I.1.1 Bariérové opcie

Bariérové opcie sú v podstate klasické vanilla call a put opcie, ktoré majú navyše tú vlastnosť, že ak cena akcie dosiahne hodnotu *X* špecifikovanú vopred, tak strácajú alebo nadobúdajú platnosť. Presnejšie rozoznávame štyri typy bariér:

- *up–and–in* opcia expiruje ako bezcenná, ak cena akcie nedosiahne bariéru *X* zdola pred expiráciou. Ak cena dosiahne bariéru, opcia je klasická vanilla
- *down–and–in* opcia expiruje ako bezcenná, ak cena akcie nedosiahne bariéru *X* zhora pred expiráciou. Ak cena dosiahne bariéru, opcia je klasická vanilla
- *up–and–out* - ak cena akcie dosiahne bariéru *X* zdola ešte pred expiráciou, opcia sa stáva bezcennou
- *down–and–out* - ak cena akcie dosiahne bariéru *X* zhora ešte pred expiráciou, opcia sa stáva bezcennou

Venujme sa najskôr out bariére. Odvodenie ceny akcie si ukážeme pre down–and–out call opciu a pre $X < E$ (prípad $X > E$ je analogický, ale s inými okrajovými podmienkami). Odvodenie ostatných typov out–bariérových opcií je podobné. Je zrejmé, že pre $S > X$ cena opcie musí spĺňať Black–Scholesov model. Expiračná podmienka (payoff) je zhodná s európskou call opciou, avšak len pre $S > X$. Teda $V(S,T) > \max\{S - E, 0\}$ pre $S > X$, 0 pre $S \leq X$. Keď $S \to \infty$, pravdepodobnosť, že klesne pod hranicu X je zanedbateľná, preto ostáva v platnosti okrajová podmienka $V(S,t) \approx Se^{-D(T-t)}$ (ak predpokladáme, že akcia vypláca konštantný spojitý dividendový úrok D). Keď cena dosiahne hranicu *X*, opcia sa stáva bezcennou a teda $V(X,t) = 0$. Zaveďme teraz transformáciu premenných:

$$S = Ee^{x},$$

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2},$$

$$V = Ee^{-\frac{1}{2}(k_2 - 1)x - \left(\frac{1}{4}(k_2 - 1)^2 + k_1\right)\tau} u(x,\tau),$$

$$k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad k_2 = \frac{r-D}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad \tau \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\rangle.$$

Black–Scholesova parciálnu diferenciálnu rovnicu tým prevedieme na tvar:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

s podmienkami:

$$u(x,0) = \max\left\{ e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0 \right\} =: u_0(x), \qquad x > \ln\frac{X}{E}$$

$$u(x,t) \cong e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x + \left(\frac{1}{4}(k_2-1)^2 + k_1\right)\tau} \text{ pre } x \to \infty,$$

$$u\left(\ln\frac{X}{E}, t\right) = 0 \quad \forall \tau$$

Na rozdiel od plain vanilla opcií teraz riešime (transformovaný) problém nie na priamke, ale na polpriamke. To vo fyzike zodpovedá šíreniu tepla na polpriamke, pričom na jej konci udržujeme nulovú teplotu. Tento problém sa dá riešiť metódou obrazov (method of images). Všimnime si, že ak $u(x,\tau)$ rieši transformovanú PDR, potom aj $u(x + x_0, \tau)$ a $u(-x, \tau)$ sú riešeniami tej istej PDR pre x_0 konštantné, čo možno ľahko overiť priamym dosadením. Metóda pozostáva z toho, že problém rozšírime na všetky reálne čísla pomocou antisymetrickej počiatočnej podmienky, teda:

$$u(x,0) = u_0(x) - u_0\left(2\ln\frac{X}{E} - x\right),$$

po dosadení:

$$u(x,0) = \begin{cases} \max\left\{ e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0 \right\} & x \geq \ln\frac{X}{E} \\ -\max\left\{ e^{\frac{1}{2}(k_1+1)\left(\ln\frac{X}{E} - \frac{1}{2}x\right)} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)\left(\ln\frac{X}{E} - \frac{1}{2}x\right)}, 0 \right\} & x < \ln\frac{X}{E} \end{cases}$$

pre $\forall x \in R$. Stále platí, že $u\left(\ln\frac{X}{E}, t\right) = 0$. Zoberme teraz riešenie európskej call opcie bez bariéry $V_{ec}(S,t) = Ee^{\alpha x + \beta \tau} u_1(x,\tau)$, teda $u_1(x,\tau) = \frac{e^{-\alpha x - \beta \tau} V_{ec}(S,t)}{E}$. Riešenie ceny bariérovej opcie môžeme vyjadriť v tvare $V_{doc}(S,t) = Ee^{\alpha x + \beta \tau}(u_1(x,\tau) + u_2(x,\tau))$, kde $u_2(x,\tau)$ je riešenie pre európsku call opciu s antisymetrickou počiatočnou podmienkou

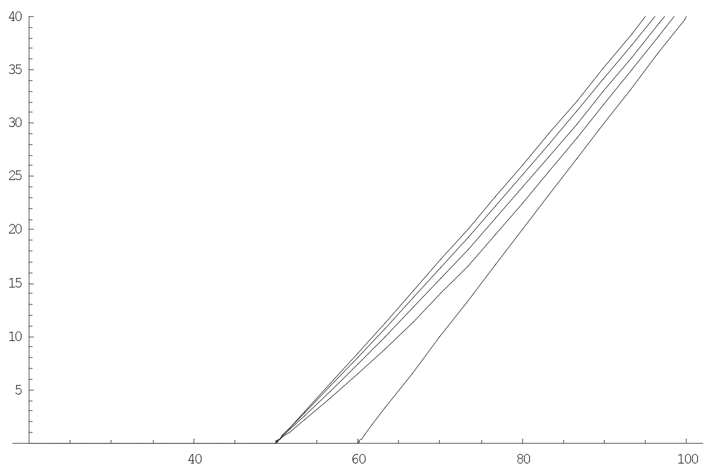
$-u_0\left(2\ln\frac{X}{E}-x\right)$ (vyplýva to z linearity operátora derivácie). Využijúc invariantnosť transformovanej parciálnej diferenciálnej rovnice voči posunu v priestorovej súradnici a voči zmene jej znamienka môžeme vyjadriť $u_2(x,\tau)$ explicitne:

$$u_2(x,\tau)=-u_1\left(2\ln\frac{X}{E}-x,\tau\right)$$
$$=-\frac{e^{-\alpha\left(2\ln\frac{X}{E}-\ln\frac{S}{E}\right)-\beta\tau}V_{ec}\left(\frac{X^2}{S},t\right)}{E}.$$

Z toho nakoniec dosadením dostávame vzťah:

$$V_{doc}(S,t)=V_{ec}(S,t)-\left(\frac{S}{X}\right)^{-(k_2-1)}V_{ec}\left(\frac{X^2}{S},t\right) \text{ pre } S>X.$$

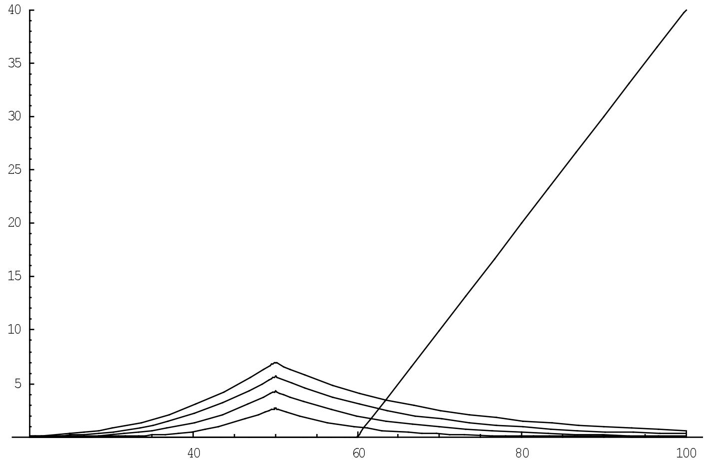
Je triviálne overiť si, že $V_{doc}(X,t)=0$ a že spĺňa expiračnú podmienku aj parciálnu diferenciálnu rovnicu. Keďže $V_{ec}(X,t)$ vieme explicitne vyjadriť, vieme explicitne vyjadriť aj vzorec pre $V\ (X,t)$. Na obrázku dole je graf down–and–out bariérovej opcie s strike price 60 a bariérou 50:



Na rozdiel od out bariéry in–bariérové opcie sa stávajú platné až po dosiahnutí bariéry pred expiráciou. Zasa si odvodenie ukážeme pre down–and–in call s tým, že pre ostatné typy opcií je situácia analogická. Zoberme do úvahy portfólio, ktoré pozostáva z jednej down–and–out európskej call opcie a jednej down–and–in európskej call opcie. Z ich vlastností je jasné, že v dobe expirácie je len jedna z nich aktívna (podľa toho, či bariéra bola dosiahnutá; predpokladáme, že obe majú zhodné parametre *E*, *X*, *T*). Teda portfólio má v dobe expirácie zhodný payoff ako európska call opcia bez bariéry. Aby nenastala možnosť arbitráže, musí platiť:

$$V_{dic}(S,t) = V_{ec}(S,t) - V_{doc}(S,t).$$

Na obrázku je pre porovnanie priebeh ceny down–and–in call opcie s rovnakými parametrami, ako na predchádzajúcom obrázku:



I.1.2 Ázijské opcie

Ázijské opcie sú opcie, ktorých payoff (expiračná podmienka) nejakým spôsobom závisí od priemernej ceny akcie počas doby do expirácie. Výpočet priemernej ceny môže byť spojitý (keď zisťujeme cenu akcie v čase spojito), alebo diskrétny (keď zisťujeme cenu akcie v daných časových bodoch). Priemer sa najčastejšie používa aritmetický alebo geometrický. Tiež payoff môže závisieť od rozdielu koncovej ceny od priemernej alebo od rozdielu priemernej cenu a danej strike price. To dáva veľa možných druhov ázijských opcií. V tejto kapitole sú stručne popísané princípy oceňovania niektorých z nich.

Ázijské opcie sú špeciálnym prípadom tzv. path–dependent opcií (t.j. opcií, ktorých payoff závisí nielen na koncovej cene akcie, ale aj od jej vývoja do expirácie). V nasledujúcom texte bude odvodený princíp oceňovania všeobecných európskych path–dependent opcií, ktorý bude následne aplikovaný na ázijské opcie.

Predpokladajme teda triedu európskych opcií, ktorých expiračná podmienka závisí od ceny akcie S a od

$$\int_0^T f(S(\tau),\tau)d\tau ,$$

kde f je daná funkcia S a t. Vidíme, že tento integrál nejakým spôsobom zahŕňa konkrétnu realizáciu náhodného procesu S. Zaveďme novú premennú

$$I = \int_0^T f(S(\tau),\tau)d\tau .$$

Keďže súčasná cena akcie je nezávislá od jej historického vývoja do času t, môžeme premenné S, t a I pokladať za nezávislé. Z Taylorovho rozvoja plus aplikovaním Itôovej lemy sa dá ukázať, že platí:

$$dI = f(S,t)dt .$$

Keďže cena path–dependent opcie závisí od troch premenných S, t a I, použitím Itôovej lemy dostávame:

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial I} \right) dt .$$

Všimnime si, že v rovnici nepribudol žiaden stochastický člen a teda môžeme použiť presne postup z Black–Scholesovho modelu pre vytvorenie bezrizikového portfólia, čím dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorú musí spĺňať funkcia ceny path–dependent opcie:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (rS - D(I,S,t))\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 .$$

Vráťme sa späť k ázijským opciám. Spojito meraný aritmetický priemer akcie od času 0 do času t je daný vzťahom:

$$\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)d\tau .$$

Ak zavedieme premennú I ako

$$I = \int_0^t S(\tau)d\tau ,$$

potom priemer je $\frac{1}{t}I$. Z predchádzajúceho textu vyplýva, že $dI = S(t)dt$ a teda rovnica pre opciu, ktorej cena je závislá od spojitého aritmetického spriemerňovania má tvar:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + S\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (rS - D(I,S,t))\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 .$$

Spojito meraný geometrický priemer akcie od času 0 do času t je daný vzťahom:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{t}\int_0^t \ln S(\tau)d\tau} .$$

Teda zavedením premennej $I = \int_0^t \ln S(\tau) d\tau$ dostávame rovnicu pre geometrický priemer:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \ln S \frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (rS - D(I,S,t))\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 .$$

V praxi je však spojité zisťovanie ceny akcií nerealizovateľné. Priemery sa teda spočítavajú diskrétne v stanovených časových bodoch. V takomto prípade sa premenná I správa tak, že medzi jednotlivými bodmi v čase, kedy priemer spočítavame (tzv. sampling dates), je konštantná a teda $\frac{\partial V}{\partial I} = 0$ (I sa teda správa ako ďalší parameter). Teda v intervale (t_i, t_{i+1}), kde t_i sú dané časové body, cena opcie spĺňa predpoklady Black–Scholesov ho modelu. V čase t_i sa však premenná I zmení – dostávame skok. Označme si t_i^- čas tesne pred skokom (t.j. zmenou hodnoty premennej I) a t_i^+ čas tesne po. Môžeme si položiť otázku, ako sa správa funkcia $V(S,I,t)$ práve v okolí bodu t_i – či je spojitá alebo nie. Odpoveď na túto otázku závisí od toho, či berieme premenné I a t ako nezávislé premenné, alebo sa na I dívame ako na funkciu času. Ak by totiž platilo:

$$V\left(S(t_i^+), I_{i+1}, t_i^+\right) \neq V\left(S(t_i^+), I_i, t_i^+\right),$$

kde I_i je hodnota I zistená v čase t_i. To by ale dávalo možnosť arbitráže – napríklad ak by hodnota opcie skokom vzrástla, potom kúpou tesne pred skokom a predajom tesne po skoku by vznikol bezrizikový zisk vo výške limitovanej počtom opcií (t.j. teoreticky neobmedzený). Teda musí platiť tzv. podmienka skoku:

$$V\left(S(t_i^+), I_{i+1}, t_i^+\right) = V\left(S(t_i^+), I_i, t_i^+\right).$$

Vo všeobecnosti, ak sa dá I_i vyjadriť vzťahom:

$$I_i = w_i\left(S(t_i), I_{i-1}\right),$$

kde w_i je nám známa najneskôr v časovom intervale (t_{i-1}, t_i), potom podmienka skoku má tvar:

$$V\left(S(t_i^-), I_{i-1}, t_i^-\right) = V\left(S(t_i^+), w_i\left(S(t_i), I_{i-1}\right), t_i^+\right).$$

Všeobecný postup, ako spočítať cenu ázijskej opcie s diskrétne počítanými priemermi je nasledovný:

- Začneme „odzadu“. Teda spočítame pomocou Black–Scholesovho modelu cenu opcie v časovom intervale (t_{n-1}, T), kde máme definovanú koncovú podmienku.

- Z podmienky skoku zistíme koncovú podmienku pre predchádzajúci časový interval, na ktorom potom znova spočítame Black–Scholesovým modelom cenu opcie. Takto pokračujeme až do času 0.

Podobné ázijským opciám sú aj tzv. *lookback opcie*, kde I je definované ako maximum dosiahnutej ceny akcie počas doby od času 0 do expirácie.