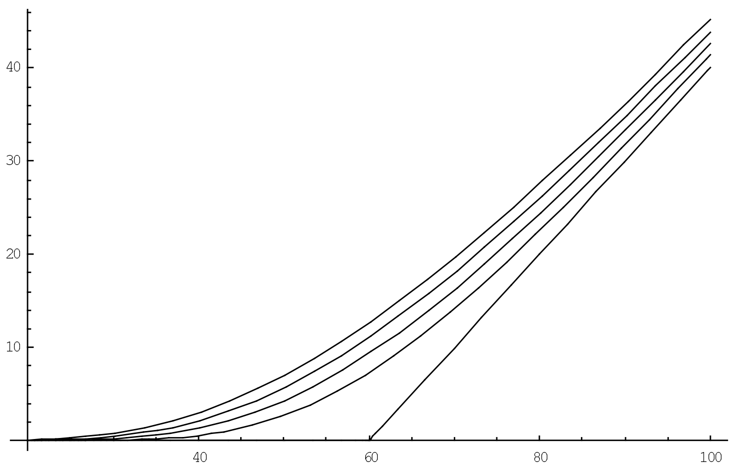
I.1. Americké call a put opcie

Americké opcie majú oproti európskym navyše možnosť uplatnenia pred expiračným časom. Teda vlastne dávajú viac možností zarobiť, čo by sa malo prejaviť ich vyššou cenou. Cena americkej opcie nikdy nemôže byť menšia ako cena európskej, lebo by vznikla arbitráž predajom európskych a nákupom amerických opcií.

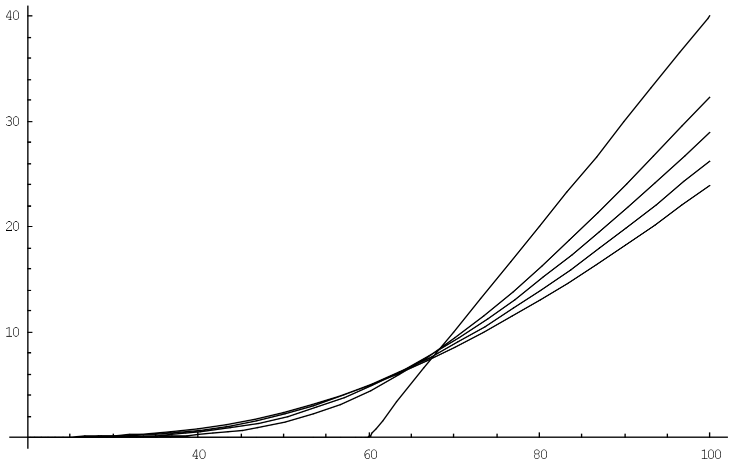
I.1.1 Americké opcie ako problém voľnej hranice

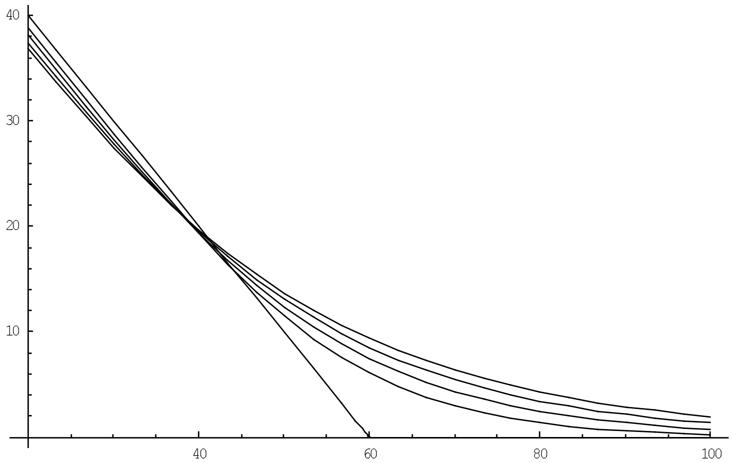
Pozrime sa teraz na európske call opcie na akcie nevyplácajúce dividendy. Z grafu riešenia Black–Scholesovho modelu vidíme, že cena opcie je vždy nad jej vnútornou hodnotou reprezentovanou expiračnou podmienkou:



Teda aj cena americkej call opcie je vyššia ako jej vnútorná hodnota. To je dôvod, prečo je neefektívne uplatniť americkú call opciu pred expiráciou. Dostali by sme totiž iba $\max\{S-E,0\}$, čo je v každom čase pred expiráciou pre ľubovoľnú cenu akcie v tom čase menej ako cena opcie. Výhodnejšie je opciu predať. Preto je americká call opcia na akcie nevyplácajúce dividendy ekvivalentná európskej.

Z grafu funkcie ceny európskej call opcie na akcie vyplácajúce spojitý dividendový úrok a európske put opcie vyplýva, že existuje neprázdny interval pre cenu akcie, v ktorom je cena danej opcie menšia ako jej vnútorná hodnota:



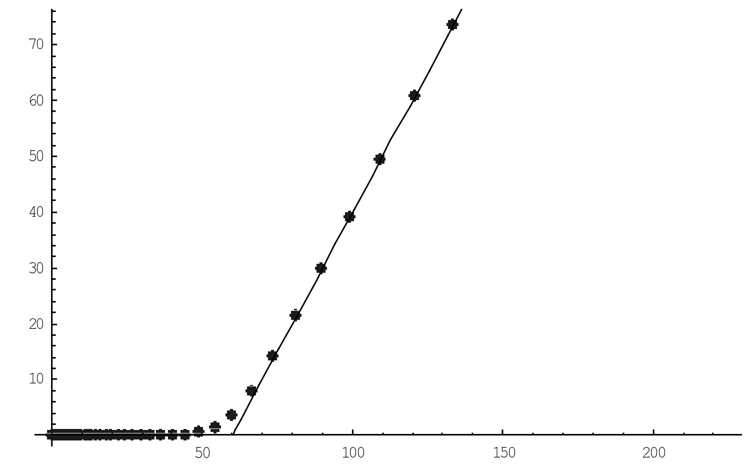


Ďalšia diskusia sa bude týkať americkej call opcie na akcie vyplácajúce spojitý dividendový úrok. Pre put opcie je situácia analogická.

Ak by platilo, že $V_{acd} = V_{ecd}$, potom by pre nejaké S bolo $V_{acd} < S - E$ a teda nákupom americkej opcie a jej okamžitým uplatnením by došlo k arbitráži so ziskom $S - E - V_{acd}$. Teda dostávame ďalšiu podmienku pre americkú opciu:

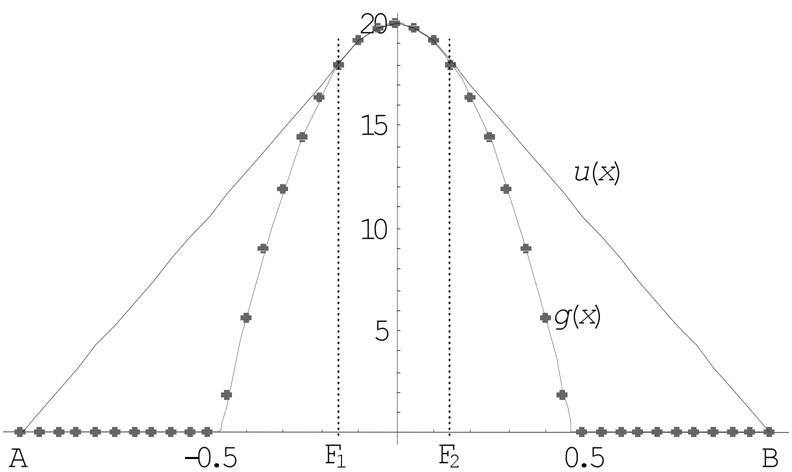
$$V_{acd} \geq \max\{S - E, 0\}.$$

Na nasledujúcom obrázku je graf funkcie americkej call opcie na akciu vyplácajúcu spojitý dividendový úrok vypočítanej v diskrétnych bodoch metódou popísanou v kapitole VI.2:



Označme si bod, v ktorom sa graf funkcie V_{acd} stretáva s expiračnou podmienkou $S_f(t)$. Potom je jasné, že pre $S < S_f(t)$ nie je výhodné opciu uplatniť a pre $S > S_f(t)$ nie je výhodné opciu držať. $S_f(t)$ sa nazýva *optimálna cena uplatnenia opcie* (optimal exercise price). Keďže túto funkciu nepoznáme a priori ako funkciu času, nazýva sa tiež *voľná hranica* (free boundary). Problém zistenia ceny americkej opcie sa nazýva *problém voľnej hranice*.

Problémy voľnej hranice majú svoj význam vo fyzike. Jedna z najjednoduchších verzií tohto problému je problém prekážky. Majme interval $\langle A, B\rangle$ a v rámci neho prekážku definovanú funkciou $g(x)$, o ktorej predpokladáme, že $g''(x) < 0$ a aspoň pre nejaké $x \in \langle A, B\rangle$: $g(x) > 0$:



Teraz predpokladajme, že máme elastickú strunu pevne uchytenú v bodoch A, B natiahnutú cez prekážku $g(x)$. Našou úlohou je nájsť funkciu $u(x)$ popisujúcu túto strunu. Keďže body dotyku struny s prekážkou F_1 a F_2 nie sú dopredu známe, ide o problém voľnej hranice. Intuitívne môžeme odvodiť podmienky pre $u(x)$ – je vždy nad prekážkou, pričom sa jej buď dotýka a vtedy je známa, alebo je lineárna. Teda platí:

1. $u(x) = g(x) \qquad x \in \langle F_1, F_2 \rangle$
2. $-u''(x) = 0 \qquad x \in \langle A, F_1) \cup (F_2, B \rangle$
3. $u(x) \geq g(x)$
4. $u(A) = 0, u(B) = 0$
5. $u'(x)$ spojitá

Problém môžeme formulovať tiež analogickým spôsobom a zbaviť sa explicitnej závislosti na bodoch voľnej hranice (pričom $g(x)$ rozšírime na celý interval $\langle A, B \rangle$ nulou):

1. $u(x) - g(x) \geq 0 \qquad x \in \langle A, B \rangle$
2. $-u''(x)(u(x) - g(x)) = 0 \qquad x \in \langle A, B \rangle$
3. $-u''(x) \geq 0 \qquad x \in \langle A, B \rangle$
4. $u'(x), u(x)$ spojitá

Dá sa ukázať, že riešenie takéhoto problému existuje a je jediné. Takáto forma zápisu sa tiež nazýva lineárna komplementarita.

Vráťme sa späť k americkým opciám. Pre call opciu na akcie vyplácajúce spojitý dividendový úrok musí platiť, že $V_{acd}(S,t) \geq \max\{0, S - E\}$. Pre $S < S_f(t)$ musí funkcia ceny spĺňať Black–Scholesovu rovnicu:

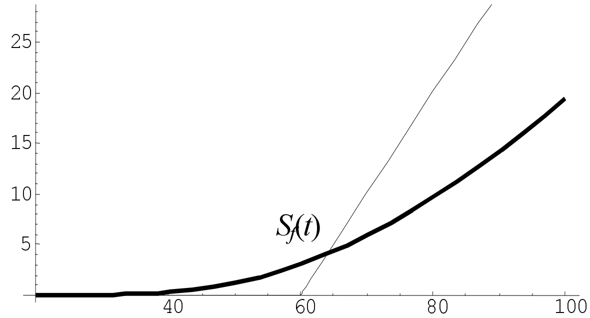
$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 .$$

Ak $S > S_f(t)$, potom $V_{acd}(S,t) = S - E$ (pretože opcia sa hneď uplatní, nemá zmysel ju držať).

Ďalej cena derivátu musí byť spojitá funkcia, a teda $V_{acd}(S_f(t),t) = S_f(t) - E$.

Otázkou je hodnota derivácie $\frac{\partial V_{acd}(S_f(t),t)}{\partial S}$, ktorá spolu s predchádzajúcou podmienkou definuje umiestnenie bodu $S_f(t)$. Máme tri možnosti: $\frac{\partial V_{acd}(S_f(t),t)}{\partial S} < 1, \quad > 1, \quad = 1$.

Ukážme, že prvé dva prípady nie sú správne. Zoberme najskôr $\frac{\partial V_{acd}(S_f(t),t)}{\partial S} < 1$:



Potom sa však (za predpokladu spojitosti) v nejakom okolí bodu $S_f(t)$ funkcia $V_{acd}(S_f(t),t)$ dostane pod svoj payoff diagram, čo signalizuje arbitráž. Obdobná situácia by nastala v prípade, že $\frac{\partial V_{acd}(S_f(t),t)}{\partial S} > 1$.

Teda dostávame problém pre ocenenie americkej call opcie na akcie vyplácajúce spojitý dividendový úrok: nájsť funkciu $V_{acd}(S,t): \langle 0,T \rangle \to R$ tak, aby

1. $BS(V_{acd}) = 0 \quad S < S_f(t)$
2. $V_{acd}(S,t) = \max\{S - E, 0\} \quad S > S_f(t)$
3. $V_{acd}(0,t) = 0$
4. $V_{acd}(S,T) = \max\{S - E, 0\}$
5. $V_{acd}(S_f(t),t) = S_f(t) - E, \ \frac{\partial V_{acd}(S_f(t),t)}{\partial S} = 1,$

kde $BS(\bullet)$ je operátor definovaný ako $\frac{\partial \bullet}{\partial t} + (r - D)S\frac{\partial \bullet}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \bullet}{\partial S^2} - r\bullet$.

Analogickým odvodením dostaneme problém ocenenia americkej put opcie na takú istú akciu:

1. $BS(V_{apd}) = 0 \quad S > S_f(t)$
2. $V_{apd}(S,t) = \max\{E - S, 0\} \quad S < S_f(t)$
3. $V_{apd}(S,t) = 0 \quad S \to \infty$
4. $V_{apd}(S,T) = \max\{E - S, 0\}$
5. $V_{apd}(S_f(t),t) = E - S_f(t), \ \frac{\partial V_{apd}(S_f(t),t)}{\partial S} = -1.$

Pre americké opcie teda vo všeobecnosti neplatí Black–Scholesova rovnica. Ich cena spĺňa nerovnicu:

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \le 0,$$

čo znamená, že návratnosť hedgovaného portfólia nemôže byť väčšia, ako návratnosť bezrizikovej investície. Využijúc tento fakt dostávame zápis problému ocenenia americkej call opcie v tvare lineárnej komplementarity. Riešenie nevieme vyjadriť explicitne, ale dá sa získať numericky (viď kapitolu VI.2):

1. $BS(V_{acd}) \leq 0$
2. $V_{acd} \geq \max\{S - E, 0\}$
3. $BS(V_{acd})(V_{acd} - \max\{S - E, 0\}) = 0$
4. $V_{acd}, \dfrac{\partial V_{acd}}{\partial S}$ spojité.

Komplementarita pre put opciu je analogická.