I.1.1 Americké opcie ako variačné nerovnice

Pre jednoduchosť si zasa budeme postup demonštrovať najskôr na všeobecnom probléme prekážky a potom ho budeme aplikovať na americkú opciu. Teda mali sme úlohu nájsť u tak, že:

$$\begin{array}{lll} 1. & u(x)-g(x)\geq 0 & x\in\langle A,B\rangle \\ 2. & -u''(x)(u(x)-g(x))=0 & x\in\langle A,B\rangle \\ 3. & -u''(x)\geq 0 & x\in\langle A,B\rangle \\ 4. & u'(x),u(x) \text{ spojitá} & \end{array}.$$

Označme teraz $\mathcal{K}$ množinu všetkých funkcií $v(x)$ takých, že platí:

$$\begin{array}{l} v(A)=v(B)=0 \\ v(x)\geq f(x) \quad x\in\langle A,B\rangle \\ v(x) \text{ je spojitá} \\ v'(x) \text{ je po častiach spojitá} \end{array}$$

Tieto funkcie sa nazývajú testovacie funkcie a $\mathcal{K}$ množina testovacích funkcií. Je zrejmé, že $u\in\mathcal{K}$. Pre všetky $v\in\mathcal{K}$ platí, že $(v-f)\geq 0$ a keďže $-u''(x)\geq 0$, dostávame:

$$-u''(v-f)\geq 0,$$

po zintegrovaní:

$$\int_A^B -u''(v-f)dx\geq 0.$$

Z vlastností funkcie u platí:

$$\int_A^B -u''(u-f)dx\geq 0,$$

po odčítaní od predchádzajúcich dvoch integrálov dostávame:

$$\int_A^B -u''(v-u)dx\geq 0.$$

Vidíme, že integrál už nezávisí od funkcie f explicitne, len implicitne cez množinu $\mathcal{K}$. Integrujme per partes:

$$\left[-u'(v-u)\right]_A^B+\int_A^B u'(v-u)'\,dx\geq 0.$$

Keďže $u(A)=u(B)=0$, dostávame:

$$\int_A^B u'(v-u)' \, dx \geq 0 \quad pre \; \forall v \in \mathcal{K} .$$

Čiže problém nájsť $u \in \mathcal{K}$ také, že pre $\forall v \in \mathcal{K}$ platí uvedená nerovnica, je problém prekážky vyjadrený formou *variačnej nerovnice*. Dá sa ukázať, že táto formulácia je ekvivalentná s problémom voľnej hranice a že má práve jedno riešenie. Vidíme, že voľná hranica sa v tejto formulácii nevyskytuje explicitne a zistí sa a posteriori z riešenia. Táto formulácia sa tiež nazýva slabá, pretože nepredpokladá nič o druhej derivácii.

Teraz vyjadrime problém ocenenia americkej call opcie na akciu vyplácajúcu spojitý dividendový úrok. Zavedením substitúcie premenných:

$$S = Ee^x ,$$

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} ,$$

$$V = Ee^{-\frac{1}{2}(k_2-1)x - \left(\frac{1}{4}(k_2-1)^2 + k_1\right)\tau} u(x,\tau),$$

$$k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad k_2 = \frac{r-D}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle$$

dostaneme Black–Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu v tvare:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Definujme

$$g(x,\tau) = e^{\frac{1}{4}\left((k_2-1)^2 + 4k_1\right)\tau} \max\left\{ e^{\frac{1}{2}(k_2+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x}, 0 \right\},$$

potom počiatočná podmienka má tvar:

$$u(x,0) = g(x,0),$$

podmienka, že cena opcie je vždy nad jej payoff diagramom má tvar:

$$u(x,\tau) \geq g(x,\tau)$$

a okrajové podmienky sú:

$$u(x,\tau) \to 0 \text{ pre } x \to \infty, \; u, \frac{\partial u}{\partial x} \text{ spojité.}$$

Keďže i variačné nerovnice sa počítajú numericky a teda sú obmedzené na konečný interval, môžeme celý problém obmedziť na interval $\left\langle -x^l, x^p \right\rangle$ pre nejaké dostatočne veľké $x^l, x^p > 0$. Teda dostávame okrajové podmienky na koncoch intervalu:

$$u(x^p,\tau) = g(x^p,\tau),\ u(x^l,\tau) = 0\,.$$

Potom problém v tvare lineárnej komplementarity vyzerá:

- $\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(u(x,\tau) - g(x,\tau)) = 0 \quad \forall x \in \left\langle -x^l, x^p \right\rangle \forall \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle$
- $\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \geq 0 \quad \forall x \in \left\langle -x^l, x^p \right\rangle \forall \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle$
- $(u(x,\tau) - g(x,\tau)) \geq 0 \quad \forall x \in \left\langle -x^l, x^p \right\rangle \forall \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle$

Zaveďme zasa $\mathcal{K}$ ako množinu všetkých funkcií $\phi(x,\tau) : \left\langle -x^l, x^p \right\rangle \times \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle \to R$

takých, že platí:

- $\phi(x,\tau), \frac{\partial \phi}{\partial \tau}$ sú spojité; $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ je po častiach spojitá
- $\phi(x,\tau) \geq g(x,\tau)$ pre $\forall x \in \left\langle -x^l, x^p \right\rangle$ a pre $\forall \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle$
- $u(x^p,\tau) = g(x^p,\tau),\ u(x^l,\tau) = 0$
- $u(x,0) = g(x,0)$.

Zasa platí, že $u \in \mathcal{K}$. Zoberme ľubovoľné $\phi \in \mathcal{K}$; potom:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\phi(x,\tau) - g(x,\tau)) \geq 0 \quad \forall x \in \left\langle -x^l, x^p \right\rangle \forall \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle.$$

Integrujme podľa x:

$$\int_{-x^l}^{x^p} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\phi(x,\tau) - g(x,\tau))dx \geq 0 \quad \forall \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle,$$

pričom tiež platí:

$$\int_{-x^l}^{x^p} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(u(x,\tau) - g(x,\tau))dx = 0 \quad \forall \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle.$$

Odčítaním nerovnice a rovnice dostávame:

$$\int_{-x^l}^{x^p} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\phi(x,\tau) - u(x,\tau))dx \geq 0 \quad \forall \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle.$$

Takže zasa nemáme priamu referenciu na prekážku, len implicitne cez $\mathcal{K}$. Integrujme posledný integrál per partes:

$$\int_{-x^l}^{x^p} \frac{\partial u}{\partial \tau}(\phi - u) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx - \left[\frac{\partial u}{\partial x}(\phi - u)\right]_{-x^l}^{x^p} \geq 0 \quad \forall \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle.$$

Z okrajových podmienok pre ϕ a u má hranatá zátvorka hodnotu 0. Teda dostávame parabolickú variačnú nerovnicu pre americkú opciu (pre put stačí inak definovať okrajové podmienky). Problém môžeme nakoniec formulovať v tvare: nájsť $u \in \mathcal{K}$ tak, že pre $\forall \phi \in \mathcal{K}$ (nazývané testovacie funkcie) a $\forall \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle$ platí:

$$\int_{-x^l}^{x^p} \frac{\partial u}{\partial \tau}(\phi - u) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \geq 0 \quad \forall \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle,$$

alebo analogicky (tzv. globálna formulácia):

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} \int_{-x^l}^{x^p} \frac{\partial u}{\partial \tau}(\phi - u) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx d\tau \geq 0.$$

Numerická implementácia riešenia ceny amerických opcií formou variačných nerovníc vedie k presne rovnakému algoritmu, ako bol použitý v kapitole VI.2.