I. DERIVÁTY ÚROKOVEJ MIERY

Deriváty odvodené od úrokovej miery a od iných derivátov úrokovej miery sú asi najpredávanejšou triedou finančných derivátov. Medzi najjednoduchšie patria dlhopisy, európske opcie na dlhopisy, swapy a podobne. Najviac sa však obchodujú rôzne exotické deriváty so zložitým payoff, ktoré sú často bariérové alebo path–dependent. U týchto derivátov sa ako underlying instrument často používa portfólio jednoduchších derivátov. Pri oceňovaní úrokových derivátov je potrebné okrem vývoja výšky úroku brať do úvahy aj tzv. *výnosovú krivku* (yield–curve), ktorá popisuje rozloženie úrokových mier pre jednotlivé dĺžky doby splatnosti. Pre oceňovanie najjednoduchších derivátov sa používa Blackov model, čo je určitá analógia Black–Scholesovho modelu. Pre zložitejšie deriváty sa používajú tzv. yield–curve modely.

I.1. Jednoduché deriváty

I.1.1 Definícia základných pojmov

V podstate sú všetky deriváty úrokovej miery založené na nejakých finančných tokoch v budúcnosti. Tieto sú buď isté, alebo sú závislé na nejakých stavoch, ktoré môžu nastať s určitou pravdepodobnosťou. Kontrakt, kedy v stanovenom čase T dostaneme stanovenú čiastku X nazývame *bezkupónový dlhopis* alebo *diskontná obligácia* (discount bond). Hodnotu X nazývame *menovitá hodnota* (face value alebo principal) a čas T dobu splatnosti. Častejším prípadom je dlhopis, ktorý v stanovených časových intervaloch (napríklad ročne) vypláca stanovené čiastky a na konci vyplatí nejakú väčšinou väčšiu čiastku. Tento typ dlhopisov sa nazýva kupónový (coupon–bearing bond) a pravidelne vyplácané čiastky sú kupóny. Označme cenu bezkupónového dlhopisu s menovitou hodnotou 1 v čase t s dobou splatnosti v čase T ako $P(t,T)$ a cenu kupónového $Bnd(t,\{t_i\},T)$, kde $\{t_i\}$ je množina časov vyplácania kupónov. Keďže kupónový dlhopis je ekvivalentný portfóliu bezkupónových dlhopisov s vhodnými parametrami, v ďalšom budeme uvažovať iba bezkupónové.

Spojito úročená (alebo spojito zložená – continuously compounded[1]) *diskrétna aktuálna úroková miera* v čase t s dobou splatnosti v T (time–t continuously compounded discrete spot rate; ďalej len spot rate) $R(t,T)$ je definovaná vzťahom:

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}, \text{ teda } R(t,T) = -\frac{\ln(P(t,T))}{T-t}.$$

Spojito úročená diskrétna budúca úroková miera v čase t na obdobie $(T, T+\Delta t)$ označená $f(t,T,T+\Delta t)$ (continuously compounded discrete forward rate; ďalej len forward rate) je daná vzťahom:

$$\frac{P(t,T+\Delta t)}{P(t,T)} = e^{-f(t,T,T+\Delta t)\Delta t} \quad \Rightarrow \quad f(t,T,T+\Delta t) = -\frac{\ln(P(t,T+\Delta t)) - \ln(P(t,T))}{\Delta t}.$$

Limity pre $T \to t$, resp. pre $\Delta t \to 0$ definujú *okamžitú short rate* $r(t)$ a *okamžitú forward rate* $f(t,T)$:

$$r(t) = \lim_{T \to t} R(t,T),$$

$$f(t,T) = \lim_{\Delta t \to 0} -\frac{\ln(P(t,T+\Delta t)) - \ln(P(t,T))}{\Delta t} = -\frac{\partial \ln(P(t,T))}{\partial T}.$$

Zo vzťahu pre okamžitú forward rate vyplýva:

$$\int_t^T \frac{\partial \ln(P(t,T))}{\partial T} = -\int_t^T f(t,s)ds = \ln(P(t,T)) - \ln(P(t,t)),$$

ale keďže $P(t,t) = 1 \quad \Rightarrow$

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}.$$

Čiže zo znalosti rôznych okamžitých forward rates pre rôzne budúce obdobia vyplýva znalosť cien bezkupónových i kupónových dlhopisov.

Ku spojito úročeným mieram môžeme dodefinovať aj ich jednoducho úročené ekvivalenty:

$$R_s(t,T) = \frac{\frac{1}{P(t,T)} - 1}{T-t},$$

$$F(t,T,T+\Delta t) = \frac{\frac{P(t,T)}{P(t,T+\Delta T)} - 1}{\Delta t}.$$

[1] Tento výraz znamená, že spojito úročíme v každom okamihu

Vytváraním grafov úrokový mier oproti dobe splatnosti získavame tzv. *term structure of interest rates*.

I.1.2 Swapy, FRA a forwardy

Tzv. *plain–vanilla interest rate swap* je kontrakt, v ktorom sa dve strany dohodnú vymieňať si v stanovených časoch v budúcnosti stanovené čiastky, pričom jedna strana úročí fixným úrokom (tzv. fixed leg) a druhá strana premenlivým podľa vývoja úrokových mier (tzv. floating leg). Na swape sa môžu dohodnúť priamo dve spoločnosti, alebo môžu použiť prostredníka, ako napríklad burzu, finančnú inštitúciu. Tento prostredník si potom berie určitú províziu z fixnej časti platieb.

Fixná „noha" pozostáva z platieb B_i:

$$B_i = N_i X \tau_i .$$

N_i je tzv. principal, teda čiastka platená v čase *i*, τ_i, často nazývané frekvencia alebo tenor swapu, je časť roka medzi *i*–tou a *i*+1–ou platbou (platbe sa hovorí reset). *X* je stanovený pevný úrok. Pre takýto swap sa platba B_i realizuje na konci *i*–tého obdobia, teda v čase t_{i+1}. Ak $P(0,t)$ je cena bezkupónového dlhopisu a dobou splatnosti *t*, potom súčasná hodnota platby B_i je:

$$PV(B_i) = N_i X \tau_i P(0, t_{i+1}).$$

Pohyblivá časť swapu je tvorená sériou platieb A_i, každá tiež v čase t_{i+1}, danou vzťahom:

$$A_i = N_i R_i \tau_i .$$

Na rozdiel od B_i je táto platba úročená úrokom R_i, ktorý reprezentuje jednoducho úročený spot rate v čase t_i na obdobie (t_i, t_{i+1}). Často sa ako R_i berie London Interbank Offer Rate. LIBOR je úrok ponúkaný bankami na depozitá z iných bánk na európskych finančných trhoch. Súčasná hodnota platby A_i v čase *t* je:

$$PV(A_i) = N_i R_i \tau_i P(t, t_{i+1}).$$

Keďže nepoznáme v čase 0 budúci spot rate R_i, nemôžeme súčasnú hodnotu vyrátať. Majme teraz portfólio, ktoré sa vytvorí v čase 0 nákupom bezkupónového dlhopisu s dobou splatnosti v čase t_i a predajom bezkupónového dlhopisu s dobou splatnosti v čase t_{i+1}. Potom v čase t_i bude mať portfólio hodnotu:

$$V(t_i) = P(t_i, t_i) - P(t_i, t_{i+1}) = 1 - P(t_i, t_{i+1}),$$

čo je ekvivalentné, za predpokladu jednoduchého úročenia, vzťahu:

$$V(t_i) = 1 - \frac{1}{1 + R_i \tau_i} = \frac{R_i \tau_i}{1 + R_i \tau_i}.$$

Teraz sa znova pozrime na súčasnú hodnotu platby A_i v čase t_i:

$$PV(A_i) = N_i R_i \tau_i P(t_i, t_{i+1}) = N_i \frac{R_i \tau_i}{1 + R_i \tau_i}.$$

Vidieť, že platí: $N_i V(t_i) = PV_{t_i}(A_i)$. Aby nevznikla arbitráž, musí potom daná rovnosť platiť i v čase 0, t.j.:

$$P(0,t_i) - P(0,t_{i+1}) = R_i \tau_i P(0,t_{i+1}) \quad \Rightarrow$$

$$R_i = \frac{\frac{P(0,t_i)}{P(0,t_{i+1})} - 1}{\tau_i} = F(0, t_i, t_{i+1}).$$

To znamená, že pri ocenení pohyblivej časti swapu v čase 0 tak, aby nevznikla arbitráž, je potrebné položiť neznáme spot rates R_i rovné relevantným forward rates F_i, ktorých hodnoty poznáme z výnosovej krivky.

Rovnovážna hodnota X (tzv. equilibrium swap rate) je taká hodnota fixného úroku, že súčasné hodnoty oboch „nôh“ swapu sa rovnajú:

$$X = \frac{\sum N_i F_i \tau_i P(0,t_{i+1})}{\sum N_i \tau_i P(0,t_{i+1})}.$$

Ak si označíme

$$w_i = \frac{N_i \tau_i P(0,t_{i+1})}{\sum N_i \tau_i P(0,t_{i+1})},$$

dá sa na rovnovážnu hodnotu X pozerať ako na vážený priemer forward rates:

$$X = \sum w_i F_i .$$

Ak $N_i \equiv N$, potom sa dá vzťah pre cenu swapu zjednodušiť:

$$X = \frac{\sum N_i F_i \tau_i P(0,t_{i+1})}{\sum N_i \tau_i P(0,t_{i+1})} = \frac{\sum \left(\frac{\frac{P(0,t_i)}{P(0,t_{i+1})} - 1}{\tau_i} \right) \tau_i P(0,t_{i+1})}{\sum \tau_i P(0,t_{i+1})} = \frac{\sum \left(P(0,t_i) - P(0,t_{i+1}) \right)}{\sum \tau_i P(0,t_{i+1})} =$$

$$= \frac{P(0,0) - P(0,t_{n+1})}{\sum \tau_i P(0,t_{i+1})} = \frac{1 - P(0,t_{n+1})}{\sum \tau_i P(0,t_{i+1})}.$$

Pre swap začínajúci v čase t je jeho cena daná vzorcom:

$$X = \frac{P(0,t) - P(0,t_{n+1})}{\sum \tau_i P(0,t_{i+1})}.$$

Zo vzťahov pre X vyplýva, že ak máme model schopný oceňovať bezkupónové dlhopisy, vieme presne oceniť i plain vanilla swapy.

FRA je jednoducho swap s jednou výplatnou periódou a pre jeho cenu platia hore odvodené vzťahy. Naopak, swap sa dá vyjadriť ako séria FRA s rovnakým X.

Forward na bezkupónový dlhopis je definovaný ako kontrakt, kde sa dve strany dohodnú, že jedna od druhej v stanovený čas t v budúcnosti kúpi za stanovenú cenu P_0 dlhopis s dobou splatnosti v čase $T > t$. Aby nevznikla možnosť arbitráže, musí platiť:

$$P(0,t) \cdot P_0 = P(0,T) \quad \Rightarrow \quad P_0 = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}.$$

Ekonomicky to znamená, že ak si kúpime dlhopis s dobou splatnosti v čase t a s menovitou hodnotou P_0, za ktorú po jej vyplatení kúpime predmetný dlhopis (t.j. ten, ktorý je predmetom kontraktu), máme v čase T taký istý finančný tok, ako keby sme rovno v čase 0 kúpili predmetný dlhopis. Táto „fair“ hodnota P_0 sa označuje $FP(t,T)$ a nazýva forward cena dlhopisu. Súčasná hodnota forward kontraktu pre long pozíciu je vo všeobecnosti $(FP(t,T) - P_0)P(0,t)$.